अध्याय 1

संख्या पद्धतियाँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- परिमेय संख्याएँ
- अपरिमेय संख्याएँ
- संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्याएँ निर्धारित करना
- वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार
- संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं का निरूपण
- वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ
- हर का परिमेयीकरण

वास्तविक संख्याओं के लिए घातांकों के नियम

- एक संख्या परिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।
- एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सके (जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है) अपरिमेय संख्या कहलाती है।
- सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याओं का संग्रह कहा जाता है।
- एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती होता है तथा एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होता है।

- यदि r एक परिमेय संख्या है और s एक अपरिमेय संख्या है तो $r+s$ और $r-s$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं। साथ ही, यदि r एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तो rs और $\frac{r}{s}$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं।

- धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के लिए :

  (i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

  (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

  (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

- यदि p और q परिमेय संख्याएँ तथा a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, तो

  (i) $a^p\,a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

  (iii) $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित में से कौन $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}}$ के बराबर नहीं है?

(A) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$ (B) $\frac{1}{\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{1}{6}}}$ (C) $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{30}}$ (D) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{1}{30}}$

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 1.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. प्रत्येक परिमेय संख्या है :

(A) एक प्राकृत संख्या (B) एक पूर्णांक

(C) एक वास्तविक संख्या (D) एक पूर्ण संख्या

2. दो परिमेय संख्याओं के बीच में :

(A) कोई परिमेय संख्या नहीं होती

(B) ठीक एक परिमेय संख्या होती है

(C) अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं

(D) केवल परिमेय संख्याएँ होती हैं तथा कोई अपरिमेय संख्या नहीं होती

3. एक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण नहीं हो सकता :

(A) सांत

(B) असांत

(C) असांत आवर्ती

(D) असांत अनावर्ती

4. किन्हीं दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल होता है :

(A) सदैव एक अपरिमेय संख्या

(B) सदैव एक परिमेय संख्या

(C) सदैव एक पूर्णांक

(D) कभी परिमेय संख्या, कभी अपरिमेय संख्या

5. संख्या $\sqrt{2}$ का दशमलव प्रसार है :

(A) एक परिमित दशमलव

(B) 1.41421

(C) असांत आवर्ती

(D) असांत अनावर्ती

6. निम्नलिखित में से कौन-सी एक अपरिमेय संख्या है?

(A) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (B) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{81}$

7. निम्नलिखित में से कौन-सी एक अपरिमेय संख्या है?

(A) 0.14 (B) $0.14\overline{16}$ (C) $0.\overline{1416}$ (D) 0.4014001400014...

8. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच एक परिमेय संख्या है :

(A) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}$ (C) 1.5 (D) 1.8

9. $\frac{p}{q}$ के रूप में 1.999... का मान, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$, होगा :

(A) $\frac{19}{10}$ (B) $\frac{1999}{1000}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{9}$

10. $2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ बराबर है :

(A) $2\sqrt{6}$ (B) 6 (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{6}$

11. $\sqrt{10}\times\sqrt{15}$ बराबर है :

(A) $6\sqrt{5}$ (B) $5\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{25}$ (D) $10\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ के हर का परिमेयीकरण करने पर प्राप्त संख्या है :

(A) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{7}+2}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{7}+2}{45}$

13. $\frac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{8}}$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)$ (B) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

(C) $3-2\sqrt{2}$ (D) $3+2\sqrt{2}$

14. $\frac{7}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयीकरण करने पर, हमें प्राप्त हर है :

(A) 13 (B) 19 (C) 5 (D) 35

15. $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{48}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$ का मान बराबर है :

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) 8

16. यदि $\sqrt{2}$ = 1.4142 है, तो $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$ बराबर है :

(A) 2.4142 (B) 5.8282

(C) 0.4142 (D) 0.1718

17. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^2}}$ बराबर है :

(A) $2^{-\frac{1}{6}}$ (B) 2^{-6} (C) $2^{\frac{1}{6}}$ (D) 2^6

18. गुणनफल $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[12]{32}$ बराबर है :

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt[12]{2}$ (D) $\sqrt[12]{32}$

19. $\sqrt[4]{(81)^{-2}}$ का मान है :

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 9 (D) $\frac{1}{81}$

20. $(256)^{0.16} \times (256)^{0.09}$ का मान है :

(A) 4 (B) 16 (C) 64 (D) 256.25

21. निम्नलिखित में से कौन x के बराबर है?

(A) $x^{\frac{12}{7}} - x^{\frac{5}{7}}$ (B) $\sqrt[12]{(x^4)^{\frac{1}{3}}}$ (C) $\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$ (D) $x^{\frac{12}{7}} \times x^{\frac{7}{12}}$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या ऐसी दो अपरिमेय संख्याएँ हैं जिनका योग और गुणनफल दोनों ही परिमेय संख्याएँ हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : हाँ

$3+\sqrt{2}$ और $3-\sqrt{2}$ दो अपरिमेय संख्याएँ हैं।

$\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)=6$, एक परिमेय संख्या

$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=7$, एक परिमेय संख्या

अत:, हमें दो ऐसी परिमेय संख्याएँ प्राप्त हैं, जिनका योग और गुणनफल दोनों ही परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य :

एक संख्या x ऐसी है कि x^2 अपरिमेय है परंतु x^4 परिमेय है। एक उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : सत्य है।

आइए $x = \sqrt[4]{2}$ लें।

अब, $x^2 = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$, एक अपरिमेय संख्या

$x^4 = (\sqrt[4]{2})^4 = 2$, एक परिमेय संख्या

अत:, हमें एक संख्या x ऐसी प्राप्त है कि x^2 अपरिमेय है तथा x^4 परिमेय है।

प्रश्नावली 1.2

1. मान लीजिए कि x और y क्रमश: परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ हैं। क्या $x + y$ आवश्यक रूप से एक अपरिमेय संख्या है? अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक उदाहरण दीजिए।

2. मान लीजिए कि x एक परिमेय संख्या है और y एक अपरिमेय संख्या है। क्या xy आवश्यक रूप से एक अपरिमेय संख्या है? एक उदाहरण द्वारा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

3. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ एक परिमेय संख्या है।

(ii) किन्हीं दो पूर्णांकों के बीच अपरिमित रूप से अनेक पूर्णांक हैं।

(iii) 15 और 18 के बीच में परिमेय संख्याओं की संख्या परिमित है।

(iv) कुछ संख्याएँ ऐसी हैं कि जिन्हें $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता, जहाँ p और q दोनों पूर्णांक हैं।

(v) एक अपरिमेय संख्या का वर्ग सदैव एक परिमेय संख्या होती है।

(vi) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ एक परिमेय संख्या नहीं है, क्योंकि $\sqrt{12}$ और $\sqrt{3}$ पूर्णांक नहीं हैं।

(vii) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$, $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ के रूप में लिखी है, इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

4. औचित्य देते हुए, निम्नलिखित को परिमेय या अपरिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत कीजिए:

(i) $\sqrt{196}$ (ii) $3\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{\frac{9}{27}}$ (iv) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{343}}$

(v) $-\sqrt{0.4}$ (vi) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$ (vii) 0.5918

(viii) $\left(1+\sqrt{5}\right)-\left(4+\sqrt{5}\right)$ (ix) 10.124124... (x) 1.010010001...

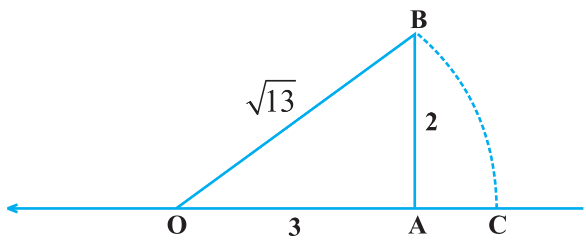
(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: संख्या रेखा पर $\sqrt{13}$ निर्धारित कीजिए।

हल : हम 13 को दो प्राकृत संख्याओं के वर्गों के योग के रूप में लिखते हैं :

$$13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$$

संख्या रेखा पर, OA = 3 मात्रक (इकाई) लीजिए। OA पर एक लंब BA = 2 मात्रक खींचिए। OB को मिलाइए (देखिए आकृति 1.1)।



आकृति 1.1

पाइथागोरस प्रमेय से, OB = $\sqrt{13}$ है।

परकार का प्रयोग करते हुए, केन्द्र O और त्रिज्या OB लेकर, एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिंदु C पर प्रतिच्छेद करता है। तब, बिंदु C ही $\sqrt{13}$ के संगत है।

टिप्पणी **:** हम OA = 2 मात्रक और AB = 3 मात्रक भी ले सकते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : $0.12\overline{3}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

हल :

मान लीजिए कि $x = 0.12\overline{3}$

अतः, $10x = 1.2\overline{3}$

या $10x - x = 1.2\overline{3} - 0.12\overline{3}$

$9x = 1.2333 \ldots - 0.12333 \ldots$

अर्थात् $9x = 1.11$

या $x = \frac{1.11}{9} = \frac{111}{900}$

अतः, $0.12\overline{3} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : सरल कीजिए : $(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})(4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

हल : $(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})(4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

$$= 12\times 5 - 20\sqrt{2}\times\sqrt{5} + 9\sqrt{5}\times\sqrt{2} - 15\times 2$$

$$= 60 - 20\sqrt{10} + 9\sqrt{10} - 30$$

$$= 30 - 11\sqrt{10}$$

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : निम्नलिखित में a का मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} - a\sqrt{3}$$

हल :

$$\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12} = \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6}$$

$$= 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

अत:, $3\sqrt{2}+2\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - a\sqrt{3}$

इसलिए, $a = -2$

प्रतिदर्श प्रश्न 5: सरल कीजिए : $\left[5\left(8^{\frac{1}{3}}+27^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}}$

हल :

$$\left[5\left(8^{\frac{1}{3}}+27^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}} = \left[5\left((2^3)^{\frac{1}{3}}+(3^3)^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[5(2+3)^3\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[5(5)^3\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= [5^4]^{\frac{1}{4}} = 5$$

प्रश्नावली 1.3

1. ज्ञात कीजिए कि कौन से चर x, y, z और u परिमेय संख्याएँ निरूपित करते हैं तथा कौन से चर अपरिमेय संख्याएँ निरूपित करते हैं :

(i) $x^2 = 5$ (ii) $y^2 = 9$ (iii) $z^2 = .04$ (iv) $u^2 = \frac{17}{4}$

2. निम्नलिखित के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

(i) –1 और –2 (ii) 0.1 और 0.11

(iii) $\frac{5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ (iv) $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{5}$

3. निम्नलिखित के बीच में एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या प्रविष्ट कीजिए :

(i) 2 और 3 (ii) 0 और 0.1 (iii) $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{-2}{5}$ और $\frac{1}{2}$ (v) 0.15 और 0.16 (vi) $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$

(vii) 2.357 और 3.121 (viii) .0001 और .001 (ix) 3.623623 और 0.484848

(x) 6.375289 और 6.375738

4. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

$7, 7.2, \frac{-3}{2}, \frac{-12}{5}$

5. संख्या रेखा पर $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ और $\sqrt{17}$ को निर्धारित कीजिए।

6. संख्या रेखा पर निम्नलिखित संख्याओं को ज्यामितीय रूप से निरूपित कीजिए :

(i) $\sqrt{4.5}$ (ii) $\sqrt{5.6}$ (iii) $\sqrt{8.1}$ (iv) $\sqrt{2.3}$

7. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है :

(i) 0.2 (ii) 0.888... (iii) $5.\overline{2}$ (iv) $0.\overline{001}$

(v) 0.2555... (vi) $0.1\overline{34}$ (vii) .00323232... (viii) .404040...

8. दर्शाइए कि $0.142857142857... = \frac{1}{7}$ है।

9. निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(i) $\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 4\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{24}}{8} + \frac{\sqrt{54}}{9}$

(iii) $4\sqrt{12} \times 7\sqrt{6}$ (iv) $4\sqrt{28} \div 3\sqrt{7}$

(v) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{27} + \frac{7}{\sqrt{3}}$ (vi) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$

(vii) $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{216} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$ (viii) $\frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ix) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

10. निम्नलिखित के हर का परिमेयीकरण कीजिए :

(i) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{3 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{16}{\sqrt{41} - 5}$ (v) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ (vi) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

(vii) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (viii) $\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ (ix) $\frac{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}}$

11. निम्नलिखित में से प्रत्येक में a और b के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = a - 6\sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} = a\sqrt{5} - \dfrac{19}{11}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = 2 - b\sqrt{6}$

(iv) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} - \dfrac{7-\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}} = a + \dfrac{7}{11}\sqrt{5}b$

12. यदि $a = 2+\sqrt{3}$ है, तो $a - \dfrac{1}{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. निम्नलिखित में से प्रत्येक में हर का परिमेयीकरण कीजिए और फिर $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$ और $\sqrt{5} = 2.236$ लेते हुए, तीन दशमलव स्थानों तक प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ (v) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

14. सरल कीजिए :

(i) $\left(1^3+2^3+3^3\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\dfrac{3}{5}^{4} \quad \dfrac{8}{5}^{-12} \quad \dfrac{32}{5}^{6}$

(iii) $\dfrac{1}{27}^{\frac{-2}{3}}$ (iv) $(625)^{-\frac{1}{2}}{}^{-\frac{1}{4}}{}^{2}$

(v) $\dfrac{9^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{6}} \times 3^{-\frac{2}{3}}}$ (vi) $64^{-\frac{1}{3}} \quad 64^{\frac{1}{3}} - 64^{\frac{2}{3}}$

(vii) $\dfrac{8^{\frac{1}{3}} \times 16^{\frac{1}{3}}}{32^{-\frac{1}{3}}}$

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि $a=5+2\sqrt{6}$ और $b=\frac{1}{a}$ है, तो a^2+b^2 का मान क्या होगा?

हल : $a = 5 + 2\sqrt{6}$

$$b = \frac{1}{a} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} \times \frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{5-2\sqrt{6}}{5^2-(2\sqrt{6})^2} = \frac{5-2\sqrt{6}}{25-24} = 5-2\sqrt{6}$$

इसलिए, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

यहाँ, $a + b = (5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6}) = 10$

$ab = (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25 - 24 = 1$

अत:, $a^2 + b^2 = 10^2 - 2 \times 1 = 100 - 2 = 98$

प्रश्नावली 1.4

1. $0.6+0.\bar{7}+0.4\bar{7}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

2. सरल कीजिए : $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}+3\sqrt{2}}$

3. यदि $\sqrt{2}=1.414, \sqrt{3}=1.732$ हो, तो $\frac{4}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ है, तो $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ और $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ है, तो x^2+y^2 का मान ज्ञात कीजिए।

6. सरल कीजिए : $(256)^{-\left(4^{\frac{-3}{2}}\right)}$

7. $\frac{4}{(216)^{-\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(256)^{-\frac{3}{4}}} + \frac{2}{(243)^{-\frac{1}{5}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय 2

बहुपद

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- बहुपद का अर्थ
- बहुपद की घात
- गुणांक
- एकपदी, द्विपद, इत्यादि
- अचर, रैखिक, द्विघात बहुपद, इत्यादि
- चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान
- बहुपद के शून्यक
- शेषफल प्रमेय
- गुणनखंड प्रमेय
- मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

  गुणनखंड प्रमेय के प्रयोग द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ :

  बीजीय सर्वसमिकाएँ –

  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$x^3 + y^3 = (x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि सभी x के लिए, $x^2 + kx + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$ है, तो k का मान है

(A) 1 (B) –1 (C) 5 (D) 3

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. निम्नलिखित में से कौन एक बहुपद है?

(A) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}$ (B) $\sqrt{2x} - 1$

(C) $x^2 + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ (D) $\frac{x-1}{x+1}$

2. $\sqrt{2}$ निम्नलिखित घात का एक बहुपद है :

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

3. बहुपद $4x^4 + 0x^3 + 0x^5 + 5x + 7$ की घात है :

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 7

4. शून्य बहुपद की घात है :

(A) 0 (B) 1 (C) कोई भी प्राकृत संख्या

(D) परिभाषित नहीं

5. यदि $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ है, तो $p(2\sqrt{2})$ बराबर है :

(A) 0 (B) 1 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{2} + 1$

6. जब $x = -1$ है, तो बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान है :

(A) – 6 (B) 6 (C) 2 (D) –2

7. यदि $p(x) = x + 3$ है, तो $p(x) + p(-x)$ बराबर है :

(A) 3 (B) $2x$ (C) 0 (D) 6

8. शून्य बहुपद का शून्यक है :

(A) 0 (B) 1

(C) कोई वास्तविक संख्या (D) परिभाषित नहीं

9. बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक है :

(A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{2}$

10. बहुपद $2x^2 + 7x - 4$ के शून्यकों में से एक है :

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2

11. यदि $x^{51} + 51$ को $x + 1$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल है :

(A) 0 (B) 1 (C) 490 (D) 50

12. यदि $x + 1$ बहुपद $2x^2 + kx$ का एक गुणनखंड हो, तो k का मान है :

(A) -3 (B) 4 (C) 2 (D) -2

13. $x + 1$ निम्नलिखित बहुपद का एक गुणनखंड है :

(A) $x^3 + x^2 - x + 1$ (B) $x^3 + x^2 + x + 1$

(C) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ (D) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

14. $(25x^2 - 1) + (1 + 5x)^2$ के गुणनखंडों में से एक है :

(A) $5 + x$ (B) $5 - x$ (C) $5x - 1$ (D) $10x$

15. $249^2 - 248^2$ का मान है :

(A) 1^2 (B) 477 (C) 487 (D) 497

16. $4x^2 + 8x + 3$ का गुणनखंडन है :

(A) $(x + 1)(x + 3)$ (B) $(2x + 1)(2x + 3)$

(C) $(2x + 2)(2x + 5)$ (D) $(2x - 1)(2x - 3)$

17. निम्नलिखित में से कौन $(x + y)^3 - (x^3 + y^3)$ का एक गुणनखंड है?

(A) $x^2 + y^2 + 2xy$ (B) $x^2 + y^2 - xy$ (C) xy^2 (D) $3xy$

18. $(x + 3)^3$ के प्रसार में x का गुणांक है :

(A) 1 (B) 9 (C) 18 (D) 27

19. यदि $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-1$ $(x, y \neq 0)$ है, तो $x^3 - y^3$ का मान है :

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

20. यदि $49x^2 - b = \left(7x+\frac{1}{2}\right)\left(7x-\frac{1}{2}\right)$ है, तो b का मान है :

(A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

21. यदि $a + b + c = 0$ है, तो $a^3 + b^3 + c^3$ बराबर है :

(A) 0 (B) abc (C) $3abc$ (D) $2abc$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**, लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}x^{\frac{1}{2}}+1$ एक बहुपद है (ii) $\frac{6\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$, $x \neq 0$ एक बहुपद है।

हल :

(i) असत्य, क्योंकि चर का घातांक एक पूर्ण संख्या नहीं है।

(ii) सत्य, क्योंकि $\frac{6\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = 6 + x$, जो एक बहुपद है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित में से कौन से व्यंजक बहुपद हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) 8 (ii) $\sqrt{3}x^2 - 2x$ (iii) $1-\sqrt{5x}$

(iv) $\frac{1}{5x^{-2}}+5x+7$ (v) $\frac{(x-2)(x-4)}{x}$ (vi) $\frac{1}{x+1}$

(vii) $\frac{1}{7}a^3 - \frac{2}{\sqrt{3}}a^2 + 4a - 7$ (viii) $\frac{1}{2x}$

2. क्या निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**, लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) एक द्विपद के अधिकतम दो पद हो सकते हैं

(ii) प्रत्येक बहुपद एक द्विपद है।

(iii) एक द्विपद की घात 5 हो सकती है।

(iv) एक बहुपद का शून्यक सदैव 0 होता है।

(v) एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक नहीं हो सकते हैं।

(vi) घात 5 वाले दो बहुपदों के योग की घात सदैव 5 होती है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 :

(i) जाँच कीजिए कि $p(x)$, $g(x)$ का एक गुणज है या नहीं, जहाँ
$p(x) = x^3 - x + 1$ और $g(x) = 2 - 3x$ है।

(ii) जाँच कीजिए कि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं, जहाँ

$p(x) = 8x^3 - 6x^2 - 4x + 3$ और $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$ है।

हल :

(i) $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणज होगा, यदि $g(x)$, $p(x)$ को विभाजित करता है।

अब, $g(x) = 2 - 3x = 0$ से $x = \frac{2}{3}$ प्राप्त होता है।

शेषफल $= p\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right) + 1$

$= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{17}{27}$

क्योंकि शेषफल $\neq 0$ है, इसलिए $p(x)$, $g(x)$ का गुणज नहीं है।

(ii) $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{4} = 0$ से $x = \frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

$g(x), p(x)$ का एक गुणनखंड होगा, यदि $p\left(\frac{3}{4}\right)=0$ (गुणनखंड प्रमेय)

अब, $$p\left(\frac{3}{4}\right)=8\left(\frac{3}{4}\right)^3-6\left(\frac{3}{4}\right)^2-4\left(\frac{3}{4}\right)+3$$

$$=8\times\frac{27}{64}-6\times\frac{9}{16}-3+3=0$$

क्योंकि, $p\left(\frac{3}{4}\right)=0$ है, अतः $g(x), p(x)$ का एक गुणनखंड है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : a का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x-a$ बहुपद $x^3-ax^2+2x+a-1$ का एक गुणनखंड है।

हल : मान लीजिए कि $p(x) = x^3 - ax^2 + 2x + a - 1$

क्योंकि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है, इसलिए $p(a) = 0$ है।

अर्थात्, $a^3 - a(a)^2 + 2a + a - 1 = 0$

या $a^3 - a^3 + 2a + a - 1 = 0$

या $3a = 1$

अतः, $a = \frac{1}{3}$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : (i) घनों का वास्तविक रूप से परिकलन किए बिना $48^3 - 30^3 - 18^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) घनों को ज्ञात किए बिना $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ के गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ है।

इसलिए, यदि $x + y + z = 0$ हो, तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ अर्थात् $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(i) हमें $48^3 - 30^3 - 18^3 = 48^3 + (-30)^3 + (-18)^3$ का मान ज्ञात करना है।

यहाँ, $48 + (-30) + (-18) = 0$

अतः, $48^3 + (-30)^3 + (-18)^3 = 3 \times 48 \times (-30) \times (-18) = 77{,}760$

(ii) यहाँ, $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ है।

अतः, $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित बहुपदों को एक पद वाले, दो पद वाले, इत्यादि बहुपदों में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $x^2 + x + 1$ (ii) $y^3 - 5y$

(iii) $xy + yz + zx$ (iv) $x^2 - 2xy + y^2 + 1$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक की घात निर्धारित कीजिए :

(i) $2x - 1$ (ii) -10

(iii) $x^3 - 9x + 3x^5$ (iv) $y^3 (1 - y^4)$

3. बहुपद $\frac{x^3+2x+1}{5} - \frac{7}{2}x^2 - x^6$ के लिए, लिखिए :

(i) बहुपद की घात

(ii) x^3 का गुणांक

(iii) x^6 का गुणांक

(iv) अचर पद

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए :

(i) $\frac{\pi}{6}x + x^2 - 1$ (ii) $3x - 5$

(iii) $(x - 1)(3x - 4)$ (iv) $(2x - 5)(2x^2 - 3x + 1)$

5. निम्नलिखित को एक अचर, रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपदों के रूप में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $2 - x^2 + x^3$ (ii) $3x^3$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) $4 - 5y^2$

(v) 3 (vi) $2 + x$ (vii) $y^3 - y$ (viii) $1 + x + x^2$

(ix) t^2 (x) $\sqrt{2}x - 1$

6. एक ऐसे बहुपद का उदाहरण दीजिए, जो :

(i) घात 1 का एक एकपदी है।

(ii) घात 20 का एक द्विपद है।

(iii) घात 2 का एक त्रिपद है।

7. बहुपद $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ के मान ज्ञात कीजिए, जब $x = 3$ हो तथा $x = -3$ हो।

8. यदि $p(x) = x^2 - 4x + 3$ है, तो $p(2) - p(-1) + p\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान निकालिए।

9. निम्नलिखित बहुपदों के लिए, $p(0)$, $p(1)$ और $p(-2)$ ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = 10x - 4x^2 - 3$ (ii) $p(y) = (y + 2)(y - 2)$

10. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** है या **असत्य** :

(i) -3 बहुपद $x - 3$ का एक शून्यक है।

(ii) $-\frac{1}{3}$ बहुपद $3x + 1$ का एक शून्यक है।

(iii) $\frac{-4}{5}$ बहुपद $4 - 5y$ का एक शून्यक है।

(iv) 0 और 2 बहुपद $t^2 - 2t$ के शून्यक हैं।

(v) -3 बहुपद $y^2 + y - 6$ का एक शून्यक है।

11. निम्नलिखित में से प्रत्येक में, बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x - 4$ (ii) $g(x) = 3 - 6x$

(iii) $q(x) = 2x - 7$ (iv) $h(y) = 2y$

12. बहुपद $p(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

13. वास्तविक विभाजन द्वारा भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए जब पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दिया जाता है : $x^4 + 1; x - 1$

14. शेषफल प्रमेय से शेषफल ज्ञात कीजिए, जब $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दिया जाता है, जहाँ

(i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1,\quad g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 50,\quad g(x) = x - 3$

(iii) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3,\quad g(x) = 2x - 1$

(iv) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4,\quad g(x) = 1 - \frac{3}{2}x$

15. जाँच कीजिए कि $p(x)$, $g(x)$ का एक गुणज है या नहीं :

(i) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3,\quad g(x) = x - 2$

(ii) $p(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x + 5,\quad g(x) = 2x + 1$

16. दर्शाइए कि :

(i) $x + 3$ बहुपद $69 + 11x - x^2 + x^3$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $2x - 3$ बहुपद $x + 2x^3 - 9x^2 + 12$ का एक गुणनखंड है।

17. निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित में से किस बहुपद का $x - 2$ एक गुणनखंड है :

(i) $3x^2 + 6x - 24$ (ii) $4x^2 + x - 2$

18. दर्शाइए कि $p - 1$ बहुपद $p^{10} - 1$ का एक गुणनखंड है और साथ ही $p^{11} - 1$ का भी एक गुणनखंड है।

19. m के किस मान के लिए, $x^3 - 2mx^2 + 16$ द्विपद $x + 2$ से विभाज्य है?

20. यदि $x + 2a$ बहुपद $x^5 - 4a^2x^3 + 2x + 2a + 3$ का एक गुणनखंड है, तो a ज्ञात कीजिए।

21. m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $2x - 1$ बहुपद $8x^4 + 4x^3 - 16x^2 + 10x + m$ का एक गुणनखंड हो।

22. यदि $x + 1$ बहुपद $ax^3 + x^2 - 2x + 4a - 9$ का एक गुणनखंड है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

23. गुणनखंड कीजिए :

(i) $x^2 + 9x + 18$ (ii) $6x^2 + 7x - 3$

(iii) $2x^2 - 7x - 15$ (iv) $84 - 2r - 2r^2$

24. गुणनखंड कीजिए :

(i) $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(iii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ (iv) $3x^3 - x^2 - 3x + 1$

25. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) 103^3 (ii) 101×102 (iii) 999^2

26. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $4x^2 + 20x + 25$

(ii) $9y^2 - 66yz + 121z^2$

(iii) $\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

27. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $9x^2 - 12x + 3$ (ii) $9x^2 - 12x + 4$

28. निम्नलिखित का प्रसार लिखिए :

(i) $(4a - b + 2c)^2$

(ii) $(3a - 5b - c)^2$

(iii) $(-x + 2y - 3z)^2$

29. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 12xy - 16yz - 24xz$

(ii) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(iii) $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 16xy - 12yz + 24xz$

30. यदि $a + b + c = 9$ और $ab + bc + ca = 26$ है, तो $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

31. निम्नलिखित का प्रसार कीजिए :

(i) $(3a - 2b)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{3}\right)^3$ (iii) $\left(4-\frac{1}{3x}\right)^3$

32. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$

(ii) $8p^3+\frac{12}{5}p^2+\frac{6}{25}p+\frac{1}{125}$

33. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{x}{2}+2y\right)\left(\frac{x^2}{4}-xy+4y^2\right)$ (ii) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

34. गुणनखंड कीजिए :

(i) $1 + 64x^3$ (ii) $a^3-2\sqrt{2}b^3$

35. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$(2x - y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy + 3yz - 6xz)$

36. गुणनखंड कीजिए :

(i) $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ (ii) $2\sqrt{2}a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18\sqrt{2}abc$.

37. घनों का वास्तविक रूप से परिकलन किए बिना निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (ii) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

38. घनों को ज्ञात किए बिना गुणनखंड कीजिए :

$(x - 2y)^3 + (2y - 3z)^3 + (3z - x)^3$

39. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$ है।

(ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$ है।

40. उस आयत की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए जिसका क्षेत्रफल $4a^2 + 4a - 3$ है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि $x + y = 12$ और $xy = 27$ हो, तो $x^3 + y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)\\
&= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]\\
&= 12\,[12^2 - 3 \times 27]\\
&= 12 \times 63 = 756
\end{aligned}
$$

वैकल्पिक हल :

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy\,(x + y)\\
&= 12^3 - 3 \times 27 \times 12\\
&= 12\,[12^2 - 3 \times 27]\\
&= 12 \times 63 = 756
\end{aligned}
$$

प्रश्नावली 2.4

1. यदि बहुपदों $az^3 + 4z^2 + 3z - 4$ और $z^3 - 4z + a$ को $z - 3$ से भाग देने पर, प्रत्येक दशा में समान शेषफल प्राप्त होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

2. बहुपद $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + 3a - 7$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल 19 प्राप्त होता है। a का मान ज्ञात कीजिए। उस स्थिति में भी शेषफल ज्ञात कीजिए जब इस बहुपद को $x + 2$ से भाग दिया जाता है।

3. यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ दोनों ही $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं, तो दर्शाइए कि $p = r$ है।

4. बिना वास्तविक विभाजन के सिद्ध कीजिए कि $x^2 - 3x + 2$ से $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 2$ विभाज्य है। [**संकेत:** $x^2 - 3x + 2$ के गुणनखंड कीजिए]

5. $(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3$ को सरल कीजिए।

6. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + xz - 2yz$ को $(-z + x - 2y)$ से गुणा कीजिए।

7. यदि a, b और c में से प्रत्येक शून्येतर है तथा $a + b + c = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$ है।

8. यदि $a + b + c = 5$ और $ab + bc + ca = 10$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$ है।

9. सिद्ध कीजिए कि $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$ है।

अध्याय 3

निर्देशांक ज्यामिति

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- कार्तीय पद्धति (या निकाय)
- निर्देशांक अक्ष
- मूलबिंदु
- चतुर्थांश
- भुज
- कोटि
- एक बिंदु के निर्देशांक
- क्रमित युग्म

कार्तीय तल में बिंदुओं का आलेख

- कार्तीय तल में, क्षैतिज रेखा x-अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा y-अक्ष कहलाती है।
- निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में विभक्त कर देती है जो चतुर्थांश कहलाते हैं।
- अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु को मूलबिंदु कहते हैं।
- किसी बिंदु का भुज या x-निर्देशांक उसकी y-अक्ष से दूरी होती है तथा किसी बिंदु की कोटि या y-निर्देशांक उसकी x-अक्ष से दूरी होती है।
- (x, y) उस बिंदु के निर्देशांक कहलाते हैं जिसका भुज x हो तथा कोटि y हो।
- x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं तथा y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।
- मूलबिंदु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।

- प्रथम चतुर्थांश में किसी बिंदु के निर्देशांक के चिह्न (+, +), द्वितीय चतुर्थांश में (–, +), तीसरे चतुर्थांश में (–, –) तथा चौथे चतुर्थांश में (+, –) होते हैं।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: वे बिंदु (मूलबिंदु के अतिरिक्त) जिनके भुज उनकी कोटि के बराबर हैं निम्नलिखित में स्थित होंगे :

(A) केवल चतुर्थांश I (B) चतुर्थांश I और II

(C) चतुर्थांश I और III (D) चतुर्थांश II और IV

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 3.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए–

1. बिंदु (–3, 5) स्थित है :

(A) प्रथम चतुर्थांश में (B) द्वितीय चतुर्थांश में

(C) तीसरे चतुर्थांश में (D) चौथे चतुर्थांश में

2. द्वितीय चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के भुज और कोटि के क्रमशः चिह्न हैं :

(A) +, + (B) –, – (C) –, + (D) +, –

3. बिंदु (0, –7) स्थित है :

(A) x –अक्ष पर (B) द्वितीय चतुर्थांश में

(C) y-अक्ष पर (D) चौथे चतुर्थांश में

4. बिंदु (– 10, 0) स्थित है :

(A) x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में (B) y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में

(C) तीसरे चतुर्थांश में (D) चौथे चतुर्थांश में

5. x-अक्ष पर स्थित सभी बिंदुओं का भुज है :

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) कोई भी संख्या

6. x-अक्ष पर स्थित सभी बिंदुओं की कोटि है :

(A) 0 (B) 1

(C) – 1 (D) कोई भी संख्या

7. वह बिंदु, जहाँ दोनों निर्देशांक अक्ष मिलते हैं, कहलाता है :

(A) भुज (B) कोटि (C) मूलबिंदु (D) चतुर्थांश

8. वह बिंदु जिसके दोनों निर्देशांक ऋणात्मक हैं स्थित होगा :

(A) चतुर्थांश I (B) चतुर्थांश II

(C) चतुर्थांश III (D) चतुर्थांश IV

9. बिंदु (1, – 1), (2, – 2), (4, – 5), (– 3, – 4)

(A) चतुर्थांश II में स्थित हैं (B) चतुर्थांश III में स्थित हैं

(C) चतुर्थांश IV में स्थित हैं (D) एक ही चतुर्थांश में स्थित नहीं हैं

10. यदि किसी बिंदु का y निर्देशांक शून्य है, तो वह बिंदु सदैव स्थित है :

(A) चतुर्थांश I में (B) चतुर्थांश II में

(C) x-अक्ष पर (D) y-अक्ष पर

11. बिंदु (–5, 2) और (2, – 5) स्थित हैं :

(A) एक ही चतुर्थांश में (B) क्रमशः चतुर्थांश II और III में

(C) क्रमशः चतुर्थांश II और IV में (D) क्रमशः चतुर्थांश IV और II में

12. यदि किसी बिंदु P की x-अक्ष से लांबिक दूरी 5 मात्रक हो तथा इस लंब का पाद x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा पर स्थित हो, तो बिंदु P का

(A) x निर्देशांक = – 5 है (B) y निर्देशांक = 5 केवल

(C) y निर्देशांक = – 5 केवल (D) y निर्देशांक = 5 या –5

13. बिंदुओं O (0, 0), A (3, 0), B (3, 4), C (0, 4) को आलेखित करके तथा OA, AB, BC और CO को मिलाने पर, निम्नलिखित में से कौन-सी आकृति प्राप्त होगी?

(A) वर्ग (B) आयत (C) समलंब (D) समचतुर्भुज

14. यदि बिंदुओं P (– 1, 1), Q (3, – 4), R(1, –1), S(–2, –3) और T (– 4, 4) को आलेख कागज पर आलेखित किया जाए, तो चौथे चतुर्थांश के बिंदु हैं :

(A) P और T (B) Q और R (C) केवल S (D) P और R

15. यदि दो बिंदुओं P और Q के निर्देशांक क्रमशः (–2, 3) और (–3, 5) हैं तो (P का भुज) – (Q का भुज) बराबर है :

(A) – 5 (B) 1 (C) – 1 (D) – 2

16. यदि P (5, 1), Q (8, 0), R (0, 4), S (0, 5) और O (0, 0) को एक आलेख कागज़ पर आलेखित किया जाए, तो x-अक्ष पर स्थित बिंदु हैं :

(A) P और R (B) R और S (C) केवल Q (D) Q और O

17. किसी बिंदु का भुज धनात्मक होता है :

(A) चतुर्थांश I और II में (B) चतुर्थांश I और IV में

(C) केवल चतुर्थांश I में (D) केवल चतुर्थांश II में

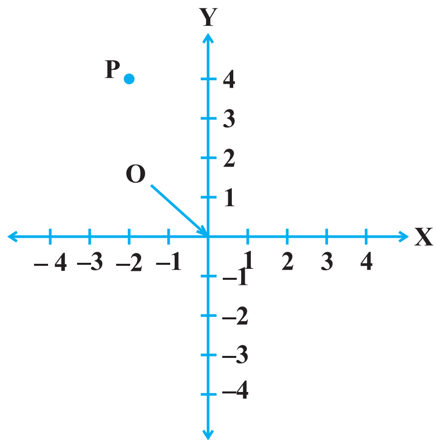
18. वे बिंदु जिनके भुज और कोटि विभिन्न चिह्नों के होते हैं स्थित होंगे :

(A) चतुर्थांश I और II में

(B) चतुर्थांश II और III में

(C) चतुर्थांश I और III में

(D) चतुर्थांश II और IV में



आकृति 3.1

19. आकृति 3.1में, P के निर्देशांक हैं :

(A) (– 4, 2) (B) (–2, 4)

(C) (4, – 2) (D) (2, – 4)

20. आकृति 3.2 में, निर्देशांक (–5, 3) वाला बिंदु है :

(A) T (B) R

(C) L (D) S

21. वह बिंदु, जिसकी कोटि 4 है और जो y-अक्ष पर स्थित है, होगा :

(A) (4, 0) (B) (0, 4)

(C) (1, 4) (D) (4, 2)

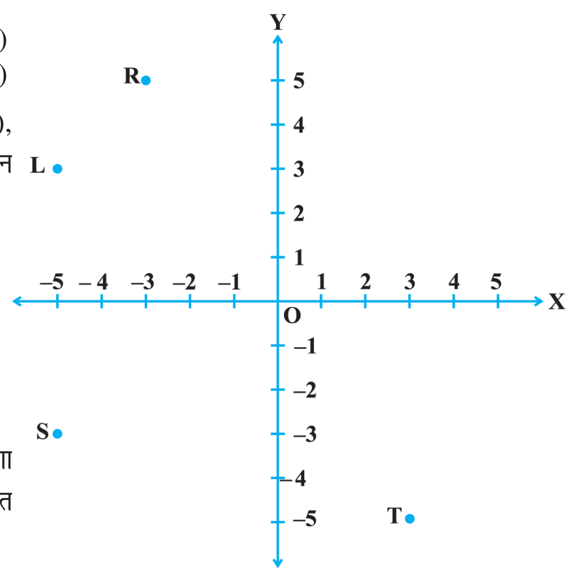
22. बिंदुओं P(0, 3), Q(1, 0), R(0, – 1), S(–5, 0) और T(1, 2) में से कौन-कौन से बिंदु x-अक्ष पर स्थित नहीं हैं?

(A) केवल P और R

(B) Q और S

(C) P, R और T

(D) Q, S और T



आकृति 3.2

23. वह बिंदु जो y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में y-अक्ष पर 5 मात्रक की दूरी पर स्थित है, होगा :

(A) (0, 5) (B) (5, 0)

(C) (0, – 5) (D) (– 5, 0)

24. y-अक्ष से बिंदु P (3, 4) की लांबिक दूरी है :

(A) 3 (B) 4

(C) 5 (D) 7

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) बिंदु (0, –2) y-अक्ष पर स्थित है।

(ii) x-अक्ष से बिंदु (4, 3) की लांबिक दूरी 4 है।

हल :

(i) सत्य, क्योंकि y-अक्ष पर स्थित बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है।

(ii) असत्य, क्योंकि x-अक्ष से किसी बिंदु की लांबिक दूरी उसकी कोटि के बराबर होती है। अत:, यह 3 है, 4 नहीं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –

(i) बिंदु (3, 0) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

(ii) बिंदु (1, –1) और (–1, 1) एक ही चतुर्थांश में स्थित हैं।

(iii) उस बिंदु के निर्देशांक, जिसकी कोटि $-\frac{1}{2}$ और भुज 1 है, $-\frac{1}{2}, 1$ होंगे।

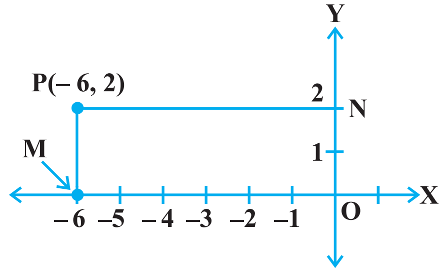
(iv) उस बिंदु के निर्देशांक (2, 0) हैं जो y-अक्ष पर x-अक्ष से 2 मात्रक की दूरी पर स्थित है।

(v) (–1, 7) चतुर्थांश II में स्थित एक बिंदु है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : बिंदु P (– 6, 2) को आलेखित कीजिए तथा इससे क्रमश: x-अक्ष और y-अक्ष पर लंब PM और PN खींचिए। बिंदुओं M और N के निर्देशांक लिखिए।

हल :



आकृति 3.3

आलेख (आकृति 3.3) से, हम देखते हैं कि M के निर्देशांक (– 6, 0) हैं तथा N के निर्देशांक (0, 2) हैं।

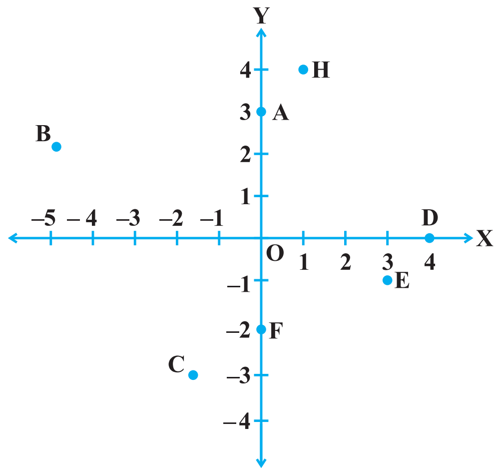
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 3.4 से, निम्नलिखित को लिखिए –

(i) B, C और E के निर्देशांक

(ii) निर्देशांक (0, – 2) वाला बिंदु

(iii) बिंदु H का भुज

(iv) बिंदु D की कोटि



आकृति 3.4

हल :

(i) B = (–5, 2), C = (–2, –3)
E = (3, –1)

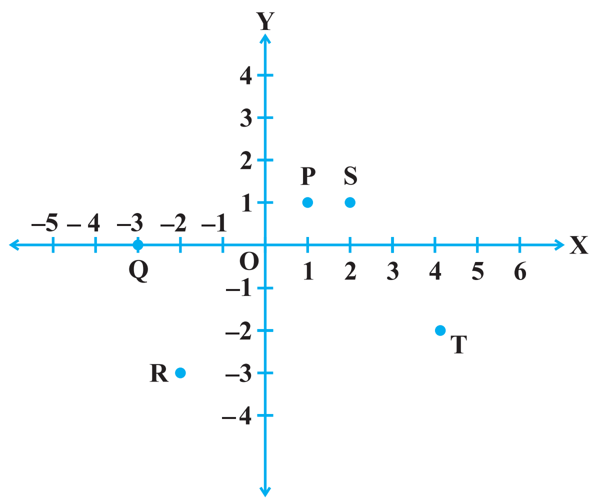
(ii) F

(iii) 1

(iv) 0

प्रश्नावली 3.3

1. आकृति 3.5 से, बिंदुओं P, Q, R, S, T और O के निर्देशांक लिखिए :



आकृति 3.5

2. निम्नलिखित बिंदुओं को आलेखित कीजिए तथा इनको क्रम से मिलाने पर बनी आकृति का नाम लिखिए :

P(– 3, 2), Q (– 7, – 3), R (6, – 3), S (2, 2)

3. निम्नलिखित सारणी से प्राप्त बिंदुओं (x, y) को आलेखित कीजिए :

x	2	4	– 3	– 2	3	0
y	4	2	0	5	– 3	0

4. निम्नलिखित बिंदुओं को आलेखित कीजिए तथा जाँच कीजिए कि ये संरेख हैं या नहीं :

(i) (1, 3), (– 1, – 1), (– 2, – 3)

(ii) (1, 1), (2, – 3), (– 1, – 2)

(iii) (0, 0), (2, 2), (5, 5)

5. बिना बिंदुओं को आलेखित किए, बताइए कि वे किस चतुर्थांश में स्थित होंगे, यदि :

(i) कोटि 5 है, और भुज – 3 है

(ii) भुज – 5 है, और कोटि – 3 है

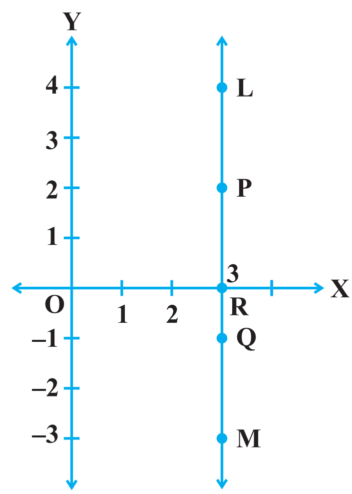
(iii) भुज – 5 है, और कोटि 3 है

(iv) कोटि 5 है, और भुज 3 है

6. आकृति 3.6 में, LM एक रेखा है जो y-अक्ष के समांतर है तथा उससे 3 मात्रक की दूरी पर है।

(i) बिंदुओं P, R और Q के निर्देशांक क्या हैं?

(ii) बिंदुओं L और M के भुजों में क्या अंतर है?



आकृति 3.6

7. किस चतुर्थांश अथवा किस अक्ष पर निम्नलिखित बिंदु स्थित हैं?

(– 3, 5), (4, – 1), (2, 0), (2, 2), (– 3, – 6)

8. निम्नलिखित बिंदुओं में से कौन-कौन से बिंदु y-अक्ष पर स्थित हैं?

A (1, 1), B (1, 0), C (0, 1), D (0, 0), E (0, – 1), F (– 1, 0), G (0, 5), H (– 7, 0), I (3, 3).

9. निम्नलिखित सारणी से प्राप्त बिंदुओं (x, y) को आलेखित कीजिए। पैमाना 1 cm = 0.25 मात्रक लीजिए।

x	1.25	0.25	1.5	– 1.75
y	– 0.5	1	1.5	– 0.25

10. एक बिंदु x-अक्ष पर y-अक्ष से 7 मात्रक की दूरी पर स्थित है। उसके निर्देशांक क्या होंगे? यदि यह y-अक्ष पर x-अक्ष से –7 मात्रक की दूरी पर स्थित होगा तो निर्देशांक क्या होंगे?

11. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो

(i) x और y दोनों अक्षों पर स्थित है

(ii) जिसकी कोटि – 4 है और जो y-अक्ष पर स्थित है

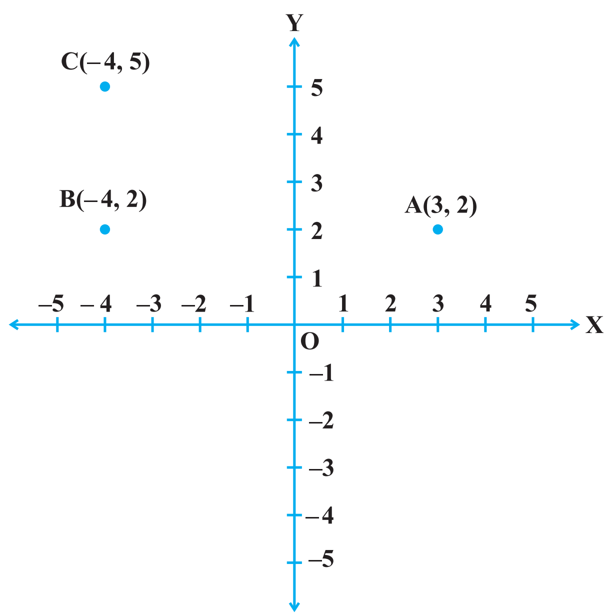
(iii) जिसका भुज 5 है और जो x-अक्ष पर स्थित है

12. 0.5 cm को 1 मात्रक लेकर, आलेख कागज पर निम्नलिखित बिंदुओं को आलेखित कीजिए : A (1, 3), B (– 3, – 1), C (1, – 4), D (– 2, 3), E (0, – 8), F (1, 0)

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक आयत के तीन शीर्ष (3, 2), (– 4, 2) और (– 4, 5) हैं। इन बिंदुओं को आलेखित कीजिए और फिर आयत के चौथे बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : आयत के इन तीनों शीर्षों को A(3, 2), B(– 4, 2) और C(– 4, 5) के रूप में आलेखित कीजिए (देखिए आकृति 3.7)।



आकृति 3.7

हमें चौथे बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात करने हैं, ताकि ABCD एक आयत हो।

क्योंकि एक आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, अत: D का भुज A के भुज के बराबर, अर्थात् 3 होना चाहिए तथा D की कोटि C की कोटि के बराबर, अर्थात् 5 होनी चाहिए।

इसलिए, D के निर्देशांक (3, 5) हैं।

प्रश्नावली 3.4

1. बिंदु A (5, 3), B (– 2, 3) और D (5, – 4) एक वर्ग ABCD के तीन शीर्ष हैं। एक आलेख कागज पर इन बिंदुओं को आलेखित कीजिए और फिर शीर्ष C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. उस आयत के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 5 और 3 मात्रक हैं। एक शीर्ष मूलबिंदु पर स्थित है। लंबी भुजा x-अक्ष पर स्थित है तथा इनमें से एक शीर्ष तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

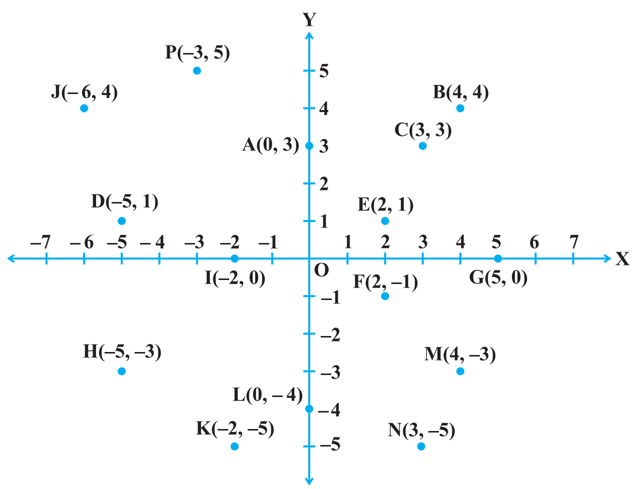
3. बिंदु P (1, 0), Q (4, 0) और S (1, 3) को आलेखित कीजिए। बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि PQRS एक वर्ग हो।

4. आकृति 3.8 से, निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(i) उन बिंदुओं को लिखिए, जिनका भुज 0 है।

(ii) उन बिंदुओं को लिखिए, जिनकी कोटि 0 है।

(iii) उन बिंदुओं को लिखिए, जिनका भुज – 5 है।



आकृति 3.8

5. बिंदु A (1, – 1) और B (4, 5) को आलेखित कीजिए।

(i) इन बिंदुओं को मिलाकर एक रेखाखंड खींचिए। बिंदु A और B के बीच इस रेखाखंड पर स्थित बिंदु के निर्देशांक लिखिए।

(ii) इस रेखाखंड को विस्तृत कीजिए तथा इस रेखा पर स्थित उस बिंदु के निर्देशांक लिखिए, जो इस रेखाखंड के बाहर है।

अध्याय 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

एक समीकरण ऐसा कथन है जिसमें एक व्यंजक दूसरे व्यंजक के बराबर होता है। $ax + by + c = 0$, के रूप की समीकरण, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, ताकि $a \neq 0$ और $b \neq 0$ हो, दो चरों में एक रैखिक समीकरण कहलाती है। समीकरण के हल ज्ञात करने की प्रक्रिया समीकरण को हल करना कहलाती है।

किसी रैखिक समीकरण के हल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता, जब

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ी जाए (या उनमें से एक ही संख्या घटाई जाए)।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा किया (या भाग दिया) जाए।

साथ ही, दो चरों वाली एक रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। दो चरों वाली प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है तथा इस आलेख (सरल रेखा) पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस रैखिक समीकरण का एक हल निरूपित करता है। इस प्रकार, रैखिक समीकरण के प्रत्येक हल को समीकरण के आलेख पर एक अद्वितीय बिंदु द्वारा निरूपित कर सकते हैं। $x = a$ और $y = a$ के आलेख क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष के समांतर रेखाएँ हैं।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए–

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : रैखिक समीकरण $3x - y = x - 1$

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है।

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : दो चरों में रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ के रूप की होती है, जहाँ

(A) $a \neq 0, b \neq 0$ (B) $a = 0, b \neq 0$ (C) $a \neq 0, b = 0$ (D) $a = 0, c = 0$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : y-अक्ष पर स्थिति कोई भी बिंदु निम्नलिखित रूप का होता है:

(A) $(x, 0)$ (B) (x, y) (C) $(0, y)$ (D) (y, y)

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 4.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए–

1. रैखिक समीकरण $2x - 5y = 7$

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

2. रैखिक समीकरण $2x + 5y = 7$ का एक अद्वितीय हल है, यदि x, y है

(A) प्राकृत संख्याएँ (B) धनात्मक वास्तविक संख्याएँ

(C) वास्तविक संख्याएँ (D) परिमेय संख्याएँ

3. यदि $(2, 0)$ रैखिक समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल है, तो k का मान है

(A) 4 (B) 6 (C) 5 (D) 2

4. दो चरों वाली रैखिक समीकरण $2x + 0y + 9 = 0$ के किसी भी हल का रूप होता है

(A) $(-\frac{9}{2}, m)$ (B) $(n, -\frac{9}{2})$

(C) $(0, -\frac{9}{2})$ (D) $(-9, 0)$

5. रैखिक समीकरण $2x + 3y = 6$ का आलेख y-अक्ष को निम्नलिखित में से किस बिंदु पर काटता है

(A) $(2, 0)$ (B) $(0, 3)$ (C) $(3, 0)$ (D) $(0, 2)$

6. समीकरण $x = 7$ को दो चरों में इस प्रकार लिखा जा सकता है

(A) $1 . x + 1 . y = 7$ (B) $1. x + 0. y = 7$

(C) $0 . x + 1 . y = 7$ (D) $0 . x + 0 . y = 7$

7. x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का रूप होता है

(A) (x, y) (B) $(0, y)$ (C) $(x, 0)$ (D) (x, x)

8. रेखा $y = x$ पर स्थि त किसी बिंदु का रूप होता है

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

9. x-अक्ष की समीकरण का रूप है

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

10. $y = 6$ का आलेख एक रेखा है, जो

(A) x-अक्ष के समांतर है और मूलबिंदु से 6 मात्रक की दूरी पर है

(B) y-अक्ष के समांतर है और मूलबिंदु से 6 मात्रक की दूरी पर है

(C) x-अक्ष पर अंत:खंड 6 काटती है

(D) दोनों अक्षों पर अंत:खंड 6 काटती है

11. $x = 5, y = 2$ निम्नलिखित रैखिक समीकरण का एक हल है

(A) $x + 2y = 7$ (B) $5x + 2y = 7$ (C) $x + y = 7$ (D) $5x + y = 7$

12. यदि किसी रैखिक समीकरण के हल $(-2, 2)$, $(0, 0)$ और $(2, -2)$ हैं, तो इसका रूप होता है

(A) $y - x = 0$ (B) $x + y = 0$

(C) $-2x + y = 0$ (D) $-x + 2y = 0$

13. समीकरण $ax + by + c = 0$ के धनात्मक हल सदैव निम्नलिखित में स्थित होते हैं

(A) प्रथम चतुर्थांश (B) द्वितीय चतुर्थांश

(C) तृतीय चतुर्थांश (D) चतुर्थ चतुर्थांश

14. रैखिक समीकरण $2x + 3y = 6$ का आलेख एक रेखा है जो x-अक्ष को निम्नलिखित बिंदु पर मिलती है

(A) $(0, 2)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(3, 0)$ (D) $(0, 3)$

15. रैखिक समीकरण $y = x$ का आलेख निम्नलिखित बिंदु से होकर जाता है

(A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ (B) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ (C) $(1, 1)$ (D) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

16. यदि हम किसी रैखिक समीकरण को एक शून्येतर संख्या से गुणा करें या भाग दें तो उस रैखिक समीकरण का हल

(A) बदल जाता है

(B) वही रहता है

(C) केवल गुणा की स्थिति में बदल जाता है

(D) केवल भाग की स्थिति में बदल जाता है

17. $x = 1$ और $y = 2$ द्वारा x और y में कितनी रैखिक समीकरण संतुष्ट होती हैं?

(A) केवल एक (B) दो

(C) अपरिमित रूप से अनेक (D) तीन

18. (a, a) रूप का बिंदु सदैव स्थित होता है

(A) x-अक्ष पर (B) y-अक्ष पर

(C) रेखा $y = x$ पर (D) रेखा $x + y = 0$ पर

19. $(a, -a)$ रूप का बिंदु सदैव रेखा पर स्थित होता है

(A) $x = a$ (B) $y = -a$ (C) $y = x$ (D) $x + y = 0$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $ax + by + c = 0$, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, दो चरों में एक रैखिक समीकरण है

(ii) रैखिक समीकरण $2x + 3y = 5$ का एक अद्वितीय हल है

(iii) सभी बिंदु $(2, 0), (-3, 0), (4, 2)$ और $(0, 5)$; x-अक्ष पर स्थित हैं

(iv) y-अक्ष के समांतर और y-अक्ष के बाईं ओर 4 मात्रक दूरी पर स्थित रेखा को समीकरण $x = -4$ से निरूपित किया जाता है

(v) समीकरण $y = mx + c$ का आलेख मूलबिंदु से होकर जाता है

हल :

(i) असत्य, क्योंकि $ax + by + c = 0$ दो चरों में रैखिक समीकरण होती है, यदि a और b दोनों शून्येतर हों।

(ii) असत्य, क्योंकि दो चरों वाली रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

(iii) असत्य, क्योंकि बिंदु $(2, 0), (-3, 0)$ x-अक्ष पर स्थित हैं। $(4, 2)$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है और $(0, 5)$ y-अक्ष पर स्थित है।

(iv) सत्य, क्योंकि y-अक्ष के समांतर और y-अक्ष के बाईं ओर a मात्रक दूरी पर रेखा की समीकरण $x = -a$ के रूप की होती है।

(v) असत्य, क्योंकि $x = 0, y = 0$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित कथन **सत्य** है या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

सारणी

x	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10

से प्राप्त होने वाले बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $2x + 2 = y$ के कुछ हलों को निरूपित करते हैं।

हल : सत्य, क्योंकि निर्देशांकों को देखने से पता लगता है कि प्रत्येक y-निर्देशांक, x-निर्देशांक के दोगुने से 2 अधिक है।

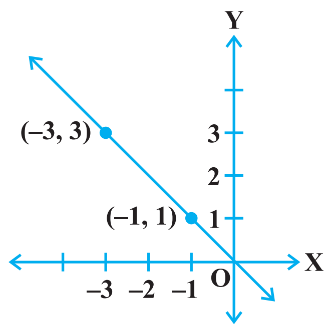
प्रश्नावली 4.2

*निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए –*

1. बिंदु (0, 3) रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ के आलेख पर स्थित है।

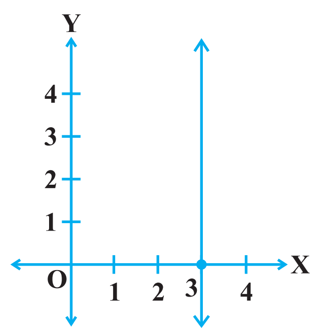
2. रैखिक समीकरण $x + 2y = 7$ का आलेख बिंदु (0, 7) से होकर जाता है।

3. नीचे दिया गया आलेख रैखिक समीकरण $x + y = 0$ को निरूपित करता है:



आकृति 4.1

4. नीचे दिया गया आलेख रैखिक समीकरण $x = 3$ (देखिए आकृति 4.2) को निरूपित करता है:



आकृति 4.2

5. सारणी

x	0	1	2	3	4
$.y$	2	3	4	–5	6

से प्राप्त बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $x – y + 2 = 0$ के कुछ हलों को निरूपित करते हैं।

6. दो चरों वाली रैखिक समीकरण के आलेख का प्रत्येक बिंदु उस समीकरण का एक हल निरूपित नहीं करता है।

7. दो चरों वाली रैखिक समीकरण के आलेख का एक सरल रेखा होना आवश्यक नहीं है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को काटता है।

हल : रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख x-अक्ष को उस बिंदु पर काटता है जहाँ $y = 0$ है।

रैखिक समीकरण में, $y = 0$ रखने पर, हमें $3x = 12$, अर्थात् $x = 4$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (4, 0) है।

रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख y-अक्ष को उस बिंदु पर काटता है, जहाँ $x = 0$ है। दी हुई समीकरण में, $x = 0$ रखने पर, हमें $4y = 12$, अर्थात् $y = 3$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (0, 3) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : रैखिक समीकरण $x + y = 5$ का आलेख उस रेखा को किस बिंदु पर काटता है जो y-अक्ष के समांतर है, मूलबिंदु से 2 मात्रक की दूरी पर है तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा में है।

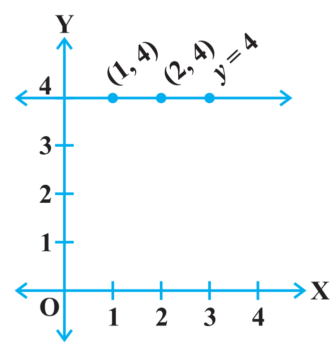
हल : उस रेखा पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक, जो y-अक्ष के समांतर हैं, मूलबिंदु से 2 मात्रक की दूरी पर हैं तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा में हैं, $(2, a)$ के रूप के होंगे। समीकरण $x + y = 5$ में, $x = 2$ और $y = a$ रखने पर, $a = 3$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (2, 3) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : समीकरण $2x + 5y = 20$ के आलेख पर वह बिंदु निर्धारित कीजिए जिसका x-निर्देशांक कोटि का $\frac{5}{2}$ गुना है।

हल : क्योंकि बिंदु का x-निर्देशांक उसकी कोटि का $\frac{5}{2}$ गुना है, इसलिए $x = \frac{5}{2}y$ है। अब, $2x + 5y = 20$ में, $x = \frac{5}{2}y$ रखने पर, हमें $y = 2$ प्राप्त होता है। अत: $x = 5$ है। इसलिए, वाँछित बिंदु (5, 2) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : उस सरल रेखा से निरूपित समीकरण का आलेख खींचिए जो x-अक्ष के समांतर है तथा उससे 4 मात्रक ऊपर है।

हल : x-अक्ष के समांतर कोई भी सरल रेखा $y = k$ के रूप की होती है, जहाँ k उस रेखा की x-अक्ष से दूरी होती है। यहाँ $k = 4$ है। अत:, रेखा की समीकरण $y = 4$ है। इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए, बिंदु (1, 4) और (2, 4) को आलेखित कीजिए और उन्हें मिलाकर एक रेखा खींचिए। यही वाँछित आलेख है (आकृति 4.3)।



आकृति 4.3

प्रश्नावली 4.3

1. एक ही कार्तीय तल में $y = x$ और $y = -x$ रैखिक समीकरणों के आलेख खींचिए। आप क्या देखते हैं?

2. रैखिक समीकरण $2x + 5y = 19$ के आलेख पर वह बिंदु निर्धारित कीजिए जिसकी कोटि अपने भुज की $1\frac{1}{2}$ गुनी है।

3. उस सरल रेखा से निरूपित समीकरण का आलेख खींचिए जो x-अक्ष के समांतर है और उसके नीचे 3 मात्रक की दूरी पर है।

4. उस रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए जिसके हल उन बिंदुओं से निरूपित हैं, जिनके निर्देशांकों का योग 10 इकाई है।

5. वह रैखिक समीकरण लिखिए, जिसके आलेख के प्रत्येक बिंदु की कोटि उसकी भुज की तीन गुनी है।

6. यदि बिंदु (3, 4) समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

7. समीकरण $2x + 1 = x - 3$ के निम्नलिखित पर कितने हल स्थित हैं:

(i) संख्या रेखा (ii) कार्तीय तल

8. रैखिक समीकरण $x + 2y = 8$ का वह हल ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित पर एक बिंदु निरूपित करता है :

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

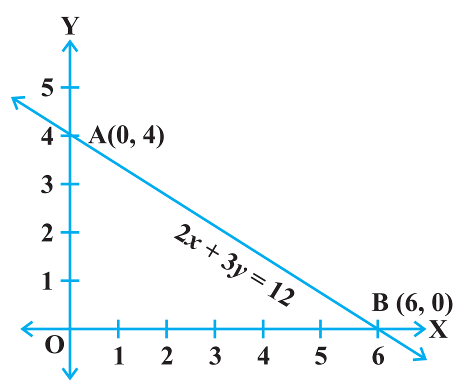
9. c के किस मान के लिए, रैखिक समीकरण $2x + cy = 8$ के हल में x और y के मान बराबर होंगे?

10. मान लीजिए कि y, x के अनुक्रमानुपाती है। यदि $x = 4$ होने पर $y = 12$ हो, तो एक रैखिक समीकरण लिखिए। जब $x = 5$ है, तो y का क्या मान है?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : रैखिक समीकरण $2x + 3y = 12$ का आलेख खींचिए। इस समीकरण का आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को किन बिंदुओं पर काटता है?

हल : दी हुई समीकरण $2x + 3y = 12$ है। इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए, हमें आलेख पर स्थित न्यूनतम दो बिंदुओं की आवश्यकता है। समीकरण से, हमें $y = \frac{12-2x}{3}$ प्राप्त होता है। $x=0$ के लिए $y=4$ है। अतः, (0, 4) आलेख पर स्थित है। $y = 0$ के लिए $x = 6$ है। अतः, (6, 0) आलेख पर स्थित है। अब बिंदुओं A (0, 4) और B (6, 0) को आलेखित कीजिए तथा उन्हें मिला कर रेखा AB बना लीजिए (देखिए आकृति 4.4)। रेखा AB ही वाँछित आलेख है।



आकृति 4.4

आप देख सकते हैं कि यह आलेख (रेखा AB), x-अक्ष को (6, 0) और y-अक्ष को (0, 4) पर काटता है।

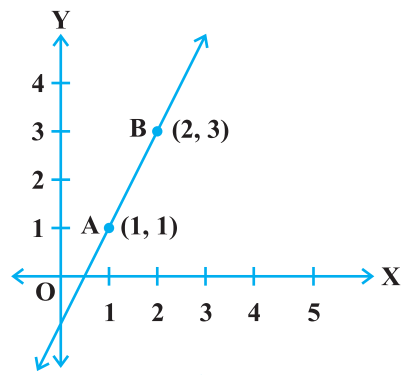
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यह सोचा गया कि x और y के निम्नलिखित मान एक रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं :

x	1	2
y	1	3

उपरोक्त सारणी में दिए x और y के मानों का प्रयोग करके, एक आलेख खींचिए। रैखिक समीकरण का यह आलेख निम्नलिखित को किस बिंदु पर काटता है?

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

हल : सारणी से, हमें दो बिंदु A (1, 1) और B (2, 3) प्राप्त होते हैं, जो रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित हैं। स्पष्टत: यह आलेख एक सरल रेखा होगा। अत:, हम पहले बिंदु A और B आलेखित करते हैं तथा उन्हें आकृति 4.5 में दर्शाए अनुसार मिला देते हैं।

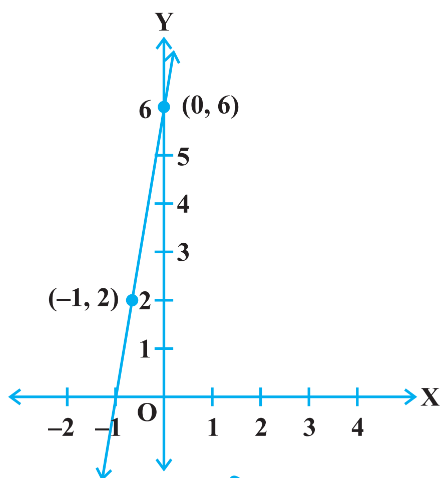


आकृति 4.5

आकृति 4.5 से, हम देखते हैं कि आलेख x-अक्ष को $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ तथा y-अक्ष को (0, –1) पर काटता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक शहर में, ऑटोरिक्शा का किराया पहले किलोमीटर के लिए 10 रु तथा उसके बाद की दूरी के लिए 4 रु प्रति किलोमीटर है। उपरोक्त कथन को व्यक्त करने के लिए, एक रैखिक समीकरण लिखिए। इस रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए।

हल : मान लीजिए कि कुल तय की गई दूरी x km है तथा लिया गया कुल किराया y रु है। तब पहले km का किराया 10 रु है तथा शेष $(x-1)$ km का किराया $4(x-1)$ रु है। अत:, $y = 10 + 4(x-1) = 4x + 6$ है।



आकृति 4.6

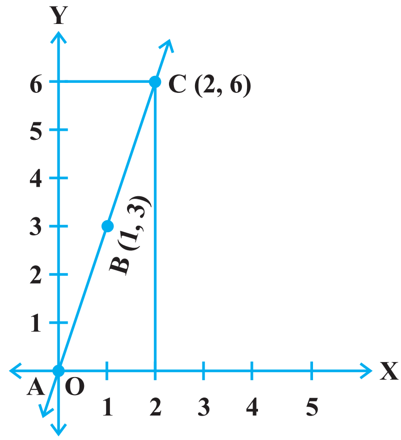
अर्थात्, वाँछित समीकरण $y = 4x + 6$ है। अब, जब $x = 0$, तो $y = 6$ है तथा जब $x = -1$, तो $y = 2$ है। वाँछित आलेख आकृति 4.6 में दिया गया है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : किसी पिंड पर एक अचर बल लगाने पर, उसके द्वारा किया गया कार्य उस अचर बल और बल की दिशा में पिंड द्वारा चली गई दूरी के गुणनफल के बराबर होता है। अचर बल 3 मात्रक लेते हुए, इस तथ्य को एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसका आलेख खींचिए। किया गया कार्य कितना है, जब चली गई दूरी 2 मात्रक है। इसे आलेख से सत्यापित कीजिए।

हल : किया गया कार्य = (अचर बल) × (दूरी)

= 3 × (दूरी),

अर्थात्, $y = 3x$ है, जहाँ y (मात्रक) किया गया कार्य है तथा x (मात्रक) चली गई दूरी है। क्योंकि $x = 2$ मात्रक (दिया) है, अत:, किया गया कार्य = 6 मात्रक है। रैखिक समीकरण $y = 3x$ का आलेख खींचने के लिए, हमें इस समीकरण के न्यूनतम दो हल चाहिए। हम देखते हैं कि $x = 0, y = 0$ इस समीकरण को संतुष्ट करता है तथा $x = 1, y = 3$ भी इस समीकरण को संतुष्ट करता है।



आकृति 4.7

अब, हम बिंदुओं A (0, 0) और B (1, 3) को आलेखित करते हैं तथा AB को मिला देते हैं (देखिए आकृति 4.7)। समीकरण का आलेख एक सरल रेखा है। [हमने पूरी रेखा नहीं दिखाई है, क्योंकि किया गया कार्य ऋणात्मक नहीं होगा]।

आलेख से सत्यापित करने के लिए, बिंदु (2, 0) से होकर x-अक्ष पर लम्ब खींचिए, जो आलेख को C पर काटता है। स्पष्टत:, C के निर्देशांक (2, 6) हैं। इसका अर्थ है कि किया गया कार्य 6 मात्रक है।

प्रश्नावली 4.4

1. दर्शाइए कि बिंदु A (1, 2), B (– 1, – 16) और C (0, – 7) रैखिक समीकरण $y = 9x – 7$ के आलेख पर स्थित हैं।

2. सोचा गया कि x और y के निम्नलिखित मान एक रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं:

x	6	–6
y	–2	6

वह रैखिक समीकरण लिखिए। उपरोक्त सारणी में दिए x और y के मानों का उपयोग करते हुए आलेख खींचिए। इस रैखिक समीकरण का आलेख निम्नलिखित को किस बिंदु पर काटता है?

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

3. रैखिक समीकरण $3x + 4y = 6$ का आलेख खींचिए। यह आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को किन बिंदुओं पर काटता है?

4. वह रैखिक समीकरण, जो फारेनहाइट (F) को सेल्सियस (C) में बदलती है, संबंध $C = \frac{5F - 160}{9}$ से दी जाती है।

(i) यदि तापमान 86°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या है?

(ii) यदि तापमान 35°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या है?

(iii) यदि तापमान 0°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या है तथा यदि तापमान 0°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या है?

(iv) तापमान का वह कौन-सा संख्यात्मक मान है जो दोनों पैमानों (मात्रकों) में एक ही है?

5. यदि एक द्रव का तापमान केल्विन मात्रकों में x°K है या फारेनहाइट मात्रकों में y°F है, तो तापमानों के मापन की दोनों पद्धतियों के बीच संबंध रैखिक समीकरण $y = \frac{9}{5}(x - 273) + 32$ द्वारा दिया जाता है।

(i) यदि किसी द्रव का तापमान 313°K है, तो उसका फारेनहाइट में तापमान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि तापमान 158° F है, तो केल्विन में तापमान ज्ञात कीजिए।

6. किसी गाड़ी को खींचने में लगाया गया बल उस गाड़ी (पिंड) में उत्पन्न किए गए त्वरण के अनुक्रमानुपाती है। इस कथन को दो चारों वाले एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए तथा अचर द्रव्यमान 6 kg लेकर, इसका आलेख खींचिए। आलेख से वाँछित बल ज्ञात कीजिए, जब उत्पन्न त्वरण (i) 5 m/sec^2 है, (ii) 6 m/sec^2 है।

अध्याय 5

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

बिंदु, रेखा, तल या पृष्ठ, अभिगृहीत, अभिधारणा और प्रमेय, एलीमेंट्स, प्राचीन भारत में अग्निकुंड या वेदियों के आकार, यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के समतुल्य रूपांतरण, अभिगृहीतों के एक निकाय की संगतता।

प्राचीन भारत

- वैदिक काल की ज्यामिति का उद्‌गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक विभिन्न प्रकार की वेदियों और अग्निकुंडों के निर्माण से हुआ। घरेलू धार्मिक क्रियाओं के लिए वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियों का प्रयोग होता था जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों के लिए आयतों, त्रिभुजों और समलंबों के समायोजनों के आकार की वेदियों के प्रयोग की आवश्यकता होती थी।

मिस्र, बेबीलोनिया और यूनान

- मिस्रवासियों ने सरल क्षेत्रफलों को परिकलित करने तथा सरल रचनाएँ करने के लिए अनेक ज्यामितीय तकनीक और नियम विकसित किए। बेबीलोनिया के निवासियों और मिस्रवासियों ने ज्यामितीय का प्रयोग अधिकांशतः व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए किया तथा इसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम कार्य किया। यूनानियों की रुचि अपने द्वारा खोजे गए कथनों की निगमन तर्कण द्वारा सत्यता स्थापित करने में थी। सर्वप्रथम ज्ञात उत्पत्ति प्रदान करने का श्रेय एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स को जाता है।

यूक्लिड के एलीमेंट्स

- लगभग 300 B.C. में यूक्लिड ने उस समय तक ज्ञात गणित को क्षेत्र के संपूर्ण ज्ञान को एकत्रित किया तथा उसे एलीमेंट्स नामक अपनी प्रसिद्ध कृति के रूप में व्यवस्थित किया। यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य मान लिया। ये सत्य मान ली गई कल्पनाएँ वास्तव में स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य हैं। उन्होंने उन्हें दो वर्गों में बाँटा।

अभिगृहीत

1. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।
2. यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
3. यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
4. वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, परस्पर बराबर होती हैं।
5. पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
6. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती हैं।
7. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की आधी हों, परस्पर बराबर होती हैं।

अभिधारणाएँ

1. एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।
2. एक सांत रेखा (रेखाखंड) को अनिश्चित रूप से विस्तृत किया जा सकता है।
3. किसी केंद्र और किसी त्रिज्या को लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
4. सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।
5. यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत:कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

यूक्लिड ने उन कल्पनाओं के लिए अभिधारणा शब्द का प्रयोग किया जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबद्ध थे तथा अन्य कल्पनाओं को उन्होंने अभिगृहीत कहा। एक **प्रमेय** वह गणितीय कथन होता है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित कर ली जाती है।

वर्तमान ज्यामिति

- एक गणित निकाय (पद्धति) में अभिगृहीत, परिभाषाएँ और अपरिभाषित शब्द निहित हैं।
- बिंदु, रेखा और तल को अपरिभाषित पदों के रूप में मान लिया गया है।
- अभिगृहीतों का कोई निकाय संगत (या अविरोधी) कहलाता है, यदि इन अभिगृहीतों तथा इनसे निगमित प्रमेयों में कोई विरोधाभास न हो।
- दो दिए हुए भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा जाती है।
- दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं हो सकते।
- प्लेफेयर अभिगृहीत (यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा का एक समतुल्य रूपांतरण)

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए–

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत (कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक में दिए क्रम के अनुसार) है।

(A) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।

(B) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण बराबर होते हैं।

(C) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल बराबर होते हैं।

(D) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों परस्पर बराबर होती हैं।

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा है

(A) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

(B) किसी केंद्र और किसी त्रिज्या को लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

(C) सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

(D) यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत:कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : वे वस्तुएँ, जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, होती हैं

(A) बराबर

(B) बराबर नहीं

(C) उसी वस्तु की आधी

(D) उसी वस्तु की दोगुनी

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : अभिगृहीत ऐसी कल्पनाएँ हैं, जो

(A) गणित की सभी शाखाओं में सर्वव्यापी सत्य हैं

(B) विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबद्ध सर्वव्यापी तथ्य हैं

(C) प्रमेय हैं

(D) परिभाषाएँ हैं

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : जॉन की आयु मोहन की आयु के बराबर है। राम की आयु वही है जो मोहन की है। यूक्लिड की वह अभिगृहीत बताइए जो जॉन और राम की आयु में संबंध स्पष्ट करती है।

(A) पहली अभिगृहीत (B) दूसरी अभिगृहीत

(C) तीसरी अभिगृहीत (D) चौथी अभिगृहीत

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 6 : यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग $120°$ हो, तो दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर, उस ओर परस्पर मिलेंगी जहाँ कोणों का योग होगा।

(A) $120°$ से कम (B) $120°$ से अधिक

(C) $120°$ के बराबर (D) $180°$ से अधिक

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 5.1

1. ठोसों से बिंदुओं तक तीन चरण हैं:

(A) ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु (B) ठोस-रेखाएँ-पृष्ठ-बिंदु

(C) रेखाएँ-बिंदु-पृष्ठ-ठोस (D) रेखाएँ-पृष्ठ-बिंदु-ठोस

2. एक ठोस की विमाओं की संख्या है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

3. एक पृष्ठ की विमाओं की संख्या है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

4. एक बिंदु की विमाओं की संख्या है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. यूक्लिड ने अपनी प्रसिद्ध कृति "एलीमेंट्स" को निम्नलिखित में विभाजित किया:

(A) 13 अध्याय (B) 12 अध्याय (C) 11 अध्याय (D) 9 अध्याय

6. एलीमेंट्स में साध्यों की कुल संख्या है:

(A) 465 (B) 460 (C) 13 (D) 55

7. ठोसों की परिसीमाएँ हैं:

(A) पृष्ठ (B) वक्र (C) रेखाएँ (D) बिंदु

8. पृष्ठों की परिसीमाएँ हैं:

(A) पृष्ठ (B) वक्र (C) रेखाएँ (D) बिंदु

9. सिन्धु घाटी सभ्यता (लगभग 300 B.C.) में निर्माण कार्य में प्रयुक्त ईंटों की विमाओं का अनुपात था

(A) 1 : 3 : 4 (B) 4 : 2 : 1 (C) 4 : 4 : 1 (D) 4 : 3 : 2

10. पिरामिड एक ठोस आकृति है जिसका आधार होता है:

(A) केवल त्रिभुज (B) केवल वर्ग

(C) केवल आयत (D) कोई भी बहुभुज

11. एक पिरामिड के पार्श्व फलक होते हैं:

(A) त्रिभुज (B) वर्ग (C) बहुभुज (D) समलंब

12. यह ज्ञात है कि यदि $x + y = 10$ हो, तो $x + y + z = 10 + z$ होगा। यूक्लिड की अभिगृहीत, जो इस कथन को स्पष्ट करती है, निम्नलिखित है:

(A) पहली अभिगृहीत (B) दूसरी अभिगृहीत
(C) तीसरी अभिगृहीत (D) चौथी अभिगृहीत

13. प्राचीन भारत में, घरेलू पूजा कार्य में प्रयोग की जाने वाली वेदियों के आकार होते थे:

(A) वर्ग और वृत्त (B) त्रिभुज और आयत
(C) समलंब और पिरामिड (D) आयत और वर्ग

14. (अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक दूसरे के साथ जुड़े अंतर्निहित समद्विबाहु त्रिभुजों की संख्या है:

(A) सात (B) आठ (C) नौ (D) ग्यारह

15. यूनानियों ने निम्नलिखित पर बल दिया:

(A) अगमन तर्कण (B) निगमन तर्कण
(C) A और B दोनों (D) ज्यामिति का व्यावहारिक प्रयोग

16. प्राचीन भारत में, आयतों, त्रिभुजों और समलंबों से संयोजित आकारों की वेदियाँ निम्नलिखित में प्रयोग होती थीं:

(A) सार्वजनिक पूजा स्थल (B) घरेलू पूजा कार्य
(C) A और B दोनों (D) A, B और C में से कोई नहीं

17. यूक्लिड निम्नलिखित देश का वासी था:

(A) बेबीलोनिया (B) मिस्र (C) यूनान (D) भारत

18. थेल्स निम्नलिखित देश का वासी था:

(A) बेबीलोनिया (B) मिस्र (C) यूनान (D) रोम

19. पाइथागोरस एक विद्यार्थी था:

(A) थेल्स का (B) यूक्लिड का
(C) A और B दोनों का (D) आर्कमिडीज का

20. निम्नलिखित में से किसको उपपत्ति की आवश्यकता है?

(A) प्रमेय (B) अभिगृहीत (C) परिभाषा (D) अभिधारणा

21. यूक्लिड के कथन, सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं, निम्नलिखित के रूप में दिया गया है

(A) एक अभिगृहीत (B) एक परिभाषा (C) एक अभिधारणा (D) एक उपपत्ति

22. 'रेखाएँ समांतर होती हैं, यदि वे प्रतिच्छेद नहीं करती' का कथन, निम्नलिखित के रूप में दिया गया है

(A) एक अभिगृहीत (B) एक परिभाषा (C) एक अभिधारणा (D) एक उपपत्ति

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) पिरामिड एक ठोस आकृति है, जिसका आधार एक त्रिभुज, एक वर्ग या कोई भी बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक समबाहु त्रिभुज होते हैं जो ऊपर एक बिंदु पर मिलते हैं।

(ii) वैदिक काल में, वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियाँ घरेलू पूजा के कार्यों में प्रयोग की जाती थीं जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों में ऐसी वेदियाँ प्रयोग की जाती थीं जिनका आकार आयतों, त्रिभुजों और समलंबों का संयोजन होता था।

(iii) ज्यामिति में हम बिंदु, रेखा और तल को अपरिभाषित पद मानते हैं।

(iv) यदि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर है और आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

(v) यूक्लिड की चौथी अभिगृहीत कहती है कि प्रत्येक वस्तु स्वयं के बराबर होती है।

(vi) यूक्लिडीय ज्यामिति केवल समतल (तल) में स्थित आकृतियों के लिए ही मान्य है।

हल :

(i) असत्य। पिरामिड के पार्श्वफलक त्रिभुज होते हैं और इनका समबाहु त्रिभुज होना आवश्यक नहीं है।

(ii) सत्य। वैदिक काल की ज्यामिति का उद्‌गम वैदिक पूजा के कार्यों को करने के लिए वेदियों और अग्निकुंडों के निर्माण से हुआ। पवित्र अग्नियों के स्थान उनके आकारों और क्षेत्रफलों के बारे में स्पष्ट रूप से निर्धारित अनुदेशों के अनुसार होते थे।

(iii) सत्य। एक बिंदु, एक रेखा और एक तल को परिभाषित करने के लिए हमें अनेक अन्य वस्तुओं को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है, जिससे परिभाषाओं की एक लंबी शृंखला प्राप्त होती है जिसका कोई अंत नहीं है। इन्हीं कारणवश, गणितज्ञ इन ज्यामितीय पदों को अपरिभाषित मानने के लिए सहमत हो गए।

(iv) सत्य। वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों बराबर होती हैं।

(v) सत्य। यह अध्यारोपण के सिद्धांत का औचित्य है।

(vi) सत्य। यह वक्रीय पृष्ठों पर कार्य नहीं करती है। उदाहरणार्थ, वक्रीय पृष्ठों पर, त्रिभुज के कोणों का योग $180°$ से अधिक हो सकता है।

प्रश्नावली 5.2

*निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. यूक्लिडीय ज्यामिति केवल वक्र पृष्ठों के लिए ही मान्य है।

2. ठोसों की परिसीमाएँ वक्र होती हैं।

3. एक पृष्ठ के किनारे वक्र होते हैं।

4. वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों परस्पर बराबर होती हैं।

5. यदि एक राशि B एक अन्य राशि A का एक भाग है, तो A को B और एक अन्य राशि C के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

6. वे कथन जिन्हें सिद्ध किया जाता है अभिगृहीत कहलाते हैं।

7. कथन "प्रत्येक रेखा l और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा का अस्तित्व है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है" प्लेफेयर अभिगृहीत कहलाता है।

8. दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

9. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को अन्य अभिधारणाओं और अभिगृहीतों का प्रयोग करते हुए, सिद्ध करने के प्रयासों के फलस्वरूप अन्य अनेक ज्यामितियों की खोज हुई।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : राम और रवि का एक ही भार है। यदि दोनों में से प्रत्येक का भार 2 kg बढ़ जाता है, तो उनके नए भारों की तुलना कैसे होगी?

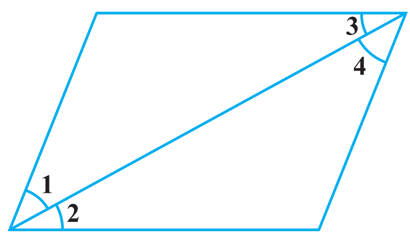
हल : मान लीजिए कि राम और रवि में से प्रत्येक का भार x kg है। 2 kg भार बढ़ने पर, प्रत्येक का भार $(x + 2)$ हो जाएगा। यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत के अनुसार, जब बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाता है, तो पूर्ण बराबर होते हैं। अत:, राम और रवि के भार पुन: बराबर होंगे।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : समीकरण $a - 15 = 25$ को हल कीजिए तथा बताइए कि आप यहाँ कौन सी अभिगृहीत का प्रयोग कर रहे हैं।

हल : $a - 15 = 25$ के दोनों पक्षों में 15 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है : $a - 15 + 15 = 25 + 15 = 40$ (यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत द्वारा)।

या $a = 40$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 5.1 में, यदि $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ और $\angle 3 = \angle 4$ है, तो यूक्लिड की एक अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, $\angle 1$ और $\angle 2$ में संबंध लिखिए।

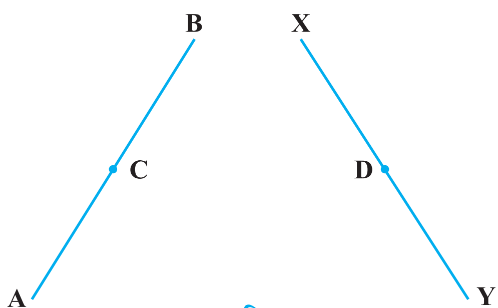


आकृति 5.1

हल : यहाँ $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$ और $\angle 2 = \angle 4$ है। यूक्लिड की पहली अभिगृहीत कहती है कि वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों परस्पर बराबर होती हैं।

अत:, $\angle 1 = \angle 2$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : आकृति 5.2 में, हमें प्राप्त है: AC = XD, C, AB का मध्य-बिंदु है तथा D, XY का मध्य-बिंदु है। यूक्लिड अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि AB = XY है।



आकृति 5.2

हल : AB = 2AC (C, AB का मध्य-बिंदु है)

XY = 2AD (D, XY का मध्य-बिंदु है)

साथ ही, AC = XD (दिया है)

अत:, AB = XY , क्योंकि वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती हैं।

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रश्न को उपयुक्त यूक्लिड की अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, हल कीजिए:

1. दो सेल्समैन ने अगस्त के महीने में बराबर बिक्री की। सितंबर में, प्रत्येक सेल्समैन अपनी बिक्री अगस्त के महीने की बिक्री की दोगुनी कर लेता है। दोनों की सितंबर की बिक्रियों की तुलना कीजिए।

2. यह ज्ञात है कि $x + y = 10$ और $x = z$ है। दर्शाइए कि $z + y = 10$ है।

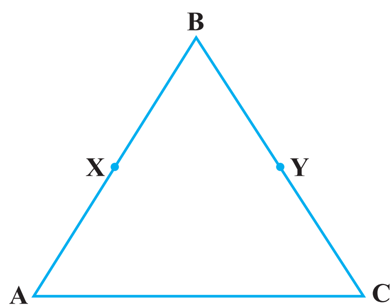
3. आकृति 5.3 को देखिए। दर्शाइए AH > AB + BC + CD है।

आकृति 5.3

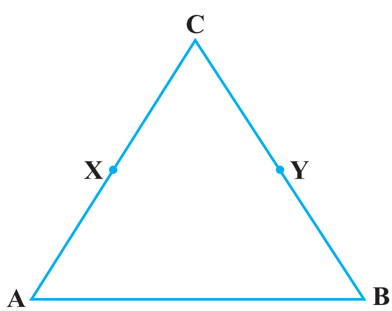
4. आकृति 5.4 में, हमें प्राप्त है:

AB = BC, BX = BY। दर्शाइए कि AX = CY है।

5. आकृति 5.5 में, X और Y क्रमश: AC और BC के मध्य-बिंदु हैं तथा AX = CY है। दर्शाइए कि AC = BC है।



आकृति 5.4



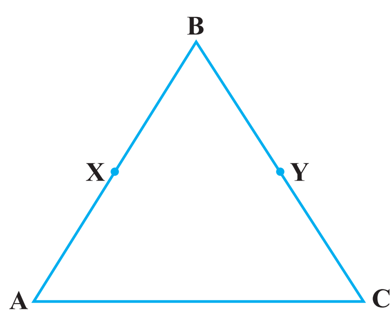
आकृति 5.5

6. आकृति 5.6 में, हमें प्राप्त है:

$BX = \frac{1}{2} AB$

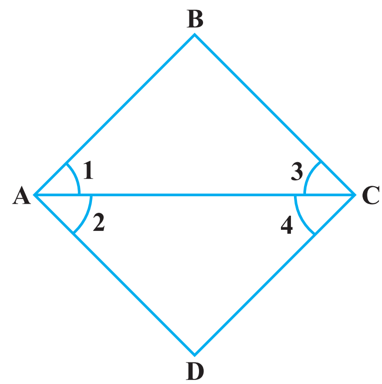
$BY = \frac{1}{2} BC$ तथा AB = BC है। दर्शाइए कि

BX = BY है।



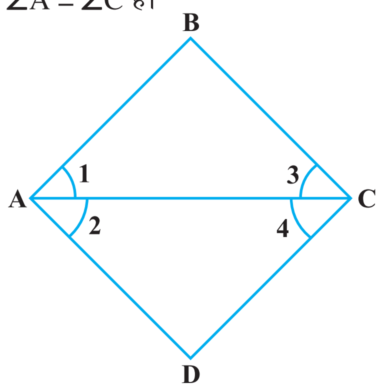
आकृति 5.6

7. आकृति 5.7 में, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 2 = \angle 3$ है। दर्शाइए कि $\angle 1 = \angle 3$ है।



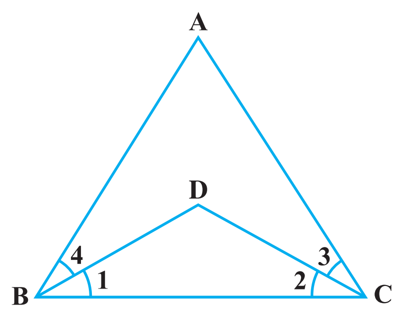
आकृति 5.7

8. आकृति 5.8 में, $\angle 1 = \angle 3$ और $\angle 2 = \angle 4$ है। दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ है।



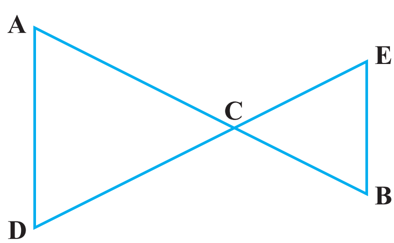
आकृति 5.8

9. आकृति 5.9 में, $\angle ABC = \angle ACB$ और $\angle 3 = \angle 4$ है। दर्शाइए कि $\angle 1 = \angle 2$ है।



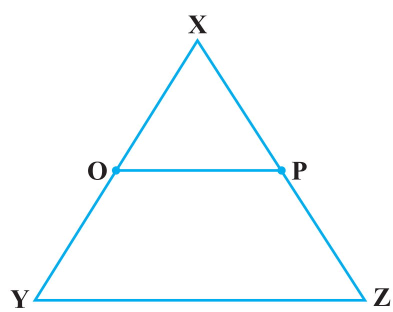
आकृति 5.9

10. आकृति 5.10 में AC = DC और CB = CE है। दर्शाइए कि AB = DE है।



आकृति 5.10

11. आकृति 5.11 में, यदि $OX = \frac{1}{2} XY$, $PX = \frac{1}{2} XZ$ और OX = PX हो, तो दर्शाइए कि XY = XZ है।

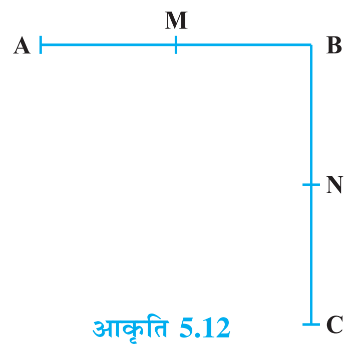


आकृति 5.11

12. आकृति 5.12 में,

(i) AB = BC, M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है और N रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि AM = NC है।

(ii) BM = BN है, M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है तथा N रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि AB = BC है।



आकृति 5.12

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन को पढ़िए:

"एक वर्ग चार रेखाखंडों से बना एक बहुभुज है, जिसमें से तीन रेखाखंडों की लंबाइयाँ चौथे रेखाखंड की लंबाई के बराबर है तथा इसके सभी कोण समकोण हैं।"

इस परिभाषा में, उन पदों को परिभाषित कीजिए जिन्हें आप आवश्यक अनुभव करते हैं। क्या इनमें कुछ अपरिभाषित पद हैं? क्या आप इसका औचित्य दे सकते हैं कि एक वर्ग के सभी कोण और भुजाएँ बराबर होती हैं?

हल : परिभाषित किए जाने वाले पद हैं:

बहुभुज	:	तीन या अधिक रेखाखंड से बनी एक सरल बंद आकृति
रेखाखंड	:	रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों
रेखा	:	अपरिभाषित पद
बिंदु	:	अपरिभाषित पद
कोण	:	उभयनिष्ठ शीर्ष वाली दो किरणों से बनी आकृति
किरण	:	रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो
समकोण	:	कोण जिसकी माप 90° है।

अपरिभाषित पद जिनका प्रयोग हुआ है : रेखा, बिंदु

यूक्लिड की चौथी अभिधारणा कहती है कि "सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।"

एक वर्ग में सभी कोण समकोण होते हैं। अतः चारों कोण बराबर हैं। (यूक्लिड की चौथी अभिधारणा से)

तीन रेखाखंड चौथे रेखाखंड के बराबर हैं। (दिया है)

अतः वर्ग की सभी चारों भुजाएँ बराबर होंगी। (यूक्लिड की प्रथम अभिगृहीत से "वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।")

प्रश्नावली 5.4

1. निम्नलिखित कथन को पढ़िए :

एक समबाहु त्रिभुज तीन रेखाखंडों से बना एक बहुभुज है जिनमें से दो रेखाखंड तीसरे रेखाखंड के बराबर हैं तथा इसका प्रत्येक कोण $60°$ का है।

इस परिभाषा में, उन पदों को परिभाषित कीजिए जिन्हें आप आवश्यक समझते हैं। क्या इसमें कोई अपरिभाषित पद है? क्या आप इसका औचित्य दे सकते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण और सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

2. निम्नलिखित कथन का अध्ययन कीजिए:

"दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा पर लंब नहीं हो सकती हैं।"

जाँच कीजिए कि क्या यह कथन यूक्लिड पाँचवीं अभिधारणा का समतुल्य रूपांतरण है। [**संकेत :** उपरोक्त कथन में, दो प्रतिच्छेदी रेखा l और m तथा एक अन्य रेखा n की पहचान कीजिए।]

3. निम्नलिखित कथनों को अभिगृहीत माना गया है:

(i) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो संगत कोण आवश्यक रूप से बराबर नहीं होते हैं।

(ii) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो एकांतर अंत:कोण बराबर होते हैं।

क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत (अविरोधी) है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. निम्नलिखित कथनों को अभिगृहीत माना गया है:

(i) यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर नहीं होते हैं।

(ii) यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार प्राप्त दोनों आसन्न कोणों का योग $180°$ होता है।

क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत है?

5. निम्नलिखित अभिगृहीतों को पढ़िए:

(i) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं

(ii) यदि बराबर को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण बराबर होते हैं

(iii) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती है

जाँच कीजिए कि क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत है या असंगत है।

अध्याय 6

रेखाएँ और कोण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण, रैखिक युग्म, शीर्षाभिमुख कोण।

- यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोण संपूरक होते हैं तथा इसका विलोम।
- यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
- यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो
  (i) संगत कोण बराबर होते हैं तथा इसका विलोम।
  (ii) एकांतर अंत:कोण बराबर होते हैं तथा इसका विलोम।
  (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण संपूरक होते हैं तथा इसका विलोम।
- एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
- त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।
- त्रिभुज का एक बहिष्कोण दोनों संगत अंत: अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली एक तिर्यक रेखा के एक ही ओर के दोनों अंत:कोण 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो दोनों कोणों में बड़ा कोण है

(A) 54° (B) 108° (C) 120° (D) 136°

हल : उत्तर (B)

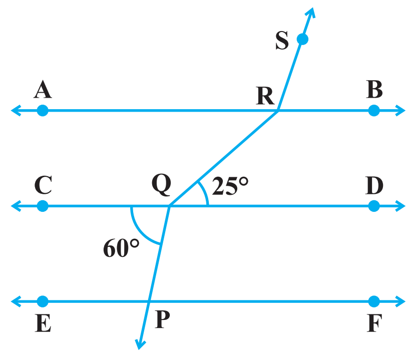
प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर लिखिए –

1. आकृति 6.1 में, यदि AB || CD || EF, PQ || RS, ∠RQD = 25° और ∠CQP = 60° है, तो ∠QRS बराबर है

(A) 85° (B) 135°

(C) 145° (D) 110°



आकृति 6.1

2. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज है एक

(A) समद्विबाहु त्रिभुज

(B) अधिककोण त्रिभुज

(C) समबाहु त्रिभुज

(D) समकोण त्रिभुज

3. एक त्रिभुज का एक बहिष्कोण 105° है तथा उसके दोनों अंत: विपरीत कोण बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक बराबर कोण है

(A) $37\frac{1}{2}°$ (B) $52\frac{1}{2}°$ (C) $72\frac{1}{2}°$ (D) 75°

4. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 5 : 3 : 7 है। वह त्रिभुज है एक

(A) न्यूनकोण त्रिभुज (B) अधिक कोण त्रिभुज

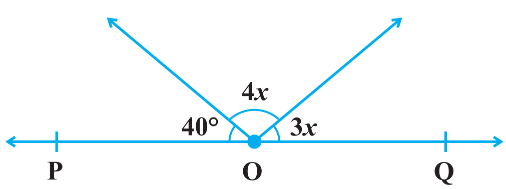
(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज

5. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण 130° है, तो अन्य दोनों कोणों के समद्विभाजकों के बीच का कोण हो सकता है

(A) 50° (B) 65° (C) 145° (D) 155°

6. आकृति 6.2 में, POQ एक रेखा है। x का मान है

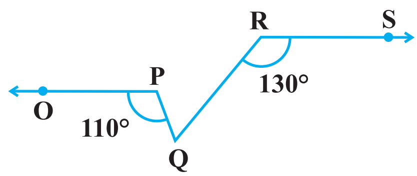
(A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 35°



आकृति 6.2

7. आकृति 6.3 में, यदि OP||RS, $\angle OPQ = 110°$ और $\angle QRS = 130°$ है, तो $\angle PQR$ बराबर है

(A) 40° (B) 50° (C) 60° (D) 70°



आकृति 6.3

8. एक त्रिभुज के कोण 2 : 4 : 3 के अनुपात में हैं। त्रिभुज का सबसे छोटा कोण है

(A) 60° (B) 40° (C) 80° (D) 20°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : मान लीजिए कि OA, OB, OC और OD वामावर्त दिशा में ऐसी किरणें हैं कि $\angle AOB = \angle COD = 100°$, $\angle BOC = 82°$ तथा $\angle AOD = 78°$ है। क्या यह कहना सत्य है कि AOC और BOD रेखाएँ हैं।

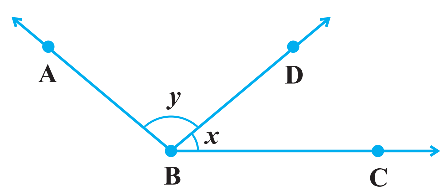
हल : AOC एक रेखा नहीं है, क्योंकि $\angle AOB + \angle COB = 100° + 82° = 182°$ है, जो 180° के बराबर नहीं है। इसी प्रकार, BOD भी एक रेखा नहीं है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि इसके एक ही ओर के दोनों अंत:कोण बराबर हैं। क्या दोनों रेखाएँ सदैव समांतर होंगी? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : व्यापक रूप में, दोनों रेखाएँ समांतर नहीं होंगी क्योंकि दोनों बराबर कोणों का योग सदैव 180° नहीं होगा। ये रेखाएँ तभी समांतर होंगी जब दोनों बराबर कोण 90° हों।

प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.4 में, $x + y$ के किस मान के लिए ABC एक रेखा होगी? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।



आकृति 6.4

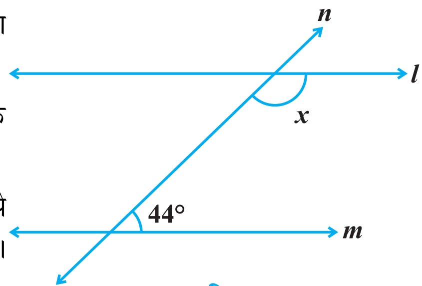
2. क्या किसी त्रिभुज के सभी कोण 60° से कम हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

3. क्या किसी त्रिभुज के दो अधिक कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

4. कोणों 45°, 64° और 72° वाले कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

5. कोणों 53°, 64° और 63° वाले कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

6. आकृति 6.5 में, x का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए l और m समांतर होंगे।

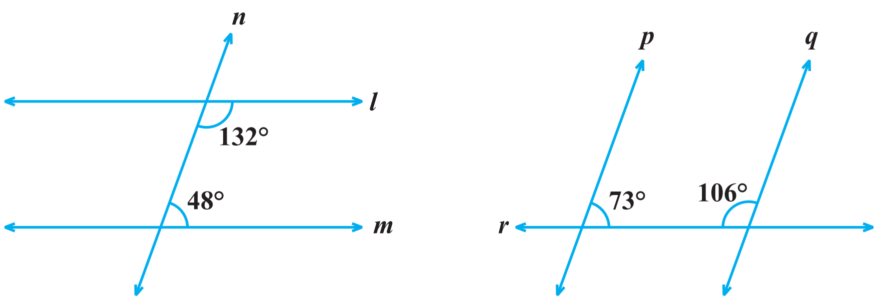


आकृति 6.5

7. दो आसन्न कोण बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि ये दोनों कोण समकोण हों? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

8. यदि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से बना एक कोण समकोण है, तो अन्य तीन कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

9. आकृति 6.6 में, कौन-सी दो रेखाएँ समांतर हैं और क्यों?

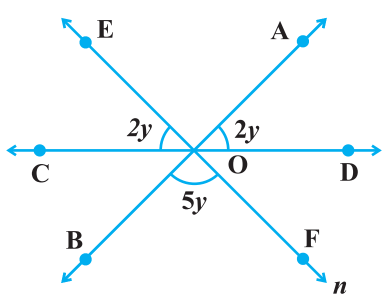


आकृति 6.6

10. दो रेखाएँ l और m एक ही रेखा n पर लंब हैं। क्या l और m परस्पर लंब हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 6.7 में, तीन रेखाएँ AB, CD और EF बिंदु O पर संगामी हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.7

हल : $\angle AOE = \angle BOF = 5y$
(शीर्षाभिमुख कोण)

साथ ही, $\angle COE + \angle AOE + \angle AOD = 180°$

इसलिए, $2y + 5y + 2y = 180°$

या, $9y = 180°$, जिससे $y = 20°$ प्राप्त होता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 6.8 में, $x = y$ और $a = b$ है। सिद्ध कीजिए कि $l \parallel n$ है।

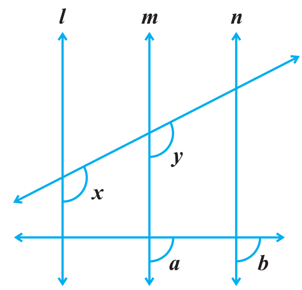
हल : $x = y$ (दिया है)

इसलिए, $l \parallel m$ (संगत कोण) (1)

साथ ही, $a = b$ (दिया है)

इसलिए, $n \parallel m$ (संगत कोण) (2)

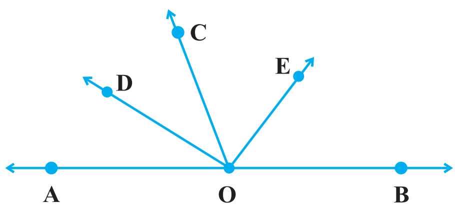
(1) और (2) से, $l \parallel n$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)



आकृति 6.8

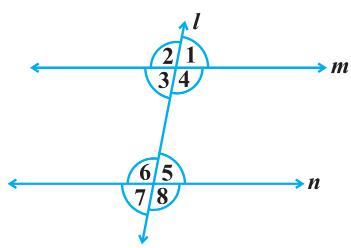
प्रश्नावली 6.3

1. आकृति 6.9 में, OD कोण ∠AOC का समद्विभाजक है, OE कोण ∠BOC का समद्विभाजक है तथा OD ⊥ OE है। दर्शाइए कि A, O और B संरेख हैं।



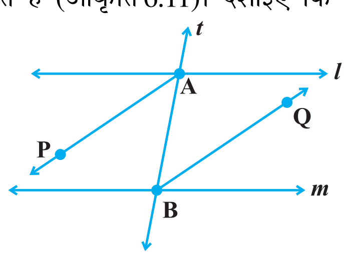
आकृति 6.9

2. आकृति 6.10 में, ∠1 = 60° और ∠6 = 120° है। दर्शाइए कि m और n समांतर हैं।



आकृति 6.10

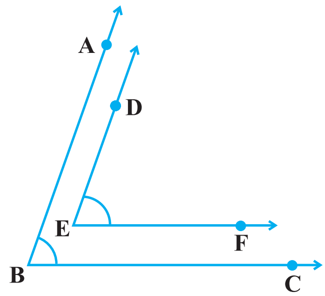
3. AP और BQ उन दो एकांतर अंत:कोणों के समद्विभाजक हैं जो समांतर रेखाओं l और m के तिर्यक रेखा t द्वारा प्रतिच्छेद से बनते हैं (आकृति 6.11)। दर्शाइए कि AP ∥ BQ है।



आकृति 6.11

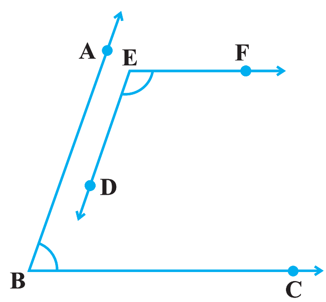
4. यदि आकृति 6.11 में, एकांतर अंत:कोणों के समद्विभाजक AP और BQ समांतर हैं, तो दर्शाइए कि $l \parallel m$ है।

5. आकृति 6.12 में, BA || ED और BC || EF है। दर्शाइए कि $\angle ABC = \angle DEF$ है।
[**संकेत :** DE को आगे बढ़ाइए ताकि वह BC को, मान लीजिए P पर प्रतिच्छेद करें।]



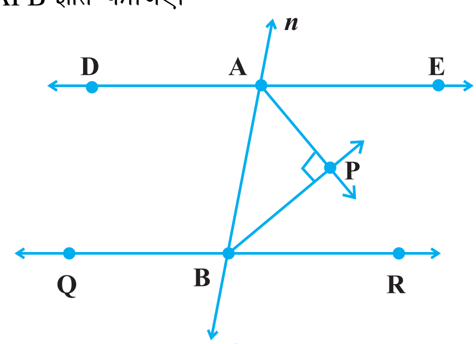
आकृति 6.12

6. आकृति 6.13 में, BA || ED और BC || EF है। दर्शाइए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180°$ है।



आकृति 6.13

7. आकृति 6.14 में, DE || QR तथा AP और BP क्रमशः कोणों $\angle EAB$ और $\angle RBA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle APB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.14

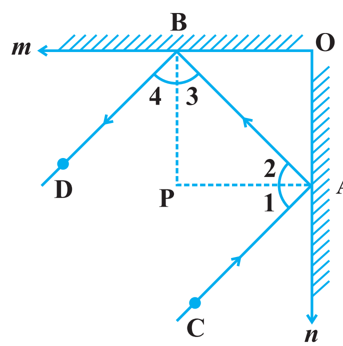
8. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2 : 3 : 4 है। इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

9. एक त्रिभुज ABC का कोण A समकोण है। BC पर L एक बिंदु इस प्रकार है कि $AL \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAL = \angle ACB$ है।

10. दो रेखाएँ क्रमश: दो समांतर रेखाओं पर लंब हैं। दर्शाइए कि ये दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर हैं।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 6.15 में, *m* और *n* दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लंब हैं। दर्शाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समांतर है।



आकृति 6.15

हल : मान लीजिए कि A और B पर अभिलंब P पर मिलते हैं।

क्योंकि दर्पण परस्पर लंब हैं, इसलिए BP ‖ OA और AP ‖ OB है।

अत:, $BP \perp PA$, अर्थात् $\angle BPA = 90°$

इसलिए, $\angle 3 + \angle 2 = 90°$ (कोण योग गुण) (1)

अत:, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 4 = \angle 3$ (आपतन कोण=परावर्तन कोण)

अत:, $\angle 1 + \angle 4 = 90°$ [(1) से] (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$$

अर्थात्, $\angle CAB + \angle DBA = 180°$

अत:, CA ‖ BD

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

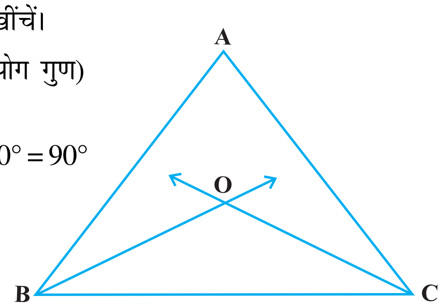
हल : कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में, प्रमेय 6.7 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक त्रिभुज ABC के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ है।

हल : आइए आकृति 6.16 में दर्शाए अनुसार आकृति खींचें।

$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$(त्रिभुज का कोण योग गुण)

अत:, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$



आकृति 6.16

अत:, $\frac{1}{2}\angle A + \angle OBC + \angle OCB = 90°$ (क्योंकि BO और CO क्रमश: ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं) (1)

परंतु $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$ (कोण योग गुण) (2)

(2) में से (1) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB - \frac{1}{2}\angle A - \angle OBC - \angle OCB = 180° - 90°$$

अर्थात्, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

प्रश्नावली 6.4

1. यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो सिद्ध कीजिए कि शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

2. ΔABC के अंत:कोण ∠B और बहिष्कोण ∠ACD के समद्विभाजक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BTC = \frac{1}{2}\angle BAC$ है।

3. एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने संगत कोणों के युग्म के समद्विभाजक समांतर होते हैं।

4. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए बिंदु से होकर, हम एक दी हुई रेखा पर केवल एक लंब ही खींच सकते हैं।

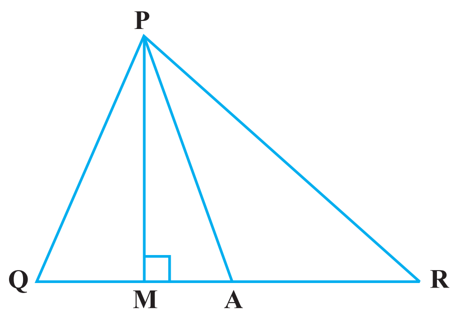
[**संकेत :** विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का प्रयोग कीजिए।]

5. सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ जो क्रमशः दो प्रतिच्छेदी रेखाओं पर लम्ब हो, परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

[**संकेत :** विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का प्रयोग कीजिए।]

6. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के कम से कम दो न्यूनकोण अवश्य होने चाहिए।

7. आकृति 6.17 में, $\angle Q > \angle R$, PA कोण $\angle QPR$ का समद्विभाजक है तथा $PM \perp QR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle APM = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$ है।



आकृति 6.17

अध्याय 7

त्रिभुज

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

त्रिभुज और उसके भाग, त्रिभुजों की सर्वांगसमता, सर्वांगसमता और शीर्षों की संगतता, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ (नियम) : (i) SAS (ii) ASA (iii) SSS (iv) RHS

ASA कसौटी की एक विशिष्ट स्थिति के रूप में AAS कसौटी।

- एक त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- एक त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
- दो दिए हुए बिंदु से समदूरस्थ एक बिंदु उन बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है।
- दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ एक बिंदु उन रेखाओं से बने कोणों के समद्विभाजकों पर स्थित होता है।
- किसी त्रिभुज में,
  - (i) बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी होती है।
  - (ii) लंबी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
  - (iii) किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है तथा ΔABC, ΔRPQ के सर्वांगसम नहीं है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है?

(A) BC = PQ (B) AC = PR (C) QR = BC (D) AB = PQ

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 7.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, सही उत्तर लिखिए –

1. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक कसौटी नहीं है?

(A) SAS (B) ASA (C) SSA (D) SSS

2. यदि AB = QR, BC = PR और CA = PQ है, तो

(A) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (B) $\Delta CBA \cong \Delta PRQ$

(C) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (D) $\Delta PQR \cong \Delta BCA$

3. ΔABC में, AB = AC और $\angle B = 50°$ है, तब $\angle C$ बराबर है

(A) 40° (B) 50° (C) 80° (D) 130°

4. ΔABC में, BC = AB और $\angle B = 80°$ है, तब $\angle A$ बराबर है

(A) 80° (B) 40° (C) 50° (D) 100°

5. ΔPQR में, $\angle R = \angle P$ तथा QR = 4 cm और PR = 5 cm है, तब PQ की लम्बाई है

(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 2 cm (D) 2.5 cm

6. D एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु इस प्रकार स्थित है कि AD कोण BAC को समद्विभाजित करता है। तब,

(A) BD = CD (B) BA > BD (C) BD > BA (D) CD > CA

7. यह दिया है कि $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ है तथा AB = 5 cm, $\angle B = 40°$ और $\angle A = 80°$ है। तब निम्नलिखित में से कौन सत्य है?

(A) DF = 5 cm, $\angle F = 60°$ (B) DF = 5 cm, $\angle E = 60°$

(C) DE = 5 cm, $\angle E = 60°$ (D) DE = 5 cm, $\angle D = 40°$

8. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5 cm और 1.5 cm हैं। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई निम्नलिखित नहीं हो सकती

(A) 3.6 cm (B) 4.1 cm (C) 3.8 cm (D) 3.4 cm

9. ΔPQR में, यदि $\angle R > \angle Q$ है, तो

(A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR

10. त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = AC, $\angle C = \angle P$ और $\angle B = \angle Q$ है। ये दोनों त्रिभुज हैं

(A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं (B) समद्विबाहु और सर्वांगसम

(C) सर्वांगसम परंतु समद्विबाहु नहीं (D) न तो सर्वांगसम और न ही समद्विबाहु

11. त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = FD तथा $\angle A = \angle D$ है। दोनों त्रिभुज SAS अभिगृहीत से सर्वांगसम होंगे, यदि

(A) BC = EF (B) AC = DE (C) AC = EF (D) BC = DE

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : दो त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = DE और AC = EF है। दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होने चाहिए, ताकि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : वाँछित दोनों कोण $\angle A$ और $\angle E$ हैं। जब $\angle A = \angle E$ है, तो SAS कसौटी से $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : त्रिभुजों ABC और DEF में, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और AB = EF है। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है क्योंकि AB और EF दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ नहीं हैं।

प्रश्नावली 7.2

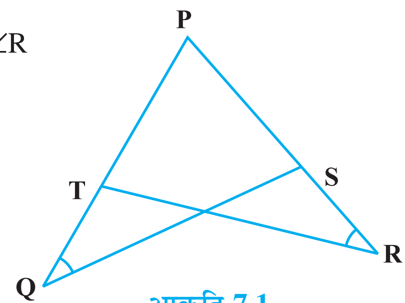
1. त्रिभुजों ABC और PQR में, $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। Δ PQR की कौन सी भुजा Δ ABC की भुजा AB के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
2. त्रिभुजों ABC और PQR में, $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। Δ PQR की कौन-सी भुजा Δ ABC की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. "यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए।" क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
4. "यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए।" क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
5. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 4 cm, 3 cm और 7 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
6. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ दिया हुआ है। क्या यह कहना सत्य है कि BC = QR है? क्यों?
7. यदि $\Delta PQR \cong \Delta EDF$ है, तो क्या यह कहना सत्य है कि PR = EF है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
8. Δ PQR में, $\angle P = 70°$ और $\angle R = 30°$ है। इस त्रिभुज की कौन-सी भुजा सबसे लंबी है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
9. AD किसी त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। क्या यह कहना सत्य है कि AB + BC + CA > 2 AD है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
10. M किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर स्थित एक बिंदु ऐसा है कि AM कोण BAC का समद्विभाजक है। क्या यह कहना सत्य है कि त्रिभुज का परिमाप 2 AM से अधिक है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

11. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 9 cm, 7 cm और 17 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

12. क्या भुजाओं की लंबाइयाँ 8 cm, 7 cm और 4 cm लेकर किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 7.1 में, PQ = PR और $\angle Q = \angle R$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQS \cong \Delta PRT$ है।



आकृति 7.1

हल : ΔPQS और ΔPRT में,

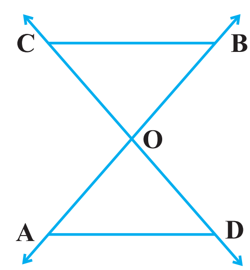
PQ = PR (दिया है)

$\angle Q = \angle R$ (दिया है)

तथा $\angle QPS = \angle RPT$ (एक ही कोण)

अतः, $\Delta PQS \cong \Delta PRT$ (ASA)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 7.2 में, दो रेखाएँ AB और CD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद इस प्रकार करती हैं कि BC || DA और BC = DA है। दर्शाइए कि बिंदु O दोनों ही रेखाखंडों AB और CD का मध्य-बिंदु है।



आकृति 7.2

हल : BC || AD (दिया है)

अतः, $\angle CBO = \angle DAO$ (एकांतर अंत:कोण)

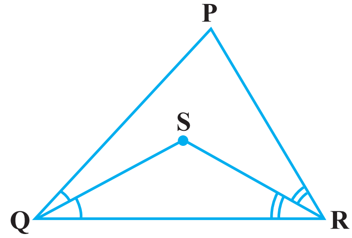
और $\angle BCO = \angle ADO$ (एकांतर अंत:कोण)

साथ ही, BC = DA (दिया है)

इसलिए, $\Delta BOC \cong \Delta AOD$ (ASA)

अतः, OB = OA और OC = OD है, अर्थात् O दोनों रेखाखंडों AB और CD का मध्य-बिंदु है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 7.3 में, PQ > PR है तथा QS तथा RS क्रमशः $\angle Q$ और $\angle R$ के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि SQ > SR है।



आकृति 7.3

हल : PQ > PR (दिया है)

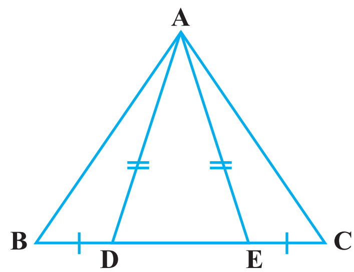
इसलिए, $\angle R > \angle Q$ (लंबी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।)

अतः, $\angle SRQ > \angle SQR$ (प्रत्येक कोण का आधा)

अतः, SQ > SR (बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी होगी।)

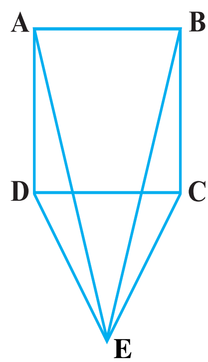
प्रश्नावली 7.3

1. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है तथा BD और CE इसकी दो माध्यिकाएँ हैं। दर्शाइए कि $BD = CE$ है।
2. आकृति 7.4 में, D और E त्रिभुज ABC की भुजा BC पर दो बिंदु इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = CE$ और $AD = AE$ है। दर्शाइए कि $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ है।



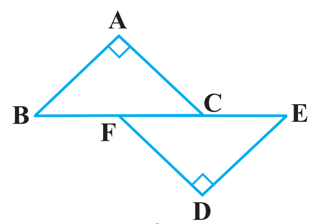
आकृति 7.4

3. CDE एक वर्ग ABCD की भुजा CD पर बना एक समबाहु त्रिभुज है (आकृति 7.5)। दर्शाइए कि $\Delta ADE \cong \Delta BCE$ है।



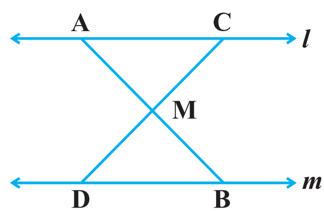
आकृति 7.5

4. आकृति 7.6 में, $BA \perp AC$ और $DE \perp DF$ इस प्रकार हैं कि $BA = DE$ और $BF = EC$ है। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।



आकृति 7.6

5. एक ΔPSR की भुजा SR पर एक बिंदु Q इस प्रकार स्थित है कि $PQ = PR$ है। सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$ है।
6. ΔPQR की भुजा QR पर S कोई बिंदु स्थित है। दर्शाइए कि $PQ + QR + RP > 2\ PS$ है।
7. $AB = AC$ वाले एक ΔABC की भुजा, AC पर D कोई बिंदु स्थित है। दर्शाइए कि $CD < BD$ है।
8. आकृति 7.7 में, $l \parallel m$ है तथा M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि M किसी भी रेखाखंड CD का मध्य-बिंदु है जिसके अंत:बिंदु क्रमश: l और m पर स्थित हैं।

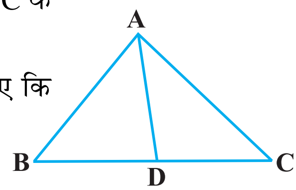


आकृति 7.7

9. $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। BO को एक बिंदु M तक बढ़ाया जाता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle MOC = \angle ABC$ है।

10. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ∠ABC के आसन्न एक बहिष्कोण ∠BOC के बराबर है।

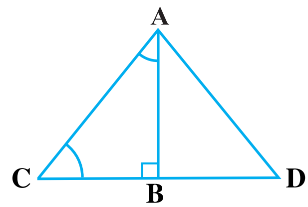
11. आकृति 7.8 में, AD कोण BAC का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB > BD है।



आकृति 7.8

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 7.9 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण B समकोण इस प्रकार है कि ∠BCA = 2 ∠BAC है। दर्शाइए कि कर्ण AC = 2 BC है।



आकृति 7.9

हल : CB को बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि BC = BD हो तथा AD को मिलाइए।

Δ ABC और Δ ABD में,

BC = BD (रचना से)

AB = AB (एक ही भुजा)

∠ABC = ∠ABD (प्रत्येक 90° है)

इसलिए, Δ ABC ≅ Δ ABD (SAS)

अत:, ∠CAB = ∠DAB } (CPCT) (1)

और AC = AD } (CPCT) (2)

इस प्रकार, ∠CAD = ∠CAB + ∠BAD = $x + x = 2x$ [(1) से] (3)

तथा ∠ACD = ∠ADB = $2x$ [(2) से, AC = AD] (4)

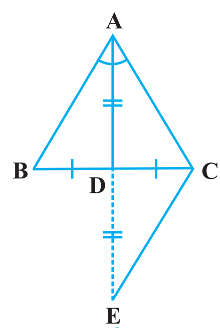
अर्थात् Δ ACD एक समबाहु त्रिभुज है। [(3) और (4) से]

या AC = CD, अर्थात्, AC = 2 BC (क्योंकि BC = BD)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हल : कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक की प्रमेय 7.1 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यदि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक उसकी सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करे, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।



आकृति 7.10

हल : हमें एक Δ ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार प्राप्त है कि ∠BAD = ∠CAD और BD = CD है (देखिए आकृति 7.10)। हमें

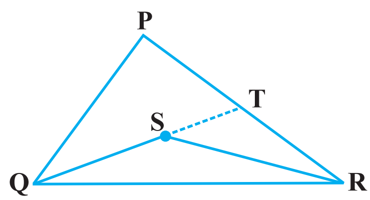
सिद्ध करना है कि AB = AC है।

AD को एक बिंदु E तक इस प्रकार बढ़ाइए कि AD = DE हो। अब CE को मिलाइए।

अब, Δ ABD और Δ ECD में, हमें प्राप्त है

	BD = CD	(दिया है)	
	AD = ED	(रचना से)	
तथा	$\angle$ADB = $\angle$EDC	(शीर्षाभिमुख कोण)	
अतः,	Δ ABD $\cong$ Δ ECD	(SAS)	
इसलिए,	AB = EC	(CPCT)	(1)
और	$\angle$BAD = $\angle$CED	(CPCT)	(2)
साथ ही,	$\angle$BAD = $\angle$CAD	(दिया है)	
अतः,	$\angle$CAD = $\angle$CED	[(2) से]	
इसलिए,	AC = EC	[बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ]	(3)
अतः,	AB = AC	[(1) और (3) से]	

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : S किसी त्रिभुज Δ PQR के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु है। दर्शाइए कि SQ + SR < PQ + PR है।



आकृति 7.11

हल : QS को PR से T पर प्रतिच्छेद करने के लिए बढ़ाइए (देखिए आकृति 7.11)।

Δ PQT से, हमें प्राप्त होता है:

PQ + PT > QT(किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है)

अर्थात्, PQ + PT > SQ + ST (1)

Δ TSR से, हमें प्राप्त होता है:

ST + TR > SR (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

PQ + PT + ST + TR > SQ + ST + SR

अर्थात्, PQ + PT + TR > SQ + SR

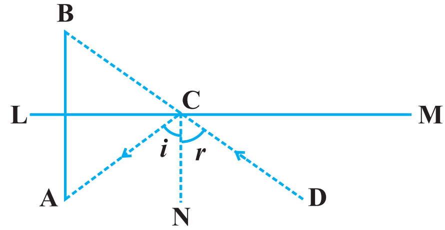
अर्थात्, PQ + PR > SQ + SR

या SQ + SR < PQ + PR

प्रश्नावली 7.4

1. एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

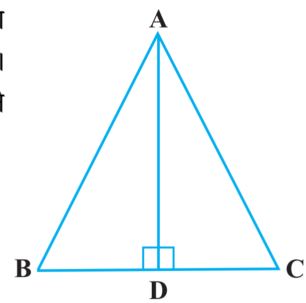
2. एक समतल दर्पण LM के सम्मुख स्थित बिंदु A पर रखी किसी वस्तु का प्रतिबिम्ब एक प्रेक्षक D से बिंदु B पर देखता है, जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिए कि यह प्रतिबिम्ब दर्पण के पीछे उतनी ही दूरी पर है जितनी दूरी पर वह वस्तु दर्पण के सम्मुख है।



आकृति 7.12

[**संकेत :** CN दर्पण पर अभिलंब है। साथ ही, आपतन कोण = परावर्तन कोण।]

3. AB = AC वाला ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है तथा D भुजा BC पर इस प्रकार स्थित है कि AD ⊥ BC है (आकृति 7.13)। ∠BAD = ∠CAD सिद्ध करने के लिए, किसी विद्यार्थी ने निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई:



आकृति 7.13

Δ ABD और Δ ACD में,

	AB = AC	(दिया है)
	∠B = ∠C	(क्योंकि AB = AC)
तथा	∠ADB = ∠ADC	(प्रत्येक 90°)
अत:,	Δ ABD ≅ Δ ACD	(AAS)
इसलिए,	∠BAD = ∠CAD	(CPCT)

उपरोक्त तर्कणों में क्या कमी है?

[**संकेत :** याद कीजिए कि जब AB = AC हो, तो ∠B = ∠C को कैसे सिद्ध किया जाता है।]

4. P कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित कोई बिंदु है। यदि P से होकर BA के समांतर खींची गई रेखा BC से Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि BPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AB = BC और AD = CD है। दर्शाइए कि BD दोनों कोणों ABC और ADC को समद्विभाजित करता है।

6. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। ∠A का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि BC = 2 AD है।

7. O एक वर्ग ABCD के अभ्यंतर में स्थित बिंदु इस प्रकार है कि OAB एक समबाहु त्रिभुज है। सिद्ध कीजिए कि Δ OCD एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

8. ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि बिंदु A और D आधार BC के विपरीत ओर स्थित हैं, AB = AC और DB = DC है। दर्शाइए कि AD रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक है।

9. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AC = BC है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर शीर्षलंब हैं। सिद्ध कीजिए कि AE = BD है।

10. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा की संगत माध्यिका के दोगुने से बड़ा होता है।

11. दर्शाइए कि एक चतुर्भुज ABCD में, AB + BC + CD + DA < 2 (BD + AC) होता है।

12. दर्शाइए कि एक चतुर्भुज ABCD में, AB + BC + CD + DA > AC + BD होता है।

13. एक त्रिभुज ABC में, D भुजा AC का मध्य-बिंदु है ताकि BD = $\frac{1}{2}$ AC है। दर्शाइए कि ∠ABC एक समकोण है।

14. एक समकोण त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि कर्ण के मध्य-बिंदु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाला रेखाखंड कर्ण का आधा होता है।

15. दो रेखाएँ l और m बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा P बिंदु O से होकर जाने वाली रेखा n पर स्थित कोई बिंदु इस प्रकार है कि P रेखाओं l और m से समदूरस्थ है। सिद्ध कीजिए कि n रेखाओं l और m के बीच बनने वाले कोण का समद्विभाजक है।

16. एक समलंब ABCD की क्रमशः समांतर भुजाओं AB और DC के मध्य-बिंदुओं M और N को मिलाने वाला रेखाखंड दोनों भुजाओं AB और DC पर लंब है। सिद्ध कीजिए कि AD = BC है।

17. ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि विकर्ण AC दोनों कोणों A और C का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB = AD और CB = CD है।

18. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है तथा ∠C का समद्विभाजक भुजा AB को D पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि AC + AD = BC है।

19. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। ∠B और ∠D में से निश्चित कीजिए कि कौन बड़ा है।

20. सिद्ध कीजिए कि एक समबाहु त्रिभुज को छोड़कर, किसी त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा का सम्मुख कोण एक समकोण के $\frac{2}{3}$ भाग से बड़ा होता है।

21. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AB = AD और CB = CD है। सिद्ध कीजिए कि AC, BD का लंब समद्विभाजक है।

अध्याय 8

चतुर्भुज

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

एक चतुर्भुज की भुजाएँ, कोण और विकर्ण; विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज, समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज और वर्ग।

- एक चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।
- एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- एक समांतर चतुर्भुज में,
  - (i) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
  - (ii) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
  - (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
- कोई चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि
  - (i) उसके सम्मुख कोण बराबर हों
  - (ii) उसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों
  - (iii) उसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करें
  - (iv) सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।
- एक आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और इसका विलोम भी।
- एक वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।

- एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा उसका आधा होता है।
- एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर, दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।
- एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए -

प्रतिदर्शप्रश्न 1 : एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle BOC = 90^\circ$ और $\angle BDC = 50^\circ$ है, तो $\angle OAB$ है

(A) 90º (B) 50º (C) 40º (D) 10º

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए-

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण 75º, 90º और 75º है। इसका चौथा कोण है

(A) 90º (B) 95º (C) 105º (D) 120º

2. एक आयत का एक विकर्ण उसकी एक भुजा से 25º पर नत है। इसके विकर्णों के बीच का न्यून कोण है

(A) 55º (B) 50º (C) 40º (D) 25º

3. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें $\angle ACB = 40^\circ$ है। तब $\angle ADB$ है

(A) 40º (B) 45º (C) 50º (D) 60º

4. चतुर्भुज PQRS, की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है, यदि

(A) PQRS एक आयत है

(B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों

(D) PQRS के विकर्ण बराबर हों

5. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है, यदि

(A) PQRS एक समचतुर्भुज है

(B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों

(D) PQRS के विकर्ण बराबर हों

6. यदि चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D का, इसी क्रम में लेने पर, अनुपात 3:7:6:4 है, तो ABCD है एक

(A) समचतुर्भुज (B) समांतर चतुर्भुज

(C) समलंब (D) पतंग

7. यदि चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक परस्पर P पर प्रतिच्छेद करते हैं, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक Q पर, $\angle C$ और $\angle D$ के R पर तथा $\angle D$ और $\angle A$ के S पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो PQRS है एक

(A) आयत (B) समचतुर्भुज (C) समांतर चतुर्भुज

(D) चतुर्भुज जिसके सम्मुख कोण संपूरक हैं।

8. यदि APB और CQD दो समांतर रेखाएँ हैं, तो कोणों APQ, BPQ, CQP और PQD के समद्विभाजक बनाते हैं

(A) एक वर्ग (B) एक समचतुर्भुज

(C) एक आयत (D) कोई अन्य समांतर चतुर्भुज

9. एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बनने वाली आकृति होती है

(A) एक समचतुर्भुज (B) एक आयत

(C) एक वर्ग (D) कोई भी समांतर चतुर्भुज

10. D और E क्रमशः ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य-बिंदु है तथा O भुजा BC पर कोई बिंदु है। O को A से मिलाया जाता है। यदि P और Q क्रमशः OB और OC के मध्य-बिंदु हैं, तो DEQP है एक

(A) वर्ग (B) आयत

(C) समचतुर्भुज (D) समांतर चतुर्भुज

11. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त आकृति केवल एक वर्ग है, यदि

(A) ABCD एक समचतुर्भुज है

(B) ABCD के विकर्ण बराबर हैं

(C) ABCD के विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब हैं

(D) ABCD के विकर्ण परस्पर लंब हैं

12. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DAC = 32^\circ$ और $\angle AOB = 70^\circ$ हैं तो $\angle DBC$ बराबर है

(A) 24° (B) 86° (C) 38° (D) 32°

13. एक समांतर चतुर्भुज के लिए, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है?

(A) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं

(B) सम्मुख कोण बराबर होते हैं

(C) सम्मुख कोण विकर्णों से समद्विभाजित होते हैं

(D) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं

14. D और E क्रमश: ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य-बिंदु हैं। DE को F तक बढ़ाया जाता है। यह सिद्ध करने के लिए कि CF रेखाखंड DA के बराबर और समांतर है, हमें एक अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है, जो है

(A) $\angle DAE = \angle EFC$

(B) AE = EF

(C) DE = EF

(D) $\angle ADE = \angle ECF$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। यदि इसके विकर्ण बराबर हैं, तो $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बराबर हैं, इसलिए यह एक आयत है।

अत:, $\angle ABC = 90^\circ$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : कथन असत्य है, क्योंकि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं, परंतु बराबर नहीं होते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक चतुर्भुज ABCD के तीन कोण बराबर हैं। क्या यह एक समांतर चतुर्भुज है? क्यों और क्यों नहीं?

हल : इसका समांतर चतुर्भुज होना आवश्यक नहीं है, क्योंकि हमें $\angle A = \angle B = \angle C = 80^\circ$ प्राप्त हो सकता है। तब, $\angle D = 120^\circ$ होगा। यहाँ, $\angle B \neq \angle D$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $OA : OC = 3 : 2$ है। क्या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है? क्यों और क्यों नहीं?

हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज नहीं है, क्योंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यहाँ $OA \neq OC$ है।

प्रश्नावली 8.2

1. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $OA = 3\text{cm}$ और $OD = 2\text{cm}$ है, तो AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

2. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

3. क्या कोण 110°, 80°, 70° और 95° किसी चतुर्भुज के कोण हो सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं?

4. चतुर्भुज ABCD में, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ है। इस चतुर्भुज को कौन-सा विशेष नाम दिया जा सकता है?

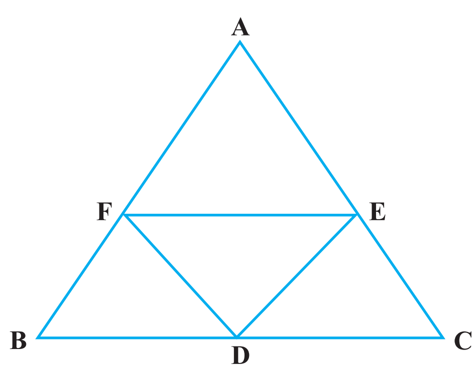
5. एक चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं। इस चतुर्भुज को कौन-सा विशेष नाम दिया गया है?

6. एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

7. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण अधिककोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

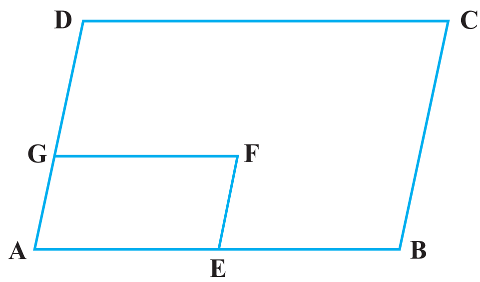
8. ΔABC में, $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm और $CA = 7$ cm हैं। यदि D और E क्रमशः AB और BC के मध्य-बिंदु हैं, तो DE की लंबाई निर्धारित कीजिए।

9. आकृति 8.1 में, यह दिया है कि BDEF और FDCE समांतर चतुर्भुज हैं। क्या आप कह सकते हैं कि $BD = CD$ है? क्यों और क्यों नहीं ?



आकृति 8.1

10. आकृति 8.2 में, ABCD और AEFG दो समांतर चतुर्भुज हैं यदि $\angle C = 55^\circ$ है, तो $\angle F$ निर्धारित कीजिए।



आकृति 8.2

11. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण न्यून कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

12. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

13. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यदि $\angle A = 35^\circ$ है, तो $\angle B$ निर्धारित कीजिए।

14. एक चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं। यदि AB = 4 cm है, तो CD निर्धारित कीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : किसी चतुर्भुज के कोण 3 : 4 : 4 : 7 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

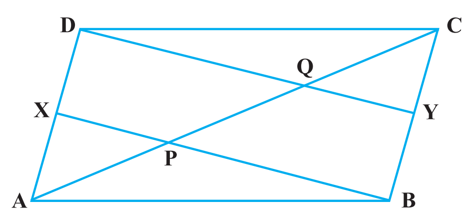
हल : मान लीजिए कि चतुर्भुज के कोण $3x, 4x, 4x$ और $7x$ हैं।

इसलिए, $3x + 4x + 4x + 7x = 360^\circ$

या $18x = 360^\circ$, अर्थात् $x = 20^\circ$

इस प्रकार, वाँछित कोण $60^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ और 140° हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 8.3 में, X और Y क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य-बिंदु हैं। साथ ही, BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि AP = PQ = QC है।



आकृति 8.3

हल : AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः, DX = BY $\left(\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC\right)$

साथ ही, DX || BY (क्योंकि AD || BC)

अतः, XBYD एक समांतर चतुर्भुज है। (सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है।)

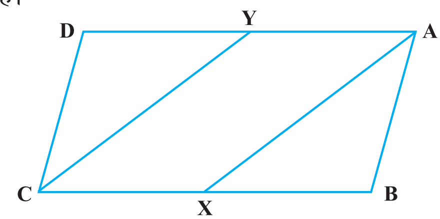
अर्थात्, PX || QD

अतः, AP = PQ (ΔAQD से, जहाँ X रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है) (1)

इसी प्रकार, ΔCPB से, $CQ = PQ$ (2)

इस प्रकार, $AP = PQ = CQ$ [(1) और (2) से]

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 8.4 में, AX और CY क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण A और C के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि $AX \parallel CY$ है।



आकृति 8.4

हल : $\angle A = \angle C$

(समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण)

अतः, $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

अर्थात् , $\angle YAX = \angle YCX$ (1)

साथ ही, $\angle AYC + \angle YCX = 180^\circ$ (क्योंकि $YA \parallel CX$) (2)

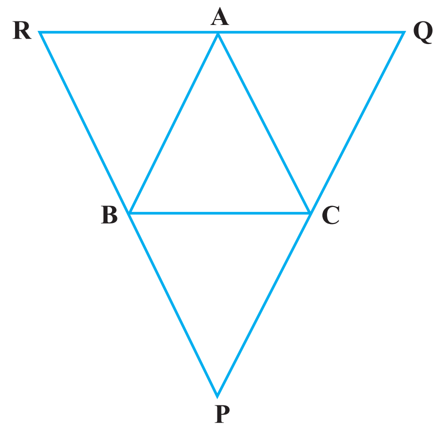
अतः $\angle AYC + \angle YAX = 180^\circ$ [(1) और (2)से]

इसलिए, $AX \parallel CY$ (क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण संपूरक हैं)

प्रश्नावली 8.3

1. एक चतुर्भुज का एक कोण 108° है तथा अन्य तीनों कोण बराबर हैं। तीनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।
2. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ और $\angle A = \angle B = 45^\circ$ है। इस समलंब के कोण C और D ज्ञात कीजिए।
3. एक समांतर चतुर्भुज के एक अधिक कोण के शीर्ष से खींचे गए उस समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलंबों के बीच का कोण 60° है। इस समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
4. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें D से AB पर शीर्षलंब AB को समद्विभाजित करता है। समचतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।
5. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण, AC पर बिंदु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि AE = CF है। दर्शाइए कि BFDE एक समांतर चतुर्भुज है।
6. E एक समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य-बिंदु है, जिसमें $AB \parallel DC$ है। E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है। [**संकेत :** AC को मिलाइए]

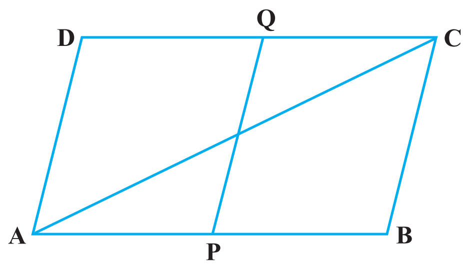
7. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C से होकर, क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के समांतर रेखाएँ RQ, PR और QP आकृति 8.5 में दर्शाए अनुसार खींची गई हैं। दर्शाइए कि $BC = \frac{1}{2} QR$ है।



आकृति 8.5

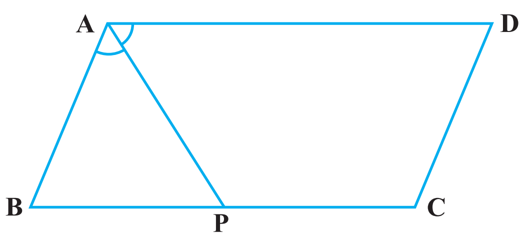
8. D, E और F क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि Δ DEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिंदु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ है (आकृति 8.6)। दर्शाइए कि AC और PQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 8.6

10. आकृति 8.7 में, समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर एक बिंदु P इस प्रकार स्थित है कि $\angle BAP = \angle DAP$ है। सिद्ध कीजिए कि AD = 2CD है।

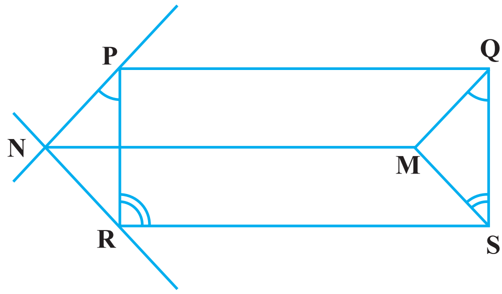


आकृति 8.7

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : PQ और RS दो बराबर और समांतर रेखाखंड हैं। बिंदु M, जो PQ या RS पर स्थित नहीं है, को Q और S से मिलाया जाता है। P से होकर जाती हुई QM के समांतर रेखा और R से होकर जाती हुए SM के समांतर रेखा परस्पर N पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड MN और PQ परस्पर बराबर और समांतर हैं।

हल : हम दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचते हैं (आकृति 8.8)।



आकृति 8.8

यह दिया है कि PQ = RS और PQ || RS है। अत:, PQSR एक समांतर चतुर्भुज है।

अत:, PR = QS और PR || QS है। (1)

अब , PR || QS

इसलिए, $\angle RPQ + \angle PQS = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण)

अर्थात्, $\angle RPQ + \angle PQM + \angle MQS = 180^\circ$ (2)

साथ ही, PN || QM (रचना से)

$\angle NPQ + \angle PQM = 180^\circ$

अर्थात्:, $\angle NPR + \angle RPQ + \angle PQM = 180^\circ$ (3)

अत:, $\angle NPR = \angle MQS$ [(2) और (3)से] (4)

इसी प्रकार, $\angle NRP = \angle MSQ$ (5)

इसलिए, $\Delta PNR \cong \Delta QMS$ [ASA,(1),(4) और (5)के प्रयोग से]

अत: PN = QM और NR = MS (CPCT)

क्योंकि PN = QM और

PN || QM है, अत: PQMN एक समांतर चतुर्भुज है

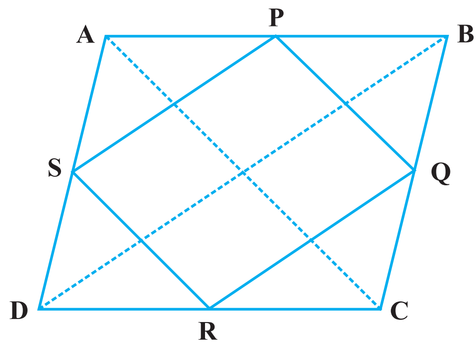
अत:, MN = PQ और NM || PQ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है।

हल : कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में प्रमेय 8.1 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : मान लीजिए कि ABCD एक समचतुर्भुज है तथा P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं (आकृति 8.9)। AC और BD को मिलाइए।



आकृति 8.9

ΔABD से, हमें प्राप्त है :

$$SP = \frac{1}{2} BD \text{ और}$$

$SP \parallel BD$ (क्योंकि S और P मध्य-बिंदु है)

इसी प्रकार, $RQ = \frac{1}{2} BD$ और $RQ \parallel BD$

अतः, $SP = RQ$ और $SP \parallel RQ$

इसलिए, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। (1)

साथ ही, $AC \perp BD$ (समचतुर्भुज के विकर्ण लंब होते हैं)

इसके अतिरिक्त, $PQ \parallel AC$ (ΔBAC से)

क्योंकि $SP \parallel BD$, $PQ \parallel AC$ और $AC \perp BD$ है,

इसलिए हमें प्राप्त होता है : $SP \perp PQ$, अर्थात् $\angle SPQ = 90^\circ$. (2)

अतः, PQRS एक आयत है [(1) और (2) से]

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि वह विकर्ण उस कोण के सम्मुख कोण को समद्विभाजित करेगा।

हल : आइए दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचें (आकृति 8.10)। इसमें विकर्ण AC समांतर

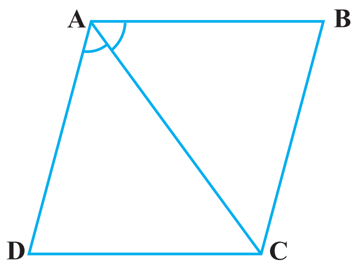
चतुर्भुज ABCD के $\angle BAD$ को समद्विभाजित करता है। अर्थात् यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DAC$ है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle BCA = \angle DCA$ है।

AB || CD है तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

अतः,	$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण)	(1)
इसी प्रकार,	$\angle DAC = \angle BCA$ (AD ‖ BC से)	(2)
परंतु यह दिया है कि	$\angle BAC = \angle DAC$	(3)

अतः (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है

$$\angle BCA = \angle DCA$$



आकृति 8.10

प्रश्नावली 8.4

1. कोई वर्ग एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के अंतर्गत इस प्रकार है कि वर्ग और त्रिभुज में एक कोण उभयनिष्ठ है। दर्शाइए कि वर्ग का शीर्ष जो उभयनिष्ठ कोण के शीर्ष के सम्मुख है कर्ण को समद्विभाजित करता है।

2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, AB = 10 cm और AD = 6 cm है। $\angle A$ का समद्विभाजक DC से E पर मिलता है तथा AE और BC बढ़ाने पर F पर मिलते हैं। CF की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. P, Q, R और S क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, जिसमें AC = BD है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक समचतुर्भज है।

4. P, Q, R और S क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, जिसमें $AC \perp BD$ है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक आयत है।

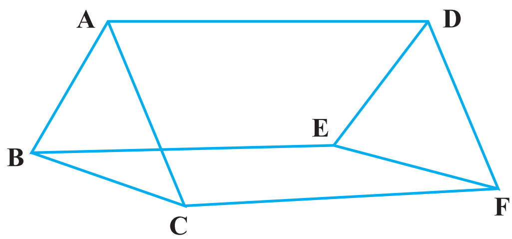
5. P, Q, R और S एक चतुर्भुज ABCD की क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, जिसमें AC = BD और $AC \perp BD$ है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वर्ग है।

6. एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।

7. P और Q क्रमशः एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख AB और CD भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। AQ, DP को S पर प्रतिच्छेद करता है तथा BQ, CP को R पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

8. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$ है।

9. आकृति 8.11 में, $AB \parallel DE$, $AB = DE$, $AC \parallel DF$ तथा $AC = DF$ है। सिद्ध कीजिए कि $BC \parallel EF$ और $BC = EF$ है।



आकृति 8.11

10. E एक ΔABC की माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है तथा BE को AC को F पर मिलने के लिए बढ़ाया गया है। दर्शाइए कि $AF = \frac{1}{3} AC$ है।

11. दर्शाइए कि किसी वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने पर बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

12. E और F क्रमशः एक समलंब ABCD की असमांतर AD और BC भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि $EF \parallel AB$ और $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ है।

[**संकेत :** BE को मिलाइए तथा इसे बढ़ाई गई CD से G पर मिलने के लिए बढ़ाइए।]

13. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

14. P और Q क्रमशः एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख AD और BC भुजाओं पर स्थित बिंदु इस प्रकार हैं कि PQ विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु O से होकर जाता है। सिद्ध कीजिए कि PQ बिंदु O पर समद्विभाजित हो जाता है।

15. ABCD एक आयत है, जिसका विकर्ण BD कोण $\angle B$ को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि ABCD एक वर्ग है।

16. D, E और F क्रमशः एक त्रिभुज ABC की AB, BC और CA भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए D, E और F बिंदुओं को मिलाने से त्रिभुज ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बँट जाता है।

17. सिद्ध कीजिए कि किसी समलंब के विकर्णों के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा उस समलंब की समांतर भुजाओं के समांतर होती है।

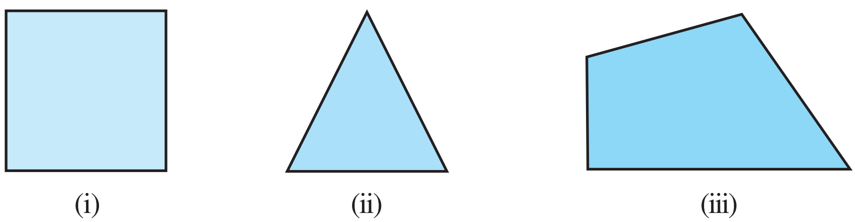
18. P एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD का मध्य-बिंदु है। C से होकर PA के समांतर खींची गई रेखा AB को Q पर तथा बढ़ाई हुई DA को R पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि DA = AR और CQ = QR है।

अध्याय 9

समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

किसी बंद समतल आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति के अंदर के क्षेत्र का माप होता है:

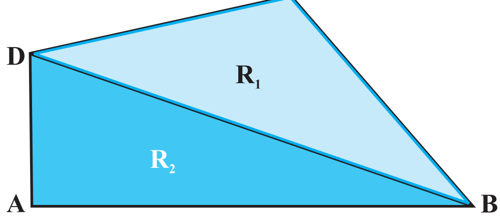


आकृति 9.1

छायांकित भाग (आकृति 9.1) वे क्षेत्र निरूपित करते हैं जिनके क्षेत्रफल सरल ज्यामितीय परिणामों का प्रयोग करके निर्धारित किए जा सकते हैं। ऐसी आकृतियों के क्षेत्रफलों को मापने के लिए एक वर्ग इकाई (या मात्रक) मानक इकाई है।

- यदि Δ ABC $\cong$ Δ PQR है, तो ar (Δ ABC) = ar (Δ PQR) होता है।

  समतल आकृति ABCD का कुल क्षेत्रफल R दोनों त्रिभुजाकार क्षेत्रों R_1 और R_2, के योग के बराबर है, अर्थात् ar (R) = ar (R_1) + ar (R_2) है (आकृति 9.2)।



आकृति 9.2

- दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं परंतु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।
- एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- (i) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज, क्षेत्रफल में, बराबर होते हैं।

  (ii) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बना एक समांतर चतुर्भुज और एक आयत क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- समान आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- समान आधारों और समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब समान होते हैं।
- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने आयत/समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
- यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : 12 cm और 16 cm विकर्णों वाले एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से बनी आकृति का क्षेत्रफल है

(A) 48 cm^2 (B) 64 cm^2 (C) 96 cm^2 (D) 192 cm^2

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 9.1

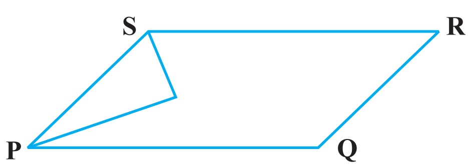
निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. एक त्रिभुज की माध्यिका उसे विभाजित करती है, दो

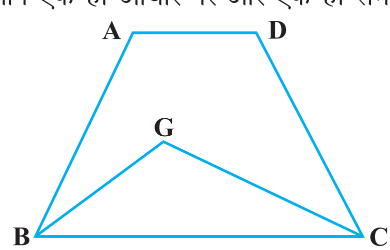
(A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में (B) सर्वांगसम त्रिभुजों में

(C) समकोण त्रिभुजों में (D) समद्विबाहु त्रिभुजों में

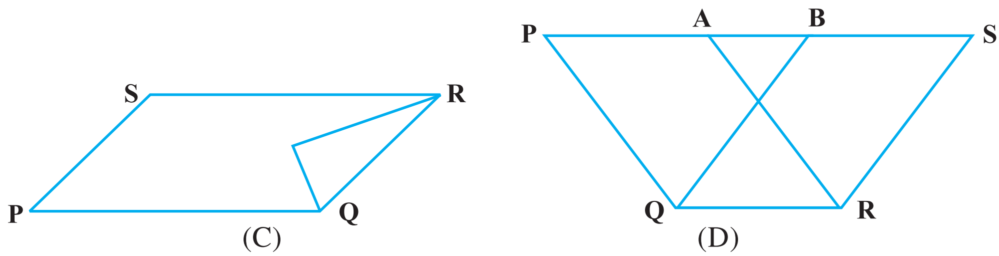
2. निम्नलिखित आकृतियों (आकृति 9.3) में से किसमें आप एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच, बने दो बहुभुज प्राप्त करते हैं:



(A)



(B)



आकृति 9.3

3. 8 cm और 6 cm भुजाओं वाले एक आयत की आसन्न भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से बनी आकृति है :

(A) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक आयत (B) 25 cm^2 क्षेत्रफल का एक वर्ग

(C) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक समलंब (D) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज

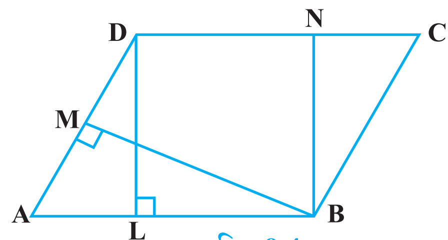
4. आकृति 9.4 में, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है:

(A) AB × BM

(B) BC × BN

(C) DC × DL

(D) AD × DL

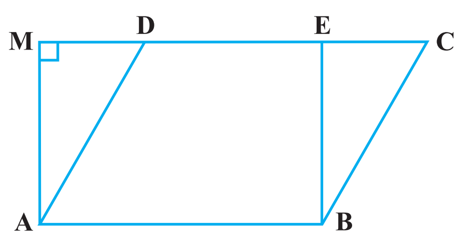


आकृति 9.4

5. आकृति 9.5 में, यदि समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEM समान क्षेत्रफल के हैं, तो :

(A) ABCD का परिमाप = ABEM का परिमाप

(B) ABCD का परिमाप < ABEM का परिमाप



आकृति 9.5

(C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप

(D) ABCD का परिमाप = $\frac{1}{2}$ (ABEM का परिमाप)

6. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु किसी भी एक शीर्ष को चौथा बिंदु लेकर एक समांतर चतुर्भुज बनाते हैं, जिसका क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\frac{1}{2}$ ar (ABC) (B) $\frac{1}{3}$ ar (ABC)

(C) $\frac{1}{4}$ ar (ABC) (D) ar (ABC)

7. दो समांतर चतुर्भुज बराबर आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 1 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1

8. ABCD एक चतुर्भुज है जिसका विकर्ण AC उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है। तब, ABCD

(A) एक आयत है (B) सदैव एक समचतुर्भुज है

(C) एक समांतर चतुर्भुज है (D) (A), (B) या (C) में से कोई भी होना आवश्यक नहीं

9. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं, तो त्रिभुज के क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से अनुपात है

(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 4

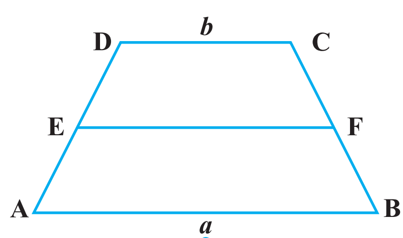
10. ABCD एक समलंब है जिसकी समांतर भुजाएँ AB = a cm और DC = b cm है (आकृति 9.6)। E और F असमांतर भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। ar (ABFE) और ar (EFCD) का अनुपात हैं

(A) $a : b$

(B) $(3a + b) : (a + 3b)$

(C) $(a + 3b) : (3a + b)$

(D) $(2a + b) : (3a + b)$



आकृति 9.6

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या **असत्य** लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:

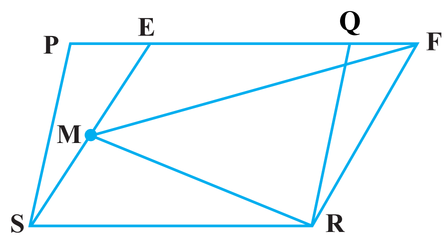
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि P किसी त्रिभुज ABC की माध्यिका AD पर स्थित कोई बिंदु है, तो ar (ABP) ≠ ar (ACP) है।

हल : असत्य, क्योंकि ar (ABD) = ar (ACD) और ar (PBD) = ar (PCD), और इसीलिए, ar (ABP) = ar (ACP) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि आकृति 9.7 में, PQRS और EFRS दो समांतर चतुर्भुज हैं, तो

ar (MFR) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS) है।

हल : सत्य, क्योंकि ar (PQRS) = ar (EFRS) = 2 ar (MFR) है।



आकृति 9.7

प्रश्नावली 9.2

***सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज और X भुजा AB का मध्य-बिंदु है। यदि ar (AXCD) = 24 cm^2 है तो ar (ABC) = 24 cm^2 है।

2. PQRS एक आयत है, जो त्रिज्या 13 cm वाले एक वृत्त के चतुर्थांश के अंतर्गत है। A भुजा PQ पर स्थित कोई बिंदु है। यदि PS = 5 cm है, तो ar (PAS) = 30 cm^2 है।

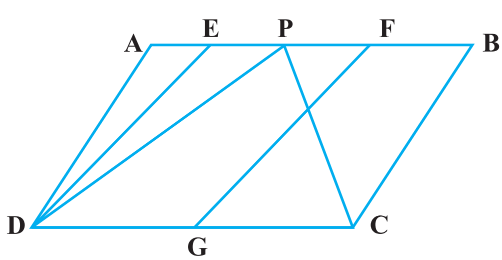
3. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल 180 cm^2 है तथा A विकर्ण QS पर स्थित कोई बिंदु है। तब Δ ASR का क्षेत्रफल 90 cm^2 है।

4. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। तब,

ar (BDE) = $\frac{1}{4}$ ar (ABC) है।

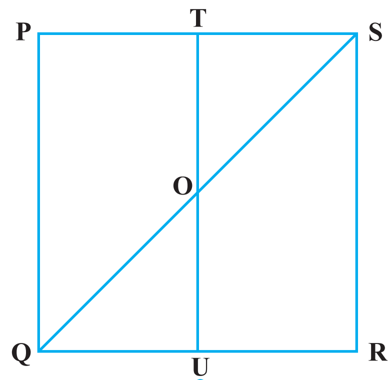
5. आकृति 9.8 में, ABCD और EFGD दो समांतर चतुर्भुज हैं तथा G भुजा CD का मध्य-बिंदु है। तब,

ar (DPC) = $\frac{1}{2}$ ar (EFGD) है।



आकृति 9.8

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न



आकृति 9.9

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : PQRS एक वर्ग है। T और U क्रमशः PS और QR के मध्य-बिंदु हैं (आकृति 9.9)। Δ OTS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 8 cm है तथा O रेखाखंड TU और QS का प्रतिच्छेद बिंदु है।

हल : PS = PQ = 8 cm है तथा TU $\parallel$ PQ है।

$$ST = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

साथ ही, PQ = TU = 8 cm

इसलिए, $OT = \frac{1}{2}TU = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$

अतः, ΔOTS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times ST \times OT$ [क्योंकि OTS एक समकोण त्रिभुज है]

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज तथा BC को Q तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि AD = CQ है (आकृति 9.10)। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करता है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ)

हल: ar (ACP) = ar (BCP) (1)

[एक आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने दो त्रिभुज]

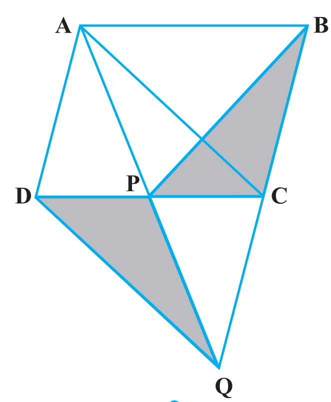
ar (AOQQ) = ar (ADC) (2)

ar (ADC) – ar (ADP) = ar (AOQQ) – ar (ADP)

अतः, ar (APC) = ar (DPQ) (3)

(1) और (3) से, हमें प्राप्त होता है:

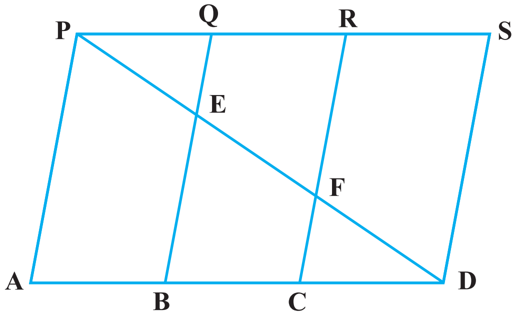
ar (BCP) = ar (DPQ)



आकृति 9.10

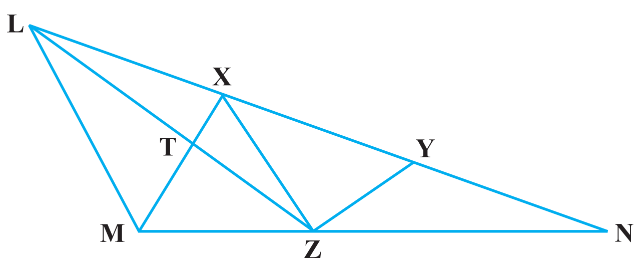
प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.11 में, PSDA एक समांतर चतुर्भुज है। PS पर बिंदु Q और R इस प्रकार लिए गए हैं कि PQ = QR = RS है। तथा PA || QB || RC है। सिद्ध कीजिए कि ar (PQE) = ar (CFD) है।



आकृति 9.11

2. X और Y त्रिभुज LMN की भुजा LN पर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि LX = XY = YN हैं। X से होकर जाती हुई एक रेखा LM के समांतर खींची गई जो MN को Z पर मिलती है (देखिए आकृति 9.12)। सिद्ध कीजिए कि ar (LZY) = ar (MZYX) है।



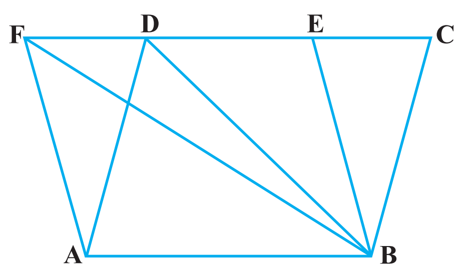
आकृति 9.12

3. समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 90 cm^2 है (आकृति 9.13)। ज्ञात कीजिए:

(i) ar (ABEF)

(ii) ar (ABD)

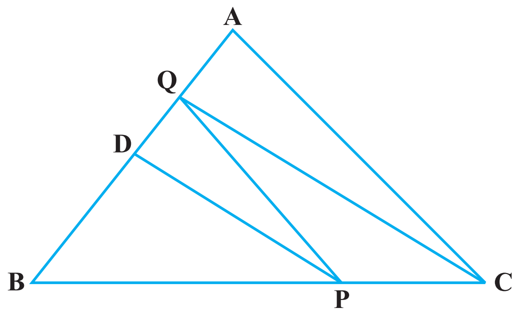
(iii) ar (BEF)



आकृति 9.13

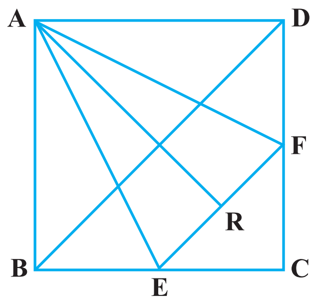
4. Δ ABC, D भुजा AB का मध्य-बिंदु है तथा P भुजा BC पर स्थित कोई बिंदु है। यदि रेखाखंड CQ || PD भुजा AB से Q पर मिलता है (आकृति 9.14), तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{ar (BPQ)} = \frac{1}{2} \text{ ar (ABC)}$$ है।



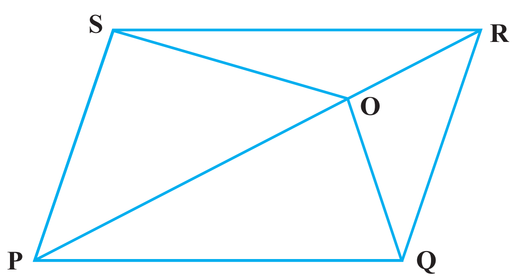
आकृति 9.14

5. ABCD एक वर्ग है। E और F क्रमशः BC और CD भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। यदि R रेखाखंड EF का मध्य-बिंदु है (आकृति 9.15), तो सिद्ध कीजिए कि ar (AER) = ar (AFR) है।



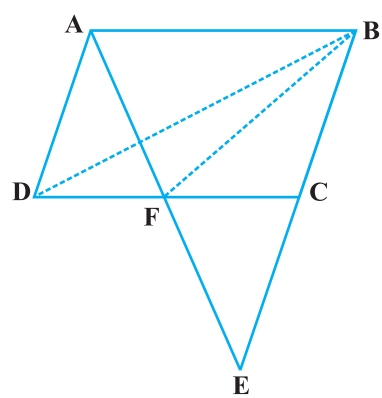
आकृति 9.15

6. O एक समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई बिंदु है (आकृति 9.16)। सिद्ध कीजिए कि ar (PSO) = ar (PQO) है।



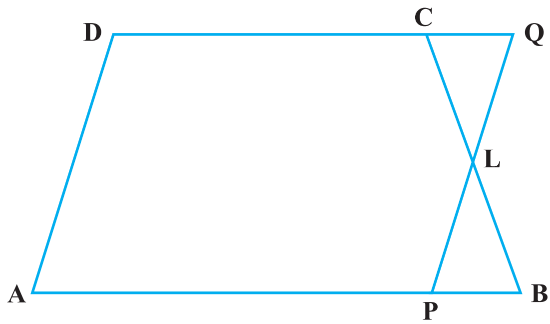
आकृति 9.16

7. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें BC को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CE = BC है (आकृति 9.17)। AE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। यदि ar (DFB) = 3 cm^2 है, तो समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.17

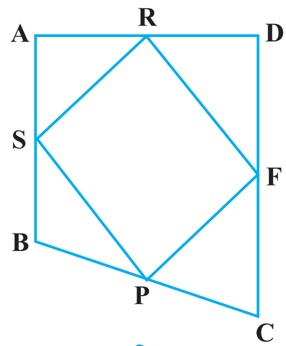
8. एक समलंब ABCD में, AB || DC है तथा L भुजा BC का मध्य-बिंदु है। L से होकर, एक रेखा PQ || AD खींची गई है, जो AB को P पर और बढ़ाई गई DC को Q पर मिलती है (आकृति 9.18), सिद्ध कीजिए ar (ABCD) = ar (APQD)



आकृति 9.18

9. यदि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को क्रम से मिलाया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है (आकृति 9.19)।

[संकेत: BD को मिलाइए और A से BD पर लंब खींचिए।]

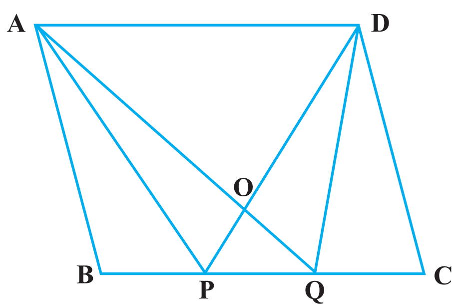


आकृति 9.19

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

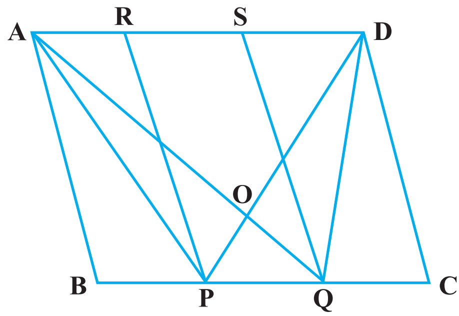
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.20 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। बिंदु P और Q भुजा BC को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि ar (APQ) = ar (DPQ) = $\frac{1}{6}$ ar(ABCD) है।



आकृति 9.20

हल : P और Q से होकर, AB के समांतर PR और QS खींचिए (आकृति 9.21)। अब, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसका आधार PQ = $\frac{1}{3}$ BC है।



आकृति 9.21

ar (APD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) [एक ही आधार BC और BC ∥ AD] (1)

ar (AQD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) (2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) = ar (AQD) (3)

दोनों पक्षों में से ar (AOD) घटाने पर, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) – ar (AOD) = ar (AQD) – ar (AOD)

ar (APO) = ar (OQD), (4)

(4) के दोनों पक्षों में ar (OPQ) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है:

ar (APO) + ar (OPQ) = ar (OQD) + ar (OPQ)

ar (APQ) = ar (DPQ)

क्योंकि, ar (APQ) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS), इसलिए

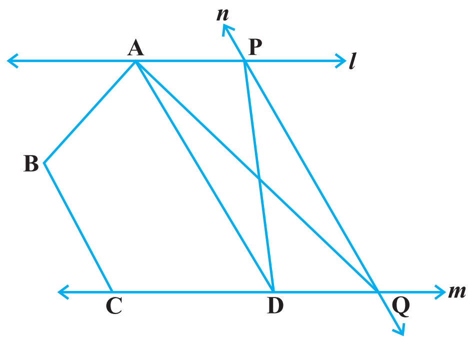
ar (DPQ) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS)

अब, ar (PQRS) = $\frac{1}{3}$ ar (ABCD)

अत:, ar (APQ) = ar (DPQ)

= $\frac{1}{2}$ ar (PQRS) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ ar (ABCD)

$= \frac{1}{6}$ ar (ABCD)



आकृति 9.22

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 9.22 में, l, m, और n, सरल रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $l \parallel m$ है तथा n रेखा l को P पर तथा m को Q पर प्रतिच्छेद करती है। ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि शीर्ष A, रेखा l पर स्थित है, शीर्ष C और D रेखा m पर स्थित हैं तथा AD $\parallel$ n है। दर्शाइए कि

ar (ABCQ) = ar (ABCDP)

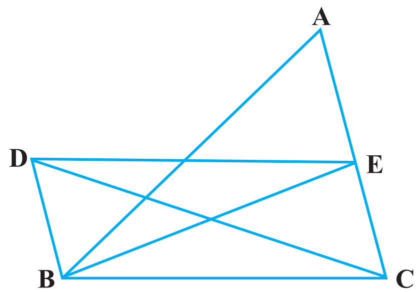
हल : ar (APD) = ar (AQD) (1)

[एक ही आधार AD पर है तथा एक ही समांतर रेखाओं AD और n के बीच में स्थित है].

(1) के दोनों पक्षों में ar (ABCD) जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) + ar (ABCD) = ar (AQD) + ar (ABCD)

या ar (ABCDP) = ar (ABCQ) है।



आकृति 9.23

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 9.23 में, BD $\parallel$ CA है, E रेखाखंड CA का मध्य-बिंदु है तथा BD = $\frac{1}{2}$ CA है।

सिद्ध कीजिए कि ar (ABC) = 2ar (DBC) है।

हल : DE को मिलाइए। यहाँ BCED एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि

BD = CE और BD $\parallel$ CE है।

ar (DBC) = ar (EBC) (1)

[एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं की बीच में है]

Δ ABC में, BE एक माध्यिका है।

अतः, ar (EBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC)

अब, ar (ABC) = ar (EBC) + ar (ABE)

इसलिए, ar (ABC) = 2 ar (EBC),

अतः, ar (ABC) = 2 ar (DBC) [(1) से]

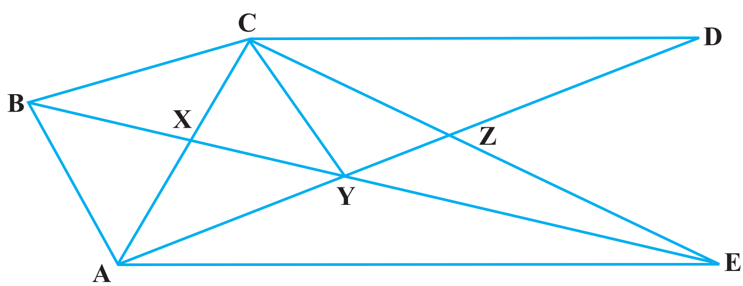
प्रश्नावली 9.4

1. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर कोई बिंदु E लिया जाता है। AE और DC को बढ़ाया जाता है जिससे वे F पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ADF) = ar (ABFC) है।

2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो AD को P और BC से Q पर मिलती है। दर्शाइए कि PQ इस समांतर चतुर्भुज ABCD को बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ BE और CF परस्पर बिंदु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि Δ GBC का क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE के क्षेत्रफल के बराबर है।

4. आकृति 9.24 में, CD || AE और CY || BA है। सिद्ध कीजिए कि ar (CBX) = ar (AXY) है।



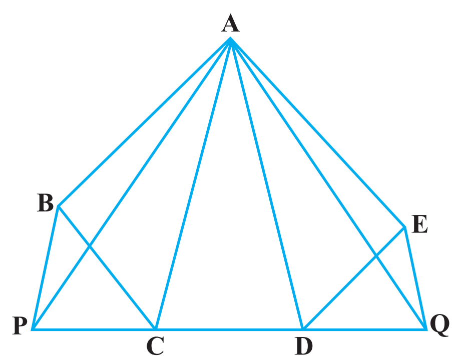
आकृति 9.24

5. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC, DC = 30 cm और AB = 50 cm है। यदि X और Y क्रमशः AD और BC के मध्य-बिंदु हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{ar (DCYX)} = \frac{7}{9} \text{ ar (XYBA)}$$ है।

6. त्रिभुज ABC में यदि L और M क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित बिंदु हैं कि LM || BC है। सिद्ध कीजिए कि ar (LOB) = ar (MOC) है।

7. आकृति 9.25 में, ABCDE एक पंचभुज है। AC के समांतर खींची गई BP बढ़ाई गई DC को P पर तथा AD के समांतर खींची गई EQ बढ़ाई गई CD से Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ABCDE) = ar (APQ) है।

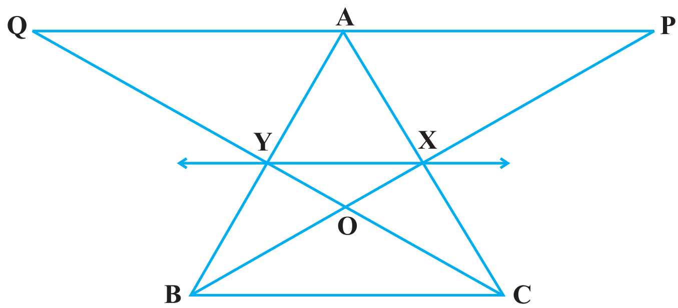


आकृति 9.25

8. यदि एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ G पर मिलती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

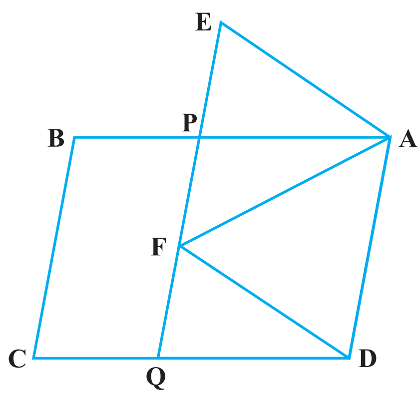
ar (AGB) = ar (AGC) = ar (BGC) = $\frac{1}{3}$ ar (ABC) है।

9. आकृति 9.26 में, X और Y क्रमशः AC और AB के मध्य-बिंदु हैं, QP || BC और CYQ और BXP सरल रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ABP) = ar (ACQ) है।



आकृति 9.26

10. आकृति 9.27 में, ABCD और AEFD दो समांतर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (PEA) = ar (QFD) है। [संकेत : PD को मिलाइए।]



आकृति 9.27

अध्याय 10

वृत्त

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

वृत्त, त्रिज्या, व्यास, जीवा, वृत्तखंड, चक्रीय चतुर्भुज।

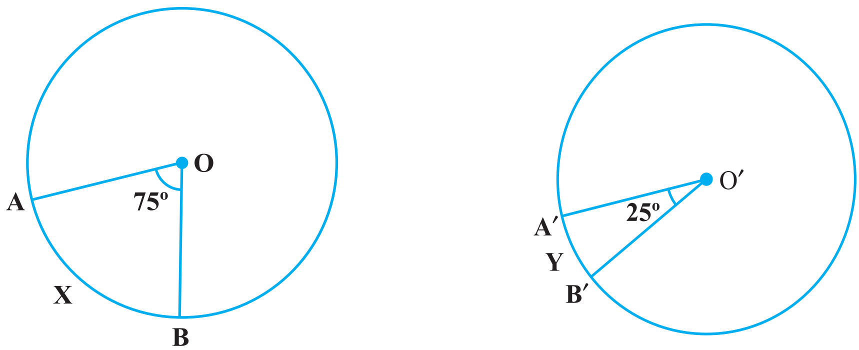
- एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की समान (या बराबर) जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
- यदि एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) पर बराबर कोण अंतरित करें तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।
- वृत्त के केंद्र से उसकी किसी जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
- किसी वृत्त के केंद्र से होकर उसकी जीवा को समद्विभाजित करती हुई रेखा जीवा पर लंब होती है।
- दिए हुए तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है।
- एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की बराबर जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) से समदूरस्थ होती हैं।
- वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं।
- यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।
- एक वृत्त के सर्वांगसम चाप केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
- किसी चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाया गया कोण वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।
- एक ही वृत्त-खंड में बने कोण बराबर होते हैं।
- यदि दो बिंदुओं को मिलाने पर बना रेखाखंड उस रेखाखंड को अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो बिंदुओं पर बराबर कोण अंतरित करे (बनाए), तो ये चारों बिंदु चक्रीय होते हैं।

- एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।
- यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180° हो, तो वह चतुर्भुज चक्रीय होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 10.1 में दो सर्वांगसम वृत्तों के केंद्र O और O′ हैं। चाप AXB केंद्र O पर 75° का कोण अंतरित करता है तथा चाप A′ Y B′ केंद्र O′ पर 25° का कोण अंतरित करता है। तब चाप A X B और A′ Y B′ का अनुपात है



आकृति 10.1

(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 3

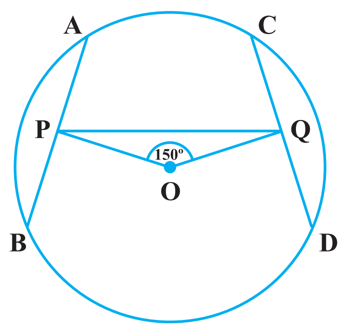
हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 10.2 में, AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ हैं। OP और OQ क्रमशः AB और CD जीवाओं पर लंब हैं। यदि $\angle POQ = 150^\circ$ है, तो $\angle APQ$ बराबर है

(A) 30° (B) 75°

(C) 15° (D) 60°

हल : उत्तर (B)



आकृति 10.2

प्रश्नावली 10.1

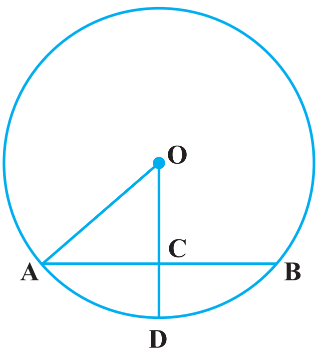
निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि AD = 34 cm, AB = 30 cm है, तो वृत्त के केंद्र से AB की दूरी है

(A) 17 cm (B) 15 cm (C) 4 cm (D) 8 cm

2. आकृति 10.3 में, यदि OA = 5 cm, AB = 8 cm तथा OD जीवा AB पर लंब है, तो CD बराबर है

(A) 2 cm (B) 3 cm
(C) 4 cm (D) 5 cm



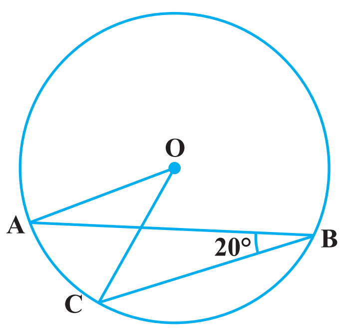
आकृति 10.3

3. यदि AB = 12 cm, BC = 16 cm और AB रेखाखंड BC पर लंब है, तो A, B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है

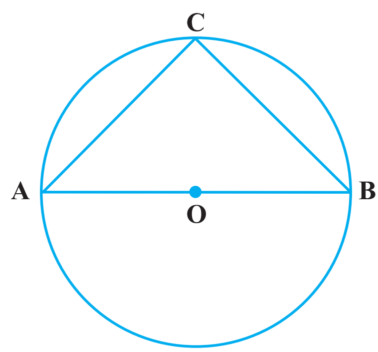
(A) 6 cm (B) 8 cm
(C) 10 cm (D) 12 cm

4. आकृति 10.4 में, यदि ∠ABC = 20° है, तो ∠AOC बराबर है

(A) 20° (B) 40° (C) 60° (D) 10°



आकृति 10.4



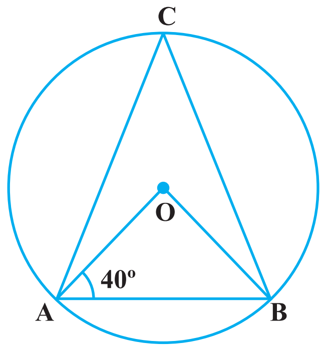
आकृति 10.5

5. आकृति 10.5 में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा AC = BC है, तो ∠CAB बराबर है

(A) 30° (B) 60°
(C) 90° (D) 45°

6. आकृति 10.6 में, यदि $\angle OAB = 40^o$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है

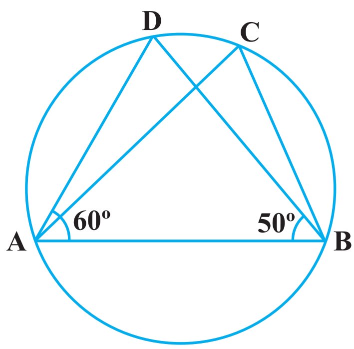
(A) 50^o (B) 40^o (C) 60^o (D) $70°$



आकृति 10.6

7. आकृति 10.7 में, यदि $\angle DAB = 60^o$, $\angle ABD = 50^o$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है

(A) 60^o (B) 50^o (C) 70^o (D) 80^o



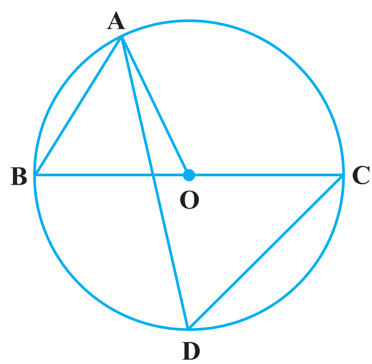
आकृति 10.7

8. ABCD एक ऐसा चक्रीय चतुर्भुज है कि AB इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^o$ है। तब, $\angle BAC$ बराबर है

(A) 80^o (B) 50^o

(C) 40^o (D) 30^o

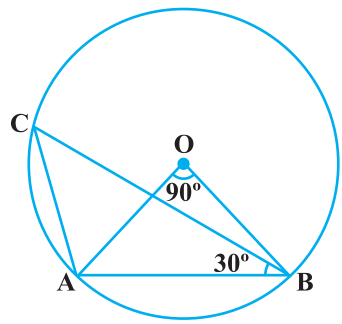
9. आकृति 10.8 में, BC वृत्त का व्यास है तथा $\angle BAO = 60^o$ है। तब, $\angle ADC$ बराबर है



आकृति 10.8

(A) 30º (B) 45º
(C) 60º (D) 120º

10. आकृति 10.9 में, ∠AOB = 90º और ∠ABC = 30º है। तब, ∠CAO बराबर है :
(A) 30º (B) 45º (C) 90º (D) 60º



आकृति 10.9

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं पर अंतरित कोण बराबर होते हैं।

हल : असत्य। यदि दोनों बिंदु केवल एक ही वृत्तखंड (दीर्घ या लघु) में स्थित होते हैं, तभी बराबर होते हैं, अन्यथा नहीं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लंबाईयाँ 10 cm और 8 cm हैं केंद्र से क्रमशः 8.0 cm और 3.5 cm की दूरियों पर हैं।

हल : असत्य। क्योंकि बड़ी जीवा केंद्र से कम दूरी पर होती है।

प्रश्नावली 10.2

*निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए **सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. एक वृत की दो जीवाएँ AB और CD में से प्रत्येक केंद्र से 4 cm की दूरी पर है। तब, AB = CD है।

2. केंद्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC, OA के विपरीत ओर स्थित हैं। तब, ∠OAB = ∠OAC है।

3. O और O′ केंद्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब, ∠AOB = ∠AO′B है।

4. तीन संरेख बिंदुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

5. दो बिंदुओं A और B से होकर 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचा जा सकता है, यदि AB = 6 cm है।

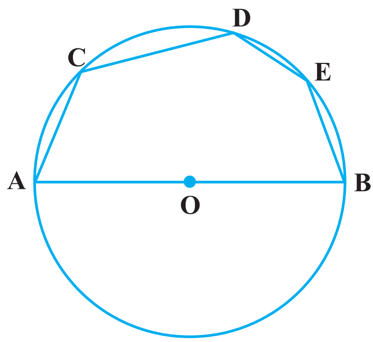
6. AOB वृत्त का एक व्यास है तथा C वृत्त पर स्थित कोई बिंदु है। तब, $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।

7. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें $\angle A = 90°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 95°$ और $\angle D = 105°$ है।

8. यदि A, B, C, और D चार बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAC = 30°$ और $\angle BDC = 60°$ है, तो D उस वृत्त का केंद्र है, जो A, B और C बिंदुओं से होकर खींचा जाता है।

9. यदि A, B, C और D चार बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAC = 45°$ और $\angle BDC = 45°$ है, तो A, B, C और D चक्रीय है।

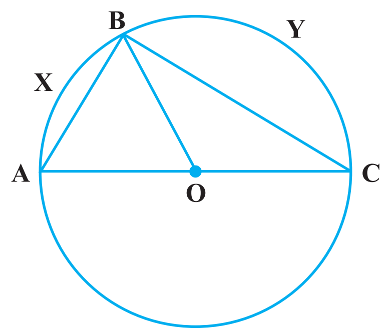
10. आकृति 10.10 में, यदि AOB एक व्यास है और $\angle ADC = 120°$ है, तो $\angle CAB = 30°$ है।



आकृति 10.10

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 10.11 में, AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है। $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.11

हल :

क्योंकि चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए

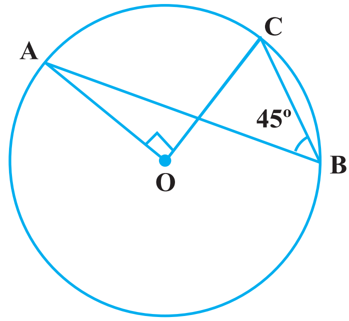
$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC$$

साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$

अतः, $\frac{1}{2}\angle BOC + \angle BOC = 180°$

या $\angle BOC = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 10.12 में, $\angle ABC = 45^\circ$ है। सिद्ध कीजिए कि $OA \perp OC$ है।



आकृति 10.12

हल : $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ है।

अर्थात् $\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

या $OA \perp OC$

प्रश्नावली 10.3

1. यदि एक वृत्त के चाप AXB और CYD सर्वांगसम हैं तो AB और CD का अनुपात ज्ञात कीजिए।

2. यदि एक वृत्त PXAQBY की एक जीवा AB का लंब समद्विभाजक वृत्त को P और Q बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है, तो सिद्ध कीजिए कि चाप PXA $\cong$ चाप PYB है।

3. A, B और C किसी वृत्त पर स्थित तीन बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि AB, BC और CA के लंब समद्विभाजक संगामी हैं।

4. AB और AC एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का समद्विभाजक वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

5. यदि वृत्त की दो जीवाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त के केंद्र से होकर जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों जीवाएँ समांतर हैं।

6. ABCD एक ऐसा चतुर्भुज है कि A शीर्षों B, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र है।

सिद्ध कीजिए कि $\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BAD$ है।

7. O त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है तथा D आधार BC का मध्य-बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOD = \angle A$ है।

8. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गए हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है।

9. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC उसके केंद्र पर क्रमश: 90° और 150° के कोण अंतरित करती हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केंद्र के विपरीत ओर स्थित हैं।

10. यदि BM और CN त्रिभुज ABC की भुजाओं AC और AB पर खींचे गए लंब हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिंदु B, C, M और N चक्रीय हैं।

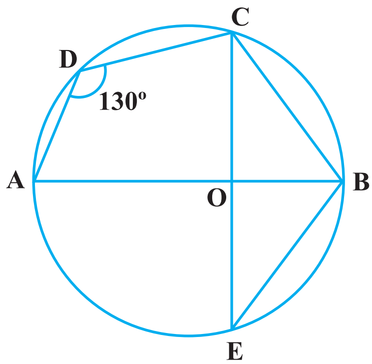
11. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के समांतर कोई रेखा उसकी बराबर भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए खींची जाए, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।

12. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर है, तो सिद्ध कीजिए कि इसके विकर्ण भी बराबर हैं।

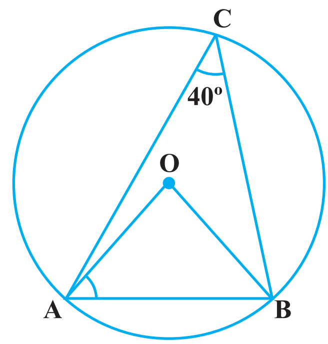
13. एक त्रिभुज ABC का परिकेंद्र O है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OBC + \angle BAC = 90°$ है।

14. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में किसी बिंदु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

15. आकृति 10.13 में, $\angle ADC = 130°$ और जीवा BC = जीवा BE है। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.13



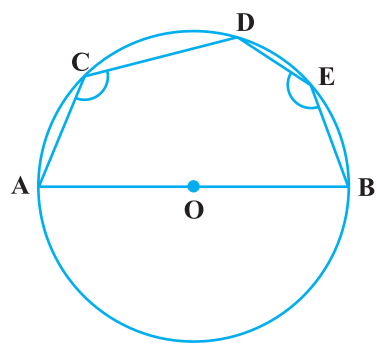
आकृति 10.14

16. आकृति 10.14 में, $\angle ACB = 40°$ है। $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

17. एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के अंतर्गत इस प्रकार है कि AB वृत्त का व्यास है और $\angle ADC = 130°$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

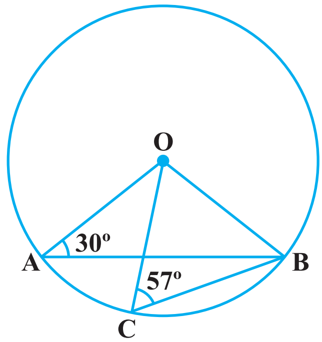
18. केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्त बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A (या B) से होकर एक रेखा PQ रेखाखंड OO′ के समांतर खींची जाती है, जो वृत्तों को P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि PQ = 2 OO′ है।

19. आकृति 10.15 में, AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिंदु हैं। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.15

20. आकृति 10.16 में, $\angle OAB = 30°$ और $\angle OCB = 57°$ है। $\angle BOC$ और $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।



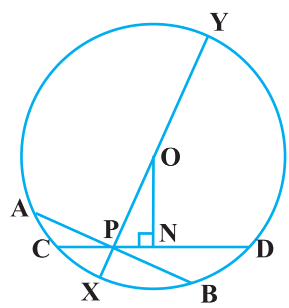
आकृति 10.16

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : सिद्ध कीजिए कि दो वृत्त परस्पर दो से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकते।

हल : मान लीजिए कि दो वृत्त ऐसे हैं, जो A, B और C तीन बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। स्पष्टत: A, B और C संरेख नहीं हैं। हम जानते हैं कि तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है। अत: बिंदुओं A, B और C से होकर दो वृत्त नहीं खींचे जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, दो वृत्त दो से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए की वृत्त के अंदर किसी बिंदु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिंदु से होकर जाने वाले व्यास पर लंब होती है।



आकृति 10.17

हल : मान लीजिए कि केंद्र O वाले वृत्त के अंदर P कोई बिंदु है। P से होकर जाने वाले व्यास XY पर लंब एक जीवा AB खींचिए जो P से होकर जाए। माना CD, बिंदु P से होकर जाती हुई एक अन्य जीवा है। O से CD पर ON लंब खींजिए। तब ΔONP एक समकोण त्रिभुज है (आकृति 10.17)। इसलिए, इसका कर्ण OP भुजा ON से बड़ा है। हम जानते हैं कि वह जीवा जो केंद्र से निकटतम दूरी पर होती है उस जीवा से बड़ी होती है जो केंद्र से अधिक दूरी पर होती है। अत: $CD > AB$ है। अत:, AB बिंदु P से होकर जाने वाली जीवाओं में सबसे छोटी है।

प्रश्नावली 10.4

1. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक-पृथक बराबर होते हैं।

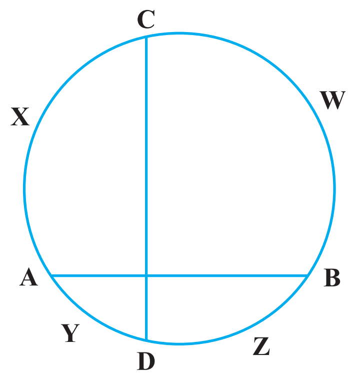
2. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि यह एक चक्रीय चतुर्भुज है।

3. यदि P, Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लंब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिंदु P, Q, R और D चक्रीय हैं।

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं तो, उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।

6. यदि किसी वृत्त AYDZBWCX की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 10.18), तो सिद्ध कीजिए कि चाप CXA + चाप DZB = चाप AYD + चाप BWC = एक अर्धवृत्त है।

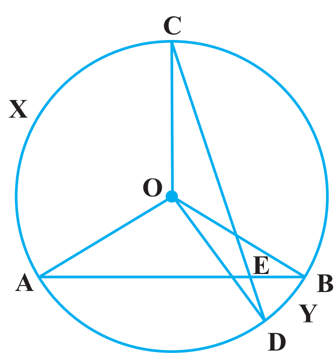


आकृति 10.18

7. यदि ABC किसी वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिंदु है, जो B या C के संपाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।

8. आकृति 10.19 में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

$\angle AEC = \frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण + चाप DYB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण) है।



आकृति 10.19

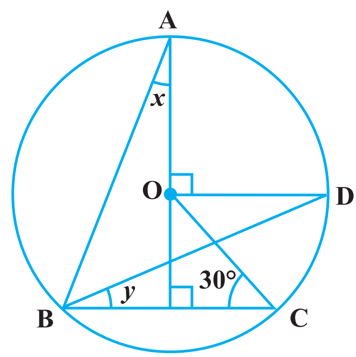
9. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q, बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।

10. एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{2}$ cm है। 2 cm लंबाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त-खंडों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खंड के किसी बिंदु पर बना कोण 45° है।

11. एक वृत्त की दो बराबर AB और CD जीवाएँ बढ़ाने पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि PB = PD है।

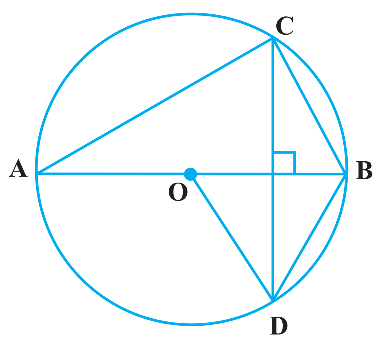
12. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 2AC है। यदि p और q क्रमशः केंद्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

13. आकृति 10.20 में, O वृत्त का केंद्र है और ∠BCO = 30° है। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.20

14. आकृति 10.21 में, O वृत्त का केंद्र है, BD = OD और CD ⊥ AB है। ∠CAB ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.21

अध्याय 11

रचनाएँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना।
- एक दिए हुए रेखाखंड का लंब समद्विभाजक खींचना।
- कोण 15°, 30°, 45°, 60°, 90° की रचना करना।
- एक त्रिभुज की रचना, जब उसका आधार, आधार कोण तथा अन्य दोनों भुजाओं का योग दिया है।
- एक त्रिभुज की रचना, जब उसका आधार, आधार कोण तथा अन्य दोनों भुजाओं का अंतर दिया है।
- एक त्रिभुज की रचना, जब उसका परिमाप और दो आधार कोण दिए हैं।
- ज्यामितीय रचना का अर्थ है कि पटरी (रूलर) और परकार का ही केवल ज्यामितीय यंत्रों के रूप में प्रयोग करते हुए, रचना करना।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: पटरी और परकार की सहायता से निम्नलिखित कोण की रचना संभव है

(A) 35° (B) 40° (C) 37.5° (D) 47.5°

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक त्रिभुज ABC, जिसमें AB = 4 cm और $\angle A = 60°$ है, की रचना संभव नहीं है, यदि BC और AC का अंतर है

(A) 3.5 cm (B) 4.5 cm (C) 3 cm (D) 2.5 cm

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. पटरी और परकार की सहायता से निम्नलिखित कोण की रचना करना संभव नहीं है :
(A) 37.5° (B) 40° (C) 22.5° (D) 67.5°

2. एक त्रिभुज ABC, जिसमें BC = 6 cm और ∠B = 45° दिया है, की रचना संभव नहीं है, यदि AB और AC का अंतर है :
(A) 6.9 cm (B) 5.2 cm (C) 5.0 cm (D) 4.0 cm

3. एक त्रिभुज ABC, जिसमें BC = 3 cm और ∠C = 60° है, की रचना संभव है जब AB और AC अंतर बराबर है :
(A) 3.2 cm (B) 3.1 cm (C) 3 cm (D) 2.8 cm

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण दीजिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : 67.5° के कोण की रचना की जा सकती है।

हल : सत्य। क्योंकि $67.5° = \frac{135°}{2} = \frac{1}{2}(90° + 45°)$ है।

प्रश्नावली 11.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सत्य या असत्य लिखिए। अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

1. 52.5° के कोण की रचना की जा सकती है।

2. 42.5° के कोण की रचना की जा सकती है।

3. एक त्रिभुज ABC की रचना की जा सकती है, जिसमें AB = 5 cm, ∠A = 45° और BC + AC = 5 cm है।

4. एक त्रिभुज ABC की रचना की जा सकती है, जिसमें BC = 6 cm, ∠C = 30° और AC – AB = 4 cm है।

5. एक त्रिभुज ABC की रचना की जा सकती है, जिसमें ∠B = 105°, ∠C = 90° और AB + BC + AC = 10 cm है।

6. एक त्रिभुज ABC की रचना की जा सकती है, जिसमें ∠B = 60°, ∠C = 45° और AB + BC + AC = 12 cm है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें BC = 7.5 cm, ∠B = 45° और AB – AC = 4 cm है।

हल : कक्षा IX की गणित की पाठ्यपुस्तक देखिए।

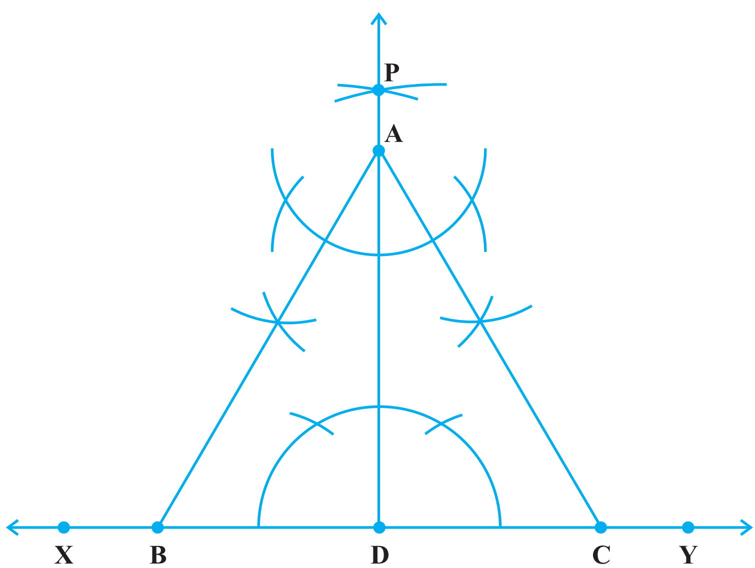
प्रश्नावली 11.3

1. चाँदे की सहायता से 110° का एक कोण खींचिए और फिर इसे समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक कोण को मापिए।
2. 4 cm लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए। क्रमश: A और B से होकर, AB पर लंब रेखाएँ खींचिए। क्या ये रेखाएँ समांतर हैं?
3. चाँदे की सहायता से 80° का एक कोण खींचिए। 40°, 160° और 120° के कोणों की रचना कीजिए।
4. 3.6 cm, 3.0 cm और 4.8 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए। सबसे छोटे कोण को समद्विभाजित कीजिए तथा प्रत्येक भाग को मापिए।
5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें BC = 5 cm, ∠B = 60° और AC + AB = 7.5 cm है।
6. 3 cm भुजा वाले एक वर्ग की रचना कीजिए।
7. एक आयत की रचना कीजिए, जिसकी आसन्न भुजाएँ 5 cm और 3.5 cm हैं।
8. एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए, जिसकी एक भुजा 3.4 cm है और जिसका एक कोण 45° का है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका शीर्षलंब 6 cm है। अपनी रचना का औचित्य दीजिए।

हल : एक रेखा XY खींचिए। इस रेखा पर कोई बिंदु D लीजिए। XY पर लंब PD की रचना कीजिए। PD में से 6 cm लंबाई का रेखाखंड AD काटिए। AD के दोनों ओर A पर 30° के बराबर दो



आकृति 11.1

कोण, मान लीजिए, $\angle CAD$ और $\angle BAD$ बनाइए, जबकि B और C रेखा XY पर स्थित हों (आकृति 11.1)। तब, त्रिभुज ABC ही वाँछित त्रिभुज है।

औचित्य: क्योंकि $\angle A = 30° + 30° = 60°$ और $AD \perp BC$ है, इसलिए ΔABC समबाहु त्रिभुज है, जिसमें शीर्षलंब AD = 6 cm है।

प्रश्नावली 11.4

निम्नलिखित में से प्रत्येक की रचना कीजिए और रचना का औचित्य दीजिए –

1. एक त्रिभुज, यदि उसका परिमाप 10.4 cm और दो कोण 45° और 120° हैं।

2. एक त्रिभुज PQR, जबकि QR = 3cm, $\angle PQR = 45°$ और QP – PR = 2 cm दिया है।

3. एक समकोण त्रिभुज जिसकी एक भुजा 3.5 cm तथा अन्य भुजा और कर्ण का योग 5.5 cm है।

4. एक समबाहु त्रिभुज, यदि इसका शीर्षलंब 3.2 cm है।

5. एक समचतुर्भुज जिसके विकर्णों की लंबाइयाँ 4 cm और 6 cm हैं।

अध्याय 12

हीरोन का सूत्र

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **आयत**

  (a) क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

  (b) परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

  (c) विकर्ण = $\sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौडाई})^2}$

- **वर्ग**

  (a) क्षेत्रफल = (भुजा)^2

  (b) परिमाप = 4 × भुजा

  (c) विकर्ण = $\sqrt{2}$ × भुजा

- **आधार (*b*) और शीर्षलंब (*h*) वाला त्रिभुज**

  क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$

- ***a*, *b* और *c* भुजाओं वाला त्रिभुज**

  (i) अर्धपरिमाप = $\frac{a+b+c}{2} = s$

  (ii) क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (हीरोन का सूत्र)

- **आधार a और बराबर भुजाओं b वाला समद्विबाहु त्रिभुज**

  समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$

- **भुजा a वाला समबाहु त्रिभुज**

  क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

- **आधार b और शीर्षलंब h वाला समांतर चतुर्भुज**

  क्षेत्रफल $= bh$

- **d_1 और d_2 विकर्णों वाला समचतुर्भुज**

  (a) क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

  (b) परिमाप $= 2\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

- **समांतर भुजाओं a और b तथा इन समांतर भुजाओं के बीच h दूरी वाला समलंब**

  क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$

- **भुजा a वाला समषड्भुज**

  क्षेत्रफल $= 6 \times$ भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : किसी समकोण त्रिभुज का आधार 8 cm और कर्ण 10 cm है। इसका क्षेत्रफल होगा

(A) 24 cm² (B) 40 cm² (C) 48 cm² (D) 80 cm²

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 8 cm^2 है। इसके कर्ण की लंबाई है।

(A) $\sqrt{32}$ cm (B) $\sqrt{16}$ cm (C) $\sqrt{48}$ cm (D) $\sqrt{24}$ cm

2. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप 60 m है। इसका क्षेत्रफल है

(A) $10\sqrt{3}\ m^2$ (B) $15\sqrt{3}\ m^2$ (C) $20\sqrt{3}\ m^2$ (D) $100\sqrt{3}\ m^2$

3. एक त्रिभुज की भुजाएँ 56 cm, 60 cm और 52 cm लंबाईयों की हैं। तब, त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) 1322 cm^2 (B) 1311 cm^2 (C) 1344 cm^2 (D) 1392 cm^2

4. $2\sqrt{3}$ cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) 5.196 cm^2 (B) 0.866 cm^2 (C) 3.496 cm^2 (D) 1.732 cm^2

5. क्षेत्रफल $9\sqrt{3}$ cm^2 वाले एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई है

(A) 8 cm (B) 36 cm (C) 4 cm (D) 6 cm

6. यदि एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $16\sqrt{3}$ cm^2 है, तो इस त्रिभुज का परिमाप है

(A) 48 cm (B) 24 cm (C) 12 cm (D) 36 cm

7. एक त्रिभुज की भुजाएँ 35 cm, 54 cm और 61 cm की हैं। इसके सबसे लंबे शीर्षलंब की लंबाई है

(A) $16\sqrt{5}$ cm (B) $10\sqrt{5}$ cm (C) $24\sqrt{5}$ cm (D) 28 cm

8. आधार 2 cm और बराबर भुजाओं में से एक भुजा 4 cm वाले समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) $\sqrt{15}\ cm^2$ (B) $\sqrt{\frac{15}{2}}\ cm^2$ (C) $2\sqrt{15}\ cm^2$ (D) $4\sqrt{15}\ cm^2$

9. एक त्रिभुजाकार बोर्ड के किनारे 6 cm, 8 cm और 10 cm लंबाईयों के हैं। इस पर 9 पैसे प्रति cm^2 की दर से पेंट कराने का व्यय है

(A) 2.00 रु (B) 2.16 रु (C) 2.48 रु (D) 3.00 रु

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या **असत्य** लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि a, b, और c एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ है, जहाँ s त्रिभुज का परिमाप है।

हल : असत्य। क्योंकि हीरोन के सूत्र में,

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \;=\; \frac{1}{2}\text{ (त्रिभुज का परिमाप) है।}$$

प्रश्नावली 12.2

***सत्य** या **असत्य** लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. आधार 4 cm और ऊँचाई 6 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 cm^2 है।
2. एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 8 cm^2 है, जिसमें AB = AC = 4 cm है तथा $\angle A = 90^\circ$ है।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{5}{4}\sqrt{11}$ cm^2 होगा, यदि उसका परिमाप 11 cm है और आधार 5 cm है।
4. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $20\sqrt{3}$ cm^2 है, जिसकी प्रत्येक भुजा 8 cm है।
5. यदि एक समचतुर्भुज की एक भुजा 10 cm और एक विकर्ण 16 cm है, तो उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 96 cm^2 है।
6. एक समांतर चतुर्भुज का आधार और संगत शीर्षलंब क्रमश: 10 cm और 3.5 cm हैं। उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 30 cm^2 है।
7. भुजा a वाले एक समषड्भुज का क्षेत्रफल भुजा a वाले पाँच समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।
8. एक त्रिभुजाकार मैदान जिसकी भुजाएँ 51 m, 37 m और 20 m हैं को 3 रु. प्रति m^2 की दर से समतल कराने का व्यय 918 रु है।
9. एक त्रिभुज की भुजाएँ 11 cm, 12 cm और 13 cm की हैं। 12 cm लंबी भुजा के संगत शीर्षलंब की लंबाई 10.25 cm है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक त्रिभुजाकर खेत की भुजाएँ 41 m, 40 m और 9 m की हैं। ज्ञात कीजिए कि इस खेत में गुलाब की कितनी क्यारियाँ बनाई जा सकती हैं, यदि औसतन प्रत्येक गुलाब की क्यारी के लिए 900 cm^2 स्थान की आवश्यकता है।

हल : मान लीजिए कि $a = 41$ m, $b = 40$ m, और $c = 9$ m है।

तब, $$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{41+40+9}{2} = 45$$

त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{45(45-41)(45-40)(45-9)}$$

$$= \sqrt{45\times4\times5\times36} = 180 \text{ m}^2$$

अतः, गुलाब की क्यारियों की संख्या $= \dfrac{180}{0.09} = 2000$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 12.1 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 122 m, 120 m और 22 m भुजाओं वाले त्रिभुज के लिए

$$s = \frac{122 + 120 + 22}{2} = 132$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{132(132-122)(132-120)(132-22)}$$

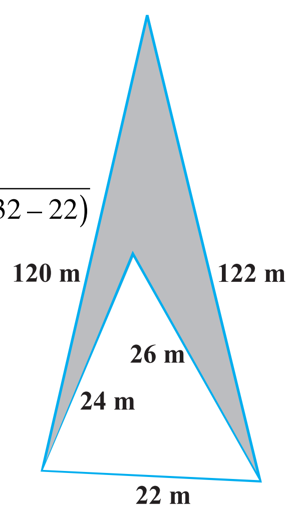
$$= \sqrt{132\times10\times12\times110}$$

$$= 1320 \text{ m}^2$$

22 m, 24 m और 26 m भुजाओं वाले त्रिभुज के लिए,

$$s = \frac{22 + 24 + 26}{2} = 36$$

इस त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{36(36-22)(36-24)(36-26)}$



आकृति 12.1

$$= \sqrt{36\times14\times12\times10}$$

$$= 24\sqrt{105}$$

$$= 24 \times 10.25 \text{ m}^2 \text{ (लगभग)}$$

$$= 246 \text{ m}^2$$

अत:, छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= (1320 - 246) \text{ m}^2$$

$$= 1074 \text{ m}^2$$

प्रश्नावली 12.3

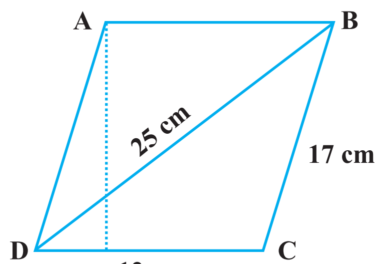
1. भुजाओं 50 m, 65 m और 65 m वाले त्रिभुजाकार खेत में 7 रु प्रति m^2 की दर से घास लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

2. एक फ्लाईओवर की त्रिभुजाकार पार्श्व दीवारों को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवारों की भुजाएँ 13 m, 14 m और 15 m हैं। विज्ञापनों से एक वर्ष में 2000 रु प्रति m^2 की दर से आय होती है। एक कंपनी इनमें से एक दीवार को 6 महीने के लिए किराए पर लेती है। उस कंपनी ने कितना किराया दिया होगा?

3. एक समबाहु त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित किसी बिंदु से तीनों भुजाओं पर लंब डाले जाते हैं। इन लंबों की लंबाई 14 cm, 10 cm और 6 cm हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 32 cm है। एक बराबर भुजा और आधार का अनुपात 3 : 2 है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 12.2 में दिए हुए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, शीर्ष A से भुजा DC पर शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.2

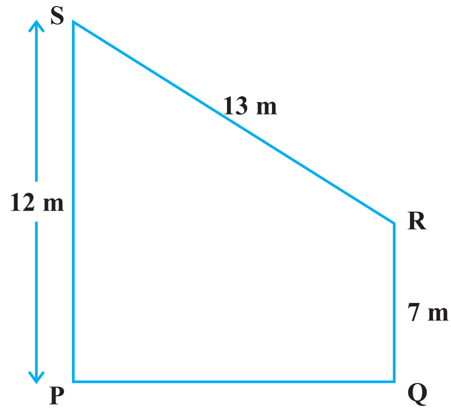
6. एक खेत एक समांतर चतुर्भुज के आकार का है, जिसकी भुजाएँ 60 m और 40 m हैं तथा एक विकर्ण 80 m है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. एक त्रिभुजाकार खेत का परिमाप 420 m है तथा इसकी भुजाओं का अनुपात 6 : 7 : 8 है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ (एक क्रम में लेने पर) 6 cm, 8 cm, 12 cm और 14 cm हैं तथा प्रथम दो भुजाओं के बीच का कोण समकोण है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक समचतुर्भुज के आकार की शीट(चादर), जिसका परिमाप 40 cm और एक विकर्ण 12cm है, को दोनों ओर से 5 रु प्रति m^2 की दर से पेंट किया जाता है। पेंट करवाने की लागत ज्ञात कीजिए।

10. आकृति 12.3 में दी हुई ऊँचाई PQ वाले समलंब PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.3

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक त्रिभुज की प्रत्येक भुजा दुगुनी कर दी जाती है, तो इस प्रकार बने नए त्रिभुज और प्रारंभिक त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि प्रारंभिक त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हैं तथा अर्धपरिमाप s है।

तब, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ है।

या, $2s = a + b + c$ है। (1)

अत:, प्रारंभिक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta$, मान लीजिए

कथन के अनुसार, नए त्रिभुज की $2a, 2b$ और $2c$ भुजाएँ हो जाती हैं। अत: नए त्रिभुज का अर्ध-परिमाप

$$S = \frac{2a+2b+2c}{2} = a+b+c \quad (2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है कि $S = 2s$ है। (3)

अत:, नए त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\sqrt{S(S-2a)(S-2b)(S-2c)}$$

$$=\sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$$

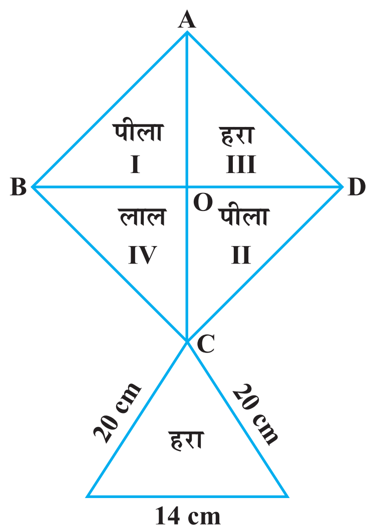
$$=\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4\Delta$$

अत:, वाँछित अनुपात 4:1 है।

प्रश्नावली 12.4

1. आकृति 12.4 में दी हुई पतंग को बनाने के लिए प्रत्येक शेड (रंग) के कितने कागज की आवश्यकता होगी, यदि ABCD विकर्ण 44 cm वाला एक वर्ग है।



आकृति 12.4

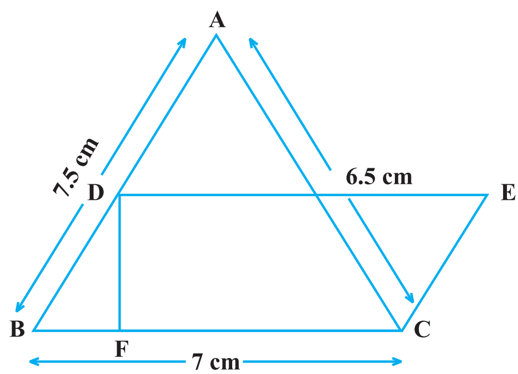
2. एक त्रिभुज का परिमाप 50 cm है। त्रिभुज की एक भुजा छोटी भुजा से 4 cm लंबी है तथा तीसरी भुजा छोटी भुजा के दुगुने से 6 cm कम है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक समलंब का क्षेत्रफल 475 cm^2 है तथा ऊँचाई 19 cm है। इसकी समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए, यदि एक समांतर भुजा दूसरी समांतर भुजा से 4 cm अधिक है।

4. एक मकान का निर्माण करने के लिए एक आयताकार भूखंड दिया गया, जिसकी लंबाई 40 m है तथा सामने की चौडाई 15 m है। नियमों के अनुसार, सामने और पीछे की ओर न्यूनतम 3 m चौड़ी जगह तथा प्रत्येक अन्य ओर पर न्यूनतम 2 m चौड़ी जगह छोड़नी आवश्यक है। वह अधिकतम क्षेत्र ज्ञात कीजिए जिसमें मकान का निर्माण किया जा सकता है।

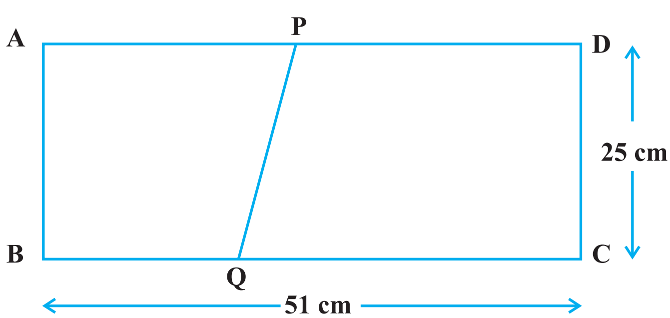
5. एक खेत समलंब के आकार का है, जिसकी समांतर भुजाएँ 90 m और 30 m की हैं। ये दोनों भुजाएँ तीसरी भुजा से समकोण पर मिलती हैं। चौथी भुजा की लंबाई 100 m की है। यदि $1 m^2$ खेत की जुताई की लागत 4 रु है, तो खेत की जुताई में लगने वाली कुल लागत ज्ञात कीजिए।

6. आकृति 12.5 में, Δ ABC की भुजाओं में AB = 7.5 cm, AC = 6.5 cm और BC = 7 cm है। आधार BC पर एक समांतर चतुर्भुज DBCE की रचना की जाती है, जो क्षेत्रफल में Δ ABC के बराबर है। इस समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई DF ज्ञात कीजिए।



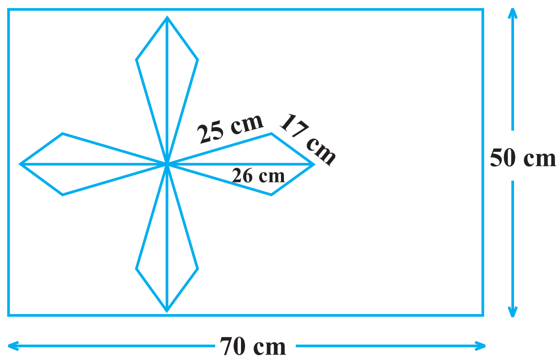
आकृति 12.5

7. एक आयत ABCD की विमाएँ 51 cm × 25 cm हैं। इस आयत में से एक समलंब PQCD काटा जाता है, जिसकी समांतर भुजाएँ QC और PD हैं और ये 9 : 8 के अनुपात में हैं, जैसा कि आकृति 12.6 में दर्शाया गया है। यदि समलंब PQCD का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का $\frac{5}{6}$ भाग है, तो QC और PD की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.6

8. 50 cm × 70 cm विमाओं वाली एक आयताकार टाइल पर, आकृति 12.7 में दर्शाए अनुसार एक डिज़ाइन बनाया जाता है। इस डिज़ाइन में 8 त्रिभुज हैं, जिनमें से प्रत्येक की भुजा 26 cm, 17 cm और 25 cm की हैं। डिज़ाइन का पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा टाइल के शेष भाग का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.7

अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **घनाभ जिसकी लंबाई = l, चौड़ाई = b और ऊँचाई = h**

  (a) घनाभ का आयतन = lbh

  (b) घनाभ का कुल या संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

  (c) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2h(l + b)$

  (d) घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

- **घन जिसका किनारा या कोर = a**

  (a) घन का आयतन = a^3

  (b) घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

  (c) घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

  (d) घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$

- **बेलन जिसकी त्रिज्या = r, ऊँचाई = h**

  (a) बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

  (b) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

  (c) बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल= $2\pi r(r + h)$

- **शंकु जिसकी ऊँचाई = h, त्रिज्या = r और तिर्यक ऊँचाई = l**

  (a) शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(b) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

(c) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r)$

(d) शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

- **गोला जिसकी त्रिज्या $= r$**

(a) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

(b) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

- **अर्धगोला जिसकी त्रिज्या $= r$**

(a) अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

(b) अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(c) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक बेलन की त्रिज्या आधी कर दी जाए और ऊँचाई दुगुनी कर दी जाए, तो उसका आयतन होगा

(A) वही (B) दुगुना (C) आधा (D) चार गुना

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 13.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. यदि एक गोले की त्रिज्या $2r$ है, तो उसका आयतन होगा

(A) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (B) $4\pi r^3$ (C) $\frac{8\pi r^3}{3}$ (D) $\frac{32}{3}\pi r^3$

2. एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 96 cm^2 है। घन का आयतन है:

(A) 8 cm^3 (B) 512 cm^3 (C) 64 cm^3 (D) 27 cm^3

3. एक शंकु की ऊँचाई 8.4 cm है और उसके आधार की त्रिज्या 2.1 cm है। इसे पिघला कर एक गोले के रूप में ढाला जाता है। गोले की त्रिज्या है

(A) 4.2 cm (B) 2.1 cm (C) 2.4 cm (D) 1.6 cm

4. यदि एक बेलन की त्रिज्या दोगुनी कर दी जाए और ऊँचाई आधी कर दी जाए, तो इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा

(A) आधा (B) दोगुना (C) वही (D) चार गुना

5. एक शंकु जिसकी त्रिज्या $\frac{r}{2}$ और तिर्यक ऊँचाई $2l$ है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा

(A) $2\pi r (l + r)$ (B) $\pi r (l + \frac{r}{4})$ (C) $\pi r (l + r)$ (D) $2\pi rl$

6. दो बेलनों की त्रिज्याएँ 2:3 के अनुपात में हैं तथा उनकी ऊँचाईयों का अनुपात 5:3 है। उनके आयतनों का अनुपात है

(A) 10 : 17 (B) 20 : 27 (C) 17 : 27 (D) 20 : 37

7. एक घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 256 m^2 है। घन का आयतन है

(A) 512 m^3 (B) 64 m^3 (C) 216 m^3 (D) 256 m^3

8. 16m लंबे, 12m चौड़े और 4m गहरे एक गड्ढे में रखे जा सकने वाले 4 m × 50 cm × 20cm विमाओं वाले तख्तों की संख्या है

(A) 1900 (B) 1920 (C) 1800 (D) 1840

9. 10 m × 10 m × 5m विमाओं वाले एक कमरे में रखे जा सकने वाले सबसे लंबे डंडे की लंबाई है

(A) 15 m (B) 16 m (C) 10 m (D) 12 m

10. एक अर्धगोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 6 cm से 12 cm हो जाती है। दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 2 : 3 (D) 2 : 1

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

***सत्य** या **असत्य** लिखिए और उत्तर का औचित्य दीजिए –*

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक लंब वृत्तीय बेलन एक गोले के परिगत है, जिसकी त्रिज्या r है, जैसाकि आकृति 13.1 में दर्शाया गया है। गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है।

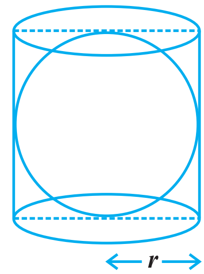
हल : सत्य।

यहाँ गोले की त्रिज्या = बेलन की त्रिज्या $= r$

गोले का व्यास = बेलन की ऊँचाई $= 2r$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(2r) = 4\pi r^2$



आकृति 13.1

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक घन का किनारा r cm है। यदि इस घन में से सबसे बड़ा संभव लंब वृत्तीय शंकु काटा जाता है, तो शंकु का आयतन (cm³ में) $\frac{1}{6}\pi r^3$ है।

हल : असत्य।

शंकु की ऊँचाई = r cm

आधार का व्यास = r cm

$$\text{अत:, शंकु का आयतन } = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 . r$$

$$= \frac{1}{12}\pi r^3$$

प्रश्नावली 13.2

*निम्नलिखित में से प्रत्येक में **सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:*

1. एक गोले का आयतन उस बेलन के आयतन का $\frac{2}{3}$ होता है जिसकी ऊँचाई और व्यास गोले के व्यास के बराबर है।

2. यदि एक लंब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या आधी कर दी जाए और ऊँचाई दुगुनी कर दी जाए, तो उसके आयतन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

3. एक लंब वृत्तीय शंकु में ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई सदैव एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं होते हैं।

4. यदि एक बेलन की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए तथा उसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन न किया जाए, तो उसकी ऊँचाई अवश्य ही आधी हो जाएगी।

5. किनारे $2r$ वाले एक घन में समावेशित किए जा सकने वाले सबसे बड़े लंब वृत्तीय शंकु का आयतन त्रिज्या r वाले अर्ध गोले के आयतन के बराबर होता है।

6. एक बेलन और एक लंब वृत्तीय शंकु के समान आधार और समान ऊँचाई हैं। बेलन का आयतन शंकु के आयतन का तिगुना है।

7. एक शंकु, अर्ध गोला और बेलन समान आधार और समान ऊँचाई के हैं। इनके आयतनों का अनुपात 1 : 2 : 3 है।

8. यदि किसी घन के विकर्ण की लंबाई $6\sqrt{3}$ cm है तो उसके किनारे की लंबाई 3 cm है।

9. यदि एक गोला एक घन के अंतर्गत है, तो घन के आयतन का गोले के आयतन से अनुपात $6 : \pi$ है।

10. यदि एक बेलन की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए और उसकी ऊँचाई आधी कर दी जाए, तो उसका आयतन दुगुना हो जाएगा।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: 5 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 4 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का पाँच गुना है। शंकु की ऊँचाई और आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लेते हुए)।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi \times 5 \times 5 \text{ cm}^2$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi \times 4 \times l \text{ cm}^2$

जहाँ l शंकु की तिर्यक ऊँचाई है।

प्रश्नानुसार

$$4\pi \times 5 \times 5 = 5 \times \pi \times 4 \times l$$

या $$l = 5 \text{ cm}$$

अब, $$l^2 = h^2 + r^2$$

अत:, $$(5)^2 = h^2 + (4)^2$$

जहाँ h शंकु की उँचाई है।

या $$(5)^2 - (4)^2 = h^2$$

या $$(5 + 4)(5 - 4) = h^2$$

या $$9 = h^2$$

या $h = 3 \text{ cm}$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3 \text{ cm}^3$

$= \frac{22 \times 16}{7} \text{ cm}^3$

$= \frac{352}{7} \text{ cm}^3 = 50.29 \text{ cm}^3$ (लगभग)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक गोले की त्रिज्या में 10% की वृद्धि की जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस गोले के आयतन में 33.1% की वृद्धि हो जाएगी।

हल : गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या में 10% की वृद्धि $= 10\% \ r$

अतः, बढ़ी हुई त्रिज्या $= r + \frac{1}{10}r = \frac{11}{10}r$

अब गोले का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{11}{10}r\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1331}{1000} r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3$

इसलिए, आयतन में वृद्धि $= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3 \ (1.331 - 1) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331$

अत:, आयतन में प्रतिशत वृद्धि= $\left[\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times 100\right] = 33.1$

प्रश्नावली 13.3

1. एक 16 cm × 8 cm × 8 cm आंतरिक विमाओं वाले आयताकार पेटी में, धातु के गोले पैक किए जाते हैं जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 2 cm है। 16 गोले पैक किए (रखे) जाने पर पेटी को एक परिरक्षक द्रव से भर दिया जाता है। इस द्रव का आयतन ज्ञात कीजिए। अपना उत्तर निकटतम पूर्णांक तक दीजिए। [$\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।]

2. पानी को संचरित करने वाली एक टंकी एक घन के आकार की है। इसे पूरा भरने पर, इसमें पानी का आयतन 15.625 m^3 है। यदि इस समय टंकी में पानी की गहराई 1.3 m है तो इस टंकी में से पहले से प्रयुक्त किए गए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

3. यदि 4.2 cm व्यास वाली एक गोलाकार गेंद को पूर्णत: पानी में डुबो दिया जाए, तो उसके द्वारा विस्थापित पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. उस शंक्वाकार तंबू को बनाने में लगे केनवास की मात्रा ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 3.5 m है तथा आधार की त्रिज्या 12 m है।

5. एक ही धातु के बने दो ठोस गोलों का भार 5920 g और 740 g है। यदि छोटे गोले का व्यास 5 cm है, तो बड़े गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. कोई स्कूल अपने विद्यार्थियों को प्रत्येक दिन 7 cm व्यास वाले बेलनाकार गिलासों में दूध देता है। यदि गिलास दूध से 12 cm ऊँचाई तक भरा रहता है, तो ज्ञात कीजिए कि 1600 विद्यार्थियों के लिए प्रतिदिन कितने लीटर दूध की आवश्यकता होगी?

7. 2.5 m लंबे और 1.75 m त्रिज्या वाले एक बेलनाकार रोलर (roller) को जब सड़क पर रोल किया गया तो पाया गया कि उसने 5500 m^2 के क्षेत्रफल को तय कर लिया है। रोलर ने कितने चक्कर लगा लिए थे?

8. 5000 जनसंख्या वाले एक छोटे गाँव में प्रतिदिन प्रति व्यक्ति 75 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गाँव में 40 m × 25 m × 15 m मापन की एक उपरि टंकी है। इस टंकी का पानी कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा?

9. एक दुकानदार के पास 5cm त्रिज्या का एक लड्डू है। इतनी ही सामग्री से 2.5 cm त्रिज्या वाले कितने लड्डू बनाए जा सकते हैं?

10. 6 cm, 8 cm और 10 cm वाले एक समकोण त्रिभुज को उसकी 8 cm वाली भुजा के परित: घुमाया जाता है। इस प्रकार बनने वाले ठोस का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: वर्षा के पानी को, जो 6 m लंबाई और 4 m चौड़ाई के एक सपाट आयताकार पृष्ठ पर गिरता है, एक आंतरिक त्रिज्या 20 cm वाले एक बेलनाकार बर्तन में स्थानांतरित कर लिया जाता है। यदि वर्षा 1 cm हुई है, तो बेलनाकार बर्तन में पानी कितनी ऊँचाई तक भर जाएगा? अपना उत्तर निकटतम पूर्णांक तक दीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : मान लीजिए कि बेलनाकार बर्तन में पानी का स्तर h cm है।

अत: वर्षा के पानी का आयतन $= 600 \times 400 \times 1 \text{ cm}^3$

बेलनाकार बर्तन में पानी का आयतन $= \pi (20)^2 \times h \text{ cm}^3$

प्रश्नानुसार,

$$600 \times 400 \times 1 = \pi (20)^2 \times h$$

या

$$h = \frac{600}{3.14} \text{ cm} = 191 \text{ cm}$$

प्रश्नावली 13.4

1. दोनों ओर से खुली एक बेलनाकार ट्यूब एक लोहे की चादर की बनी है जिसकी मोटाई 2 cm है। यदि इसका व्यास 16 cm और लंबाई 100 cm है तो ज्ञात कीजिए कि इस ट्यूब के बनाने में कितने cm^3 लोहे का प्रयोग किया गया है।

2. 28 cm व्यास वाली एक अर्धवृत्ताकार धातु की चादर को मोड़कर एक शंकु के आकार का खुला कप बनाया गया है। इस कप की धारिता ज्ञात कीजिए।

3. 165 m^2 क्षेत्रफल वाले एक कपड़े को 5 m त्रिज्या वाले एक शंक्वाकार तंबू के रूप में बनाया जाता है।

(i) इस तंबू में कितने विद्यार्थी बैठ सकते हैं, यदि औसतन एक विद्यार्थी भूमि पर $\frac{5}{7}\text{m}^2$ स्थान घेरता है?

(ii) इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. किसी फैक्ट्री के लिए पानी एक अर्धगोलाकार टंकी में संचरित किया जाता है जिसका आंतरिक व्यास 14 m है। इस टंकी में 50 किलोलीटर पानी है। इस टंकी को पूरा भरने के लिए पानी पंप द्वारा भरा जाता है। टंकी में पंप द्वारा भरे गए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

5. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। इनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. 4 cm भुजा वाले एक घन के अंदर एक गोला है जो उसकी भुजाओं को स्पर्श करता है। इन दोनों के बीच में रिक्त स्थान का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. एक ही त्रिज्या वाले एक गोले और एक लंब वृत्तीय बेलन के आयतन बराबर हैं। बेलन का व्यास उसकी ऊँचाई से कितने प्रतिशत अधिक है?

8. 30 वृत्ताकार प्लेटों को जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 14 cm और मोटाई 3cm है, एक के ऊपर एक रखकर एक बेलनाकार ठोस बनाया जाता है। इस प्रकार बने बेलन का ज्ञात कीजिए :

(i) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल,

(ii) आयतन

अध्याय 14

सांख्यिकी और प्रायिकता

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

सांख्यिकी

'सांख्यिकी' का अर्थ, प्राथमिक और गौण आँकड़े, यथाप्राप्त/अवर्गीकृत आँकड़े। आँकड़ों का परिसर (परास), वर्गीकृत आँकड़े – वर्ग अंतराल, वर्ग चिह्न, आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण – बारंबारता बंटन सारणी, विच्छिंद (असतत) बारंबारता बंटन तथा सतत बारंबारता बंटन।

- *आँकड़ों का आलेखीय निरूपण*

  (i) दंड आलेख

  (ii) एक समान चौड़ाई तथा असमान चौड़ाई वाले आयतचित्र

  (iii) बारंबारता बहुभुज

- *केंद्रीय प्रवृति के मापक*

  (a) माध्य

  (i) यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य

$$\text{माध्य} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \text{ जहाँ}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n प्रेक्षण हैं।

(ii) अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

जहाँ f_i , x_i की बारंबारताएँ हैं।

(b) माध्यक

माध्यक आँकड़ों का वह मान है जो आँकड़ों को दो बराबर भागों में बाँटता है, जब कि आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित कर लिया गया है।

माध्यक का परिकलन

जब आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित कर लिया गया है, तो इन आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित प्रकार से परिकलित किया जाता है :

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम है, तो माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण होता है।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम है, तो माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वें}}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वें}}$ प्रेक्षणों का औसत या माध्य होता है।

(c) बहुलक

वह प्रेक्षण जो अधिकतम बार आता है, अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाला प्रेक्षण **बहुलक** कहलाता है। अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक प्रेक्षित/देख कर ही निर्धारित किया जा सकता है।

प्रायिकता

- यादृच्छिक (या यदृच्छ) प्रयोग या केवल एक प्रयोग
- एक प्रयोग के परिणाम
- एक प्रयोग के अभिप्रयोग का अर्थ
- एक घटना E की प्रायोगिक (आनुभविक) प्रायिकता जिसे P(E) से व्यक्त करते हैं, निम्नलिखित से दी जाती है:

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

- घटना E की प्रायिकता 0 से 1 तक कोई भी संख्या हो सकती है। विशेष स्थितियों में यह 0 या 1 भी हो सकती है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: गणित के एक टेस्ट में 17 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक नीचे दिए गए हैं:

91, 82, 100, 100, 96, 65, 82, 76, 79, 90, 46, 64, 72, 68, 66, 48, 49.

इन आँकड़ों का परिसर है:

(A) 46 (B) 54 (C) 90 (D) 100

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: वर्ग 130-150 का वर्ग चिह्न है :

(A) 130 (B) 135 (C) 140 (D) 145

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक पासे को 1000 बार फेंका गया और परिणाम निम्नलिखित प्रकार से रिकार्ड किए गए:

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	180	150	160	170	150	190

यदि पासे को एक बार और फेंका जाए तो इसकी प्रायिकता कि यह 5 दर्शाएगा:

(A) $\frac{9}{50}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{7}{25}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 14.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. वर्ग 90-120 का वर्ग चिह्न है :

(A) 90 (B) 105 (C) 115 (D) 120

2. 25, 18, 20, 22, 16, 6, 17, 15, 12, 30, 32, 10, 19, 8, 11, 20 आँकड़ों का परिसर है:

(A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 26

3. एक बारंबारता बंटन में, एक वर्ग का मध्य-बिंदु 10 है तथा उसकी चौड़ाई 6 है। इस वर्ग की निम्न सीमा है:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12

4. किसी बारंबारता बंटन में पाँच सतत वर्गों में से प्रत्येक की चौड़ाई 5 है तथा सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा 10 है। सबसे बड़े वर्ग की उपरि सीमा है:

(A) 15 (B) 25 (C) 35 (D) 40

5. मान लीजिए कि एक सतत बारंबारता बंटन में एक वर्ग का मध्य-बिंदु m है और उपरि वर्ग सीमा l है। इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा है:

(A) $2m + l$ (B) $2m - l$ (C) $m - l$ (D) $m - 2l$

6. एक बारंबारता बंटन के वर्ग चिह्न 15, 20, 25, ... हैं। वर्ग चिह्न 20 के संगत वर्ग हैं:

(A) 12.5 – 17.5 (B) 17.5 – 22.5 (C) 18.5 – 21.5 (D) 19.5 – 20.5

7. वर्ग अंतराल 10-20, 20-30, में संख्या 20 निम्नलिखित में सम्मिलित है :

(A) 10-20 (B) 20-30

(C) दोनों अंतरालों में (D) इनमें से किसी में भी नहीं

8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, एक अंतराल 250-270 (270 सम्मिलित नहीं) लेते हुए बराबर मापों के वर्ग अंतरालों वाली एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी की रचना की जाती है :

268, 220, 368, 258, 242, 310, 272, 342, 310, 290, 300, 320, 319, 304, 402, 318, 406, 292, 354, 278, 210, 240, 330, 316, 406, 215, 258, 236.

वर्ग अंतराल 310-330 की बारंबारता है :

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

9. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए एक वर्ग 63-72 (72 सम्मिलित है) लेते हुए बराबर मापों के वर्ग वाली एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी की रचना की जाती है :

30, 32, 45, 54, 74, 78, 108, 112, 66, 76, 88, 40, 14, 20, 15, 35, 44, 66, 75, 84, 95, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 14, 34, 44.

इस बंटन में वर्गों की संख्या होगी :

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

10. बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल	5-10	10-15	15-25	25-45	45-75
बारंबारता	6	12	10	8	15

का एक आयतचित्र खींचने के लिए, वर्ग 25 – 45 की समायोजित बारंबारता है :

(A) 6 (B) 5 (C) 3 (D) 2

11. पाँच संख्याओं का माध्य 30 है। यदि इनमें से एक संख्या को हटा दिया जाए, तो उनका माध्य 28 हो जाता है। हटाई गई संख्या है

(A) 28 (B) 30 (C) 35 (D) 38

12. यदि $x, x+3, x+5, x+7$ प्रेक्षणों और $x+10$ का माध्य 9 है, तो अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य है

(A) $10\frac{1}{3}$ (B) $10\frac{2}{3}$ (C) $11\frac{1}{3}$ (D) $11\frac{2}{3}$

13. यदि n प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ के माध्य को $\overline{x}$ से निरूपित किया जाता है, तो $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ का मान है:

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) $n - 1$

14. यदि आँकड़ों के प्रत्येक प्रेक्षण में 5 की वृद्धि की जाती है तो उनका माध्य

(A) वही रहता है (B) प्रारंभिक माध्य का पाँच गुना हो जाता है

(C) 5 कम हो जाता है (D) 5 बढ़ जाता है

15. यदि $x_1, x_2, ... , x_n$ का माध्य $\overline{x}$ है, $y_1, y_2, ... , y_n$ का माध्य $\overline{y}$ है तथा $x_1, x_2, ... , x_n, y_1, y_2, ... , y_n$ का माध्य $\overline{z}$ है, तो $\overline{z}$ बराबर है:

(A) $\overline{x}+\overline{y}$ (B) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$ (C) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{n}$ (D) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2n}$

16. यदि $x_1, x_2, ... , x_n$ का माध्य $\overline{x}$ है, तो $a \neq 0$, के लिए $ax_1, ax_2, ..., ax_n, \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, ... , \frac{x_n}{a}$ का माध्य है

(A) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\overline{x}$ (B) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\overline{x}}{2}$ (C) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\overline{x}}{n}$ (D) $\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)\overline{x}}{2n}$

17. यदि $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, ... , \overline{x}_n$ क्रमशः प्रेक्षणों की संख्या $n_1, n_2, ... , n_n$ वाले n समूहों के माध्य हैं, तो सभी समूहों को मिलाकर लेने पर उनका माध्य $\overline{x}$ निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

(A) $\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i$ (B) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{n^2}$ (C) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ (D) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{2n}$

18. 100 प्रेक्षणों का माध्य 50 है। यदि इनमें से एक प्रेक्षण 50 को 150 से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो परिणामी माध्य हो जाएगा :

(A) 50.5 (B) 51 (C) 51.5 (D) 52

19. 50 संख्याएँ दी हुई हैं। इनमें से प्रत्येक संख्या को 53 में से घटाया जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त संख्याओं का माध्य –3.5 ज्ञात किया जाता है। दी हुई संख्याओं का माध्य है :

(A) 46.5 (B) 49.5 (C) 53.5 (D) 56.5

20. 25 प्रेक्षणों का माध्य 36 है। इन प्रेक्षणों में से यदि प्रथम 13 प्रेक्षणों का माध्य 32 है तथा अंतिम 13 का माध्य 40 है तो 13वाँ प्रेक्षण है :

(A) 23 (B) 36 (C) 38 (D) 40

21. 78, 56, 22, 34, 45, 54, 39, 68, 54, 84 आँकड़ों का माध्यक है

(A) 45 (B) 49.5 (C) 54 (D) 56

22. एक सतत बारंबारता बंटन का बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए, हम उन बिंदुओं को आलेखित करते हैं जिनकी कोटियाँ क्रमश: वर्गों की बारंबारताएँ होती हैं तथा भुज क्रमश: होते हैं

(A) वर्गों की उपरि सीमाएँ (B) वर्गों की निम्न सीमाएँ

(C) वर्गों के वर्ग चिन्ह (D) पिछले वर्गों की उपरि सीमाएँ

23. 4, 4, 5, 7, 6, 7, 7, 12, 3 संख्याओं का माध्यक है :

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

24. 15, 14, 19, 20, 14, 15, 16, 14, 15, 18, 14, 19, 15, 17, 15 आँकड़ों का बहुलक है :

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17

25. 642 व्यक्तियों पर किए गए एक प्रतिदर्श अध्ययन में यह पाया गया कि 514 व्यक्तियों के पास हाई स्कूल सर्टिफिकेट हैं। यदि इनमें एक व्यक्ति को यादृच्छिक रूप से चुना जाए तो इसकी प्रायिकता कि उस व्यक्ति के पास हाई स्कूल सर्टिफिकेट है:

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

26. 19-36 महीने की आयु वाले 364 बच्चों पर किए गए एक सर्वे में यह पाया गया कि 91 बच्चे आलू के चिप्स खाना पसंद करते हैं। इनमें से एक बच्चा यदि यादृच्छिक (यदृच्छ) रूप से चुना जाता है तो इसकी प्रायिकता कि वह बच्चा आलू के चिप्स पसंद नहीं करेगा, है :

(A) 0.25 (B) 0.50 (C) 0.75 (D) 0.80

27. किसी कक्षा के विद्यार्थियों की एक मेडिकल परीक्षा में निम्नलिखित रक्त समूह रिकार्ड किए गए:

रक्त समूह	A	AB	B	O
विद्यार्थियों का समूह	10	13	12	5

इस कक्षा में से एक विद्यार्थी यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस विद्यार्थी का रक्त समूह B होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{13}{40}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{8}$

28. दो सिक्कों को 1000 बार उछाला जाता है और इनके परिणाम निम्नलिखित प्रकार से रिकार्ड किए जाते हैं:

चितों की संख्या	2	1	0
बारंबारता	200	550	250

इस सूचना के आधार पर, अधिकतम एक चित की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

29. एक संग्रह में से 80 बल्ब यादृच्छिक रूप से चुने जाते हैं और उनके जीवन कालों (घंटों में) को निम्नलिखित बारंबारता सारणी के रूप में रिकार्ड किया गया :

जीवन काल (घंटों में)	300	500	700	900	1100
बारंबारता	10	12	23	25	10

इस संग्रह में से एक बल्ब यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस बल्ब का जीवन काल 1150 घंटा होने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{80}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) 0 (D) 1

30. उपरोक्त प्रश्न 29 को देखिए। इस संग्रह में से एक बल्ब यादृच्छय रूप से चुने जाने पर, इसका जीवन काल 900 घंटे से कम होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{11}{40}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आँकड़ों 2, 8, 6, 5, 4, 5, 6, 3, 6, 4, 9, 1, 5, 6, 5 का माध्य 5 दिया गया है। इस सूचना के आधार पर क्या यह कहना सही है कि 10, 12, 10, 2, 18, 8, 12, 6, 12, 10, 8, 10, 12, 16, 4 आँकड़ों का माध्य 10 है? कारण दीजिए।

हल : यह सही है। क्योंकि दूसरे आँकड़ों में प्रत्येक प्रेक्षण पहले आँकड़ों के प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा करके प्राप्त किया गया है, इसलिए माध्य पहले आँकड़ों के माध्य का दुगुना होगा।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक आयतचित्र में आयतों के क्षेत्रफल बारंबारताओं के समानुपाती हैं। क्या आप कह सकते हैं कि आयतों की लंबाइयाँ भी बारंबारताओं के समानुपाती हैं?

हल : नहीं। यह तभी सत्य होगा, जब सभी वर्गमाप बराबर हों।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आँकड़ों 2, 3, 9, 16, 9, 3, 9 पर विचार कीजिए। क्योंकि सबसे बड़ा मान 16 है, तो क्या यह कहना सही है कि आँकड़ों का बहुलक 16 है? कारण दीजिए।

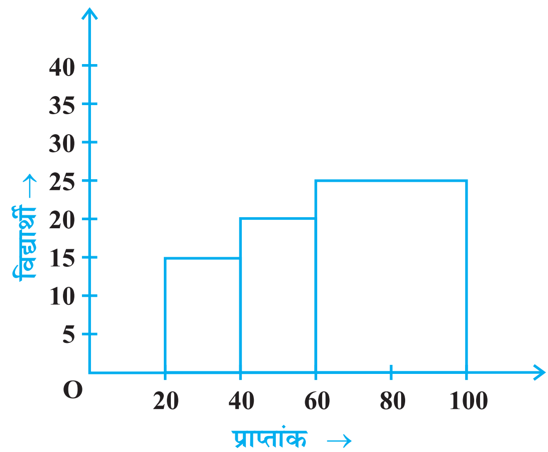
हल : इन आँकड़ों का बहुलक 16 नहीं है। दिए हुए आँकड़ों का बहुलक अधिकतम बारंबारता वाला प्रेक्षण होता है न कि अधिकतम मान वाला प्रेक्षण।

प्रश्नावली 14.2

1. बारंबारता सारणी

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-100
विद्यार्थियों की संख्या	10	15	20	25

को आलेखीय रूप से नीचे दर्शाए अनुसार निरूपित किया गया है :



आकृति 14.1

क्या आप सोचते हैं कि यह निरूपण सही है? क्यों?

2. विद्यार्थियों को दिए गए गणित के एक निदानात्मक टेस्ट में (100 में से) उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

46, 52, 48, 11, 41, 62, 54, 53, 96, 40, 98, 44

उपरोक्त आँकड़ों के लिए कौन-सा 'औसत' एक अच्छा प्रतिनिधित्व करेगा और क्यों?

3. एक बच्चा कहता है कि 3, 14, 18, 20, 5 का माध्यक 18 है। यह बच्चा माध्यक ज्ञात करने के बारे में क्या नहीं जानता है?

4. फुटबाल के एक खिलाड़ी द्वारा 10 मैचों में किए गए गोलों की संख्या निम्नलिखित है:

1, 3, 2, 5, 8, 6, 1, 4, 7, 9

क्योंकि मैचों की संख्या 10 (एक सम संख्या) है, इसलिए

$$\text{माध्यक} = \frac{5^{\text{वाँ}} \text{ प्रेक्षण} + 6^{\text{वाँ}} \text{ प्रेक्षण}}{2} = \frac{8+6}{2} = 7$$

क्या यह सही उत्तर है और क्यों?

5. क्या यह कहना सही है कि आयतचित्र में प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल संगत वर्ग अंतराल की माप के समानुपाती होता है? यदि नहीं, तो कथन को सही रूप में लिखिए।

6. एक सतत बंटन के वर्ग चिह्न निम्नलिखित हैं :

1.04, 1.14, 1.24, 1.34, 1.44, 1.54 और 1.64

क्या यह कहना सही है कि अंतिम अंतराल 1.55 - 1.73 होगा ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

7. 30 बच्चों से पूछा गया कि उन्होंने पिछले सप्ताह कितने घंटे टी.वी. के प्रोग्राम देखे। इसके परिणाम निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

घंटों की संख्या	0-5	5-10	10-15	15-20
बारंबारता	8	16	4	2

क्या हम कह सकते हैं कि उस सप्ताह में 10 या उससे अधिक घंटों तक टी वी देखने वाले बच्चों की संख्या 22 है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए ।

8. क्या किसी घटना की प्रायोगिक प्रायिकता एक ऋणात्मक संख्या हो सकती है? यदि नहीं, तो क्यों?

9. क्या किसी घटना की प्रायोगिक प्रायिकता 1 से अधिक हो सकती है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

10. जैसे-जैसे एक सिक्के के उछालों की संख्या बढ़ती जाती है, चितों की संख्या और पटों की संख्या का अनुपात $\frac{1}{2}$ हो जाता है। क्या यह सही है? यदि नहीं, तो इसे सही रूप में लिखिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : कक्षा IX की 30 लड़कियों की लंबाई (cm में) नीचे दी गई हैं:

140, 140, 160, 139, 153, 153, 146, 150, 148, 150, 152, 146, 154, 150, 160, 148, 150, 148, 140, 148, 153, 138, 152, 150, 148, 138, 152, 140, 146, 148.

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी तैयार कीजिए।

हल : 30 लड़कियों की लंबाइयों का बारंबारता बंटन

लंबाई (cm में)	**मिलान चिह्न**	**बारंबारता**
138	||	2
139	|	1
140	||||	4
146	|||	3
148	𝍸 |	6
150	𝍸	5
152	|||	3
153	|||	3
154	|	1
160	||	2
	योग	**30**

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित आँकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है:

26, 29, 42, 53, x, $x + 2$, 70, 75, 82, 93

यदि इनका माध्यक 65 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रेक्षणों की संख्या $(n) = 10$ है जो एक सम संख्या है।

अतः, माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वें}}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वें}}$ अर्थात् $5^{\text{वें}}$ और $6^{\text{वें}}$ पदों का माध्य होगा।

यहाँ $5^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण $= x$ और

$6^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण $= x + 2$ है।

अतः, माध्यक $= \frac{x+(x+2)}{2} = x+1$

अब, $x + 1 = 65$ (दिया है)

अतः, $x = 64$

अर्थात्, x का मान 64 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यहाँ एक जन्म-मृत्यु दर सारणी का एक अंश दिया गया है:

आयु (वर्षों में)	एक मिलियन के प्रतिदर्श (जनसंख्या) में से जीवित बचने वाले व्यक्तियों की संख्या
60	16090
61	11490
62	8012
63	5448
64	3607
65	2320

(i) इस सूचना के आधार पर, 60 वर्ष की आयु के व्यक्ति की एक वर्ष के अंदर मृत्यु हो जाने की प्रायिकता क्या है?

(ii) इसकी प्रायिकता क्या है कि 61 वर्ष की आयु वाला व्यक्ति 4 वर्ष तक जीवित रहेगा?

हल :

(i) हम देखते हैं कि 60 वर्ष की आयु वाले कुल 16090 व्यक्तियों में से (16090 – 11490), अर्थात् 4600 व्यक्ति 61वें वर्ष के होने से पहले ही मर जाते हैं।

अत:, P(60 वर्ष की आयु के व्यक्ति की एक वर्ष के अंदर मृत्यु) = $\frac{4600}{16090} = \frac{460}{1609}$

(ii) 61 वर्ष की आयु वाले व्यक्तियों की संख्या = 11490

इनमें से 4 वर्ष तक जीवित बचने वाले व्यक्तियों की संख्या = 2320

अत:, P(61 वर्ष की आयु का व्यक्ति 4 वर्ष तक जीवित बचेगा) = $\frac{2320}{11490} = \frac{232}{1149}$

प्रश्नावली 14.3

1. 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

A, B, O, A, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, AB, B, A, AB, B,
A, A, O, A, AB, B, A, O, B, A, B, A

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी तैयार कीजिए।

2. π का मान 35 दशमलव स्थानों तक नीचे दिया गया है :

3.14159265358979323846264338327950288

दशमलव बिंदु के बाद आने वाले 0 से 9 अंकों तक की एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

3. गणित के एक टेस्ट में, 33 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

69, 48, 84, 58, 48, 73, 83, 48, 66, 58, 84, 66, 64, 71, 64, 66, 69, 66, 83, 66, 69, 71, 81, 71, 73, 69, 66, 66, 64, 58, 64, 69, 69

इन आँकड़ों को एक बारंबारता बंटन द्वारा निरूपित कीजिए।

4. निम्नलिखित आँकड़ों से एक सतत बारंबारता बंटन तैयार कीजिए :

मध्य-बिंदु	बारंबारता
5	4
15	8
25	13
35	12
45	6

वर्ग अंतरालों के माप भी ज्ञात कीजिए।

5. दिए हुए बारंबारता बंटन को एक सतत वर्गीकृत बंटन में बदलिए :

वर्ग-अंतराल	**बारंबारता**
150-153	7
154-157	7
158-161	15
162-165	10
166-169	5
170-173	6

किन अंतरालों में 153.5 और 157.5 सम्मिलित किए जाएंगे?

6. किसी महीने में एक परिवार द्वारा विभिन्न मदों पर किए गए व्यय निम्नलिखित हैं :

मद	भोजन	शिक्षा	कपड़े	मकान किराया	अन्य	बचत
व्यय (रु में)	4000	2500	1000	3500	2500	1500

उपरोक्त को निरूपित करने के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

7. किसी देश द्वारा शिक्षा पर पाँच वर्षों के एक अंतराल (2002-2006) में किए गए व्यय (करोड़ रुपयों में) नीचे दिए गए हैं :

प्रारंभिक शिक्षा	240
माध्यमिक शिक्षा	120
विश्वविद्यालयी शिक्षा	190
अध्यापक प्रशिक्षण	20
सामाजिक शिक्षा	10
अन्य शैक्षिक प्रोग्राम	115
सांस्कृतिक प्रोग्राम	25
तकनीकी शिक्षा	125

उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

8. निम्नलिखित सारणी किसी पुस्तक के एक पृष्ठ पर अधिकांशत: प्रयुक्त किए गए a, e, i, o, r, t और u अक्षरों की बारंबारताएँ दर्शा रही है :

अक्षर	a	e	i	o	r	t	u
बारंबारताएँ	75	125	80	70	80	95	75

उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

9. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 20.2 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए :

x	10	15	20	25	30
f	6	8	p	10	6

10. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए :

बारंबारताएँ	चर
4	4
8	6
14	8
11	10
3	12

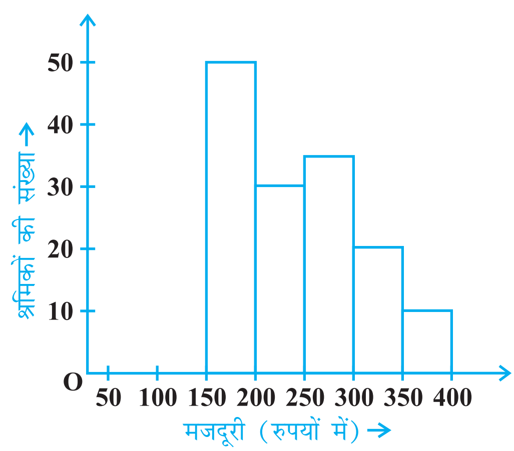
11. एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 30 लड़कियाँ हैं। एक टेस्ट में लड़कियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंकों का माध्य 73 तथा लड़कों का 71 है। संपूर्ण कक्षा के माध्य प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

12. 50 प्रेक्षणों का माध्य 80.4 प्राप्त हुआ। परंतु बाद में यह ज्ञात हुआ कि एक स्थान पर 96 को 69 पढ़ लिया गया है। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

13. दस प्रेक्षणों 6, 14, 15, 17, $x + 1$, $2x - 13$, 30, 32, 34 और 43 को आरोही क्रम में लिखा गया है। इन आँकड़ों का माध्यक 24 है। x का मान ज्ञात कीजिए।

14. किसी बास्केट बॉल टीम द्वारा मैचों की एक श्रृंखला में निम्नलिखित प्वाइंट अर्जित किए गए:
17, 2, 7, 27, 25, 5, 14, 18, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 10, 28
इन आँकड़ों के लिए माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

15. आकृति 14.2 में, एक आयतचित्र दिया है जो किसी फैक्ट्री की श्रमिकों की दैनिक मजदूरी दर्शाता है। इसके लिए एक बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।



आकृति 14.2

16. एक कंपनी ने 4000 परिवारों को यादृच्छिक रूप से चुना तथा उनके आय स्तर और घर में स्थित टी.वी. सेटों की संख्या में संबंध ज्ञात करने हेतु एक सर्वेक्षण किया। इस प्रकार प्राप्त सूचनाओं को निम्नलिखित सारणी के रूप में सूचीबद्ध किया गया है :

मासिक आय (रु में)	टी.वी. सेटों/परिवारों की संख्या			
	0	**1**	**2**	**2 से अधिक**
< 10000	20	80	10	0
10000 - 14999	10	240	60	0
15000 - 19999	0	380	120	30
20000 - 24999	0	520	370	80
25000 और उससे अधिक	0	1100	760	220

निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए –

(i) एक परिवार की आय 10000 रु – 14999 रु होने और घर में ठीक एक टी.वी. सेट होना

(ii) एक परिवार की आय 25000 रु और उससे अधिक होना और घर में दो टी.वी. सेट होना।

(iii) एक परिवार में एक भी टी.वी. सेट नहीं होना।

17. दो पासों को एक साथ 500 बार फेंका जाता है। प्रत्येक बार उनके ऊपर आई संख्याओं के योग को ज्ञात करके नीचे दी गई सारणी के अनुसार रिकार्ड किया गया है:

योग	बारंबारता
2	14
3	30
4	42
5	55
6	72
7	75
8	70
9	53
10	46
11	28
12	15

यदि इन पासों को एक बार पुनः फेंका जाए तो निम्नलिखित योग ज्ञात करने की क्या प्रायकिता है?

(i) 3 (ii) 10 से अधिक

(iii) 5 से कम या उसके बराबर (iv) 8 और 12 के बीच

18. पैक किए गए प्रत्येक डिब्बे में बल्बों की संख्या 40 है। इनमें से 700 डिब्बों के खराब बल्बों की संख्या ज्ञात करने के लिए जाँच की गई तथा इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं:

खराब बल्बों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	6 से अधिक
बारंबारता	400	180	48	41	18	8	3	2

इन डिब्बों में से एक डिब्बा यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस डिब्बे में

(i) कोई बल्ब खराब नहीं होगा?

(ii) खराब बल्बों की संख्या 2 से 6 तक होगी?

(iii) 4 से कम खराब बल्ब होंगे?

19. पिछले 200 कार्य दिवसों में, किसी मशीन द्वारा निर्मित खराब पुर्जों की संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई है :

खराब पुर्जों की संख्या	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
दिन	50	32	22	18	12	12	10	10	10	8	6	6	2	2

इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि कल के उत्पादन में

(i) कोई खराब पुर्जा नहीं होगा। (ii) न्यूनतम एक खराब पुर्जा होगा।

(iii) 5 से अधिक खराब पुर्जे नहीं होंगे। (iv) 13 से अधिक खराब पुर्जे होंगे।

20. कुछ समय पहले ही किए गए एक सर्वे मे यह पाया गया कि एक फैक्ट्री के श्रमिकों की आयु का बंटन निम्नलिखित है :

आयु (वर्षों में)	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 और उससे ऊपर
श्रमिकों की संख्या	38	27	86	46	3

यदि इनमें से एक व्यक्ति यादृच्छिक रूप से चुना जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति

(i) 40 वर्ष या उससे अधिक आयु का होगा?

(ii) 40 वर्ष से कम आयु का होगा?

(iii) 30 और 39 वर्ष के बीच की आयु का होगा?

(iv) 60 वर्ष से कम आयु का होगा परंतु 39 वर्ष से अधिक होगा?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: कक्षा VIII के विभिन्न अनुभागों (सेक्शनों) के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन निम्नलिखित है :

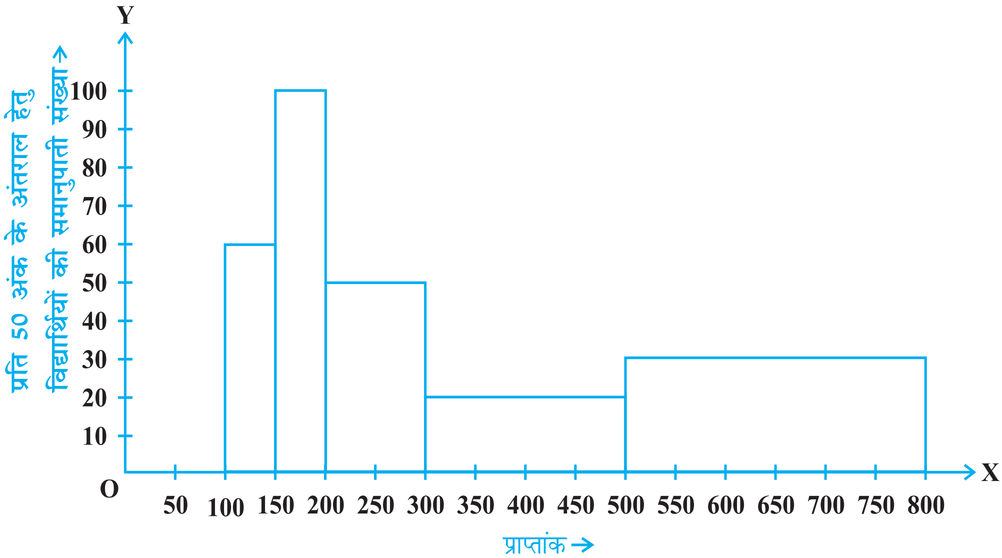
प्राप्तांक	100 - 150	150 - 200	200 - 300	300 - 500	500 - 800
विद्यार्थियों की संख्या	60	100	100	80	180

उपरोक्त बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

हल : उपरोक्त बारंबारता बंटन सारणी में वर्ग अंतराल बराबर चौड़ाई के नहीं हैं। अत: हम आयतचित्र में आयतों की लंबाइयों में उपयुक्त संशोधन करेंगे ताकि आयतों के क्षेत्रफल बारंबारताओं के समानुपाती हो जाएँ। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

प्राप्तांक	बारंबारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लंबाई
100 - 150	60	50	$\frac{50}{50} \times 60 = 60$
150 - 200	100	50	$\frac{50}{50} \times 100 = 100$
200 - 300	100	100	$\frac{50}{100} \times 100 = 50$
300 - 500	80	200	$\frac{50}{200} \times 80 = 20$
500 - 800	180	300	$\frac{50}{300} \times 180 = 30$

अब, हम अंतिम स्तंभ में दी लंबाइयों वाले आयत खींच कर नीचे दर्शाया हुआ आयतचित्र खींचते है:



आकृति 14.3

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : कक्षा IX के दो अनुभागों के विद्यार्थी, जिनमें से प्रत्येक में 30 विद्यार्थी हैं, एक गणित ओलंपियाड की परीक्षा में बैठते हैं। उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार हैं:

46	31	74	68	42	54	14	61	83	48	37	26	8	64	57
93	72	53	59	38	16	88	75	56	46	66	45	61	54	27
27	44	63	58	43	81	64	67	36	49	50	76	38	47	55
77	62	53	40	71	60	58	45	42	34	46	40	59	42	29

वर्ग 0-9, 10-19, इत्यादि का प्रयोग करते हुए, उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए तथा फिर उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिन्होंने 49 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं।

हल :

वर्ग	मिलान चिह्न	बारंबारता
0-9	I	1
10-19	II	2
20-29	IIII	4
30-39	~~IIII~~ I	6
40-49	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
50-59	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
60-69	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
70-79	~~IIII~~ I	6
80-89	III	3
90-99	I	1
	योग	**60**

उपरोक्त सारणी से, हम प्राप्त करते हैं कि 49 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या (12 + 10 + 6 + 3 + 1) = 32 है।

प्रश्नावली 14.4

1. 60 विद्यार्थियों के गणित में (100 में से)प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

16, 13, 5, 80, 86, 7, 51, 48, 24, 56, 70, 19, 61, 17, 16, 36, 34, 42, 34, 35, 72, 55, 75, 31, 52, 28,72, 97, 74, 45, 62, 68, 86, 35, 85, 36, 81, 75, 55, 26, 95, 31, 7, 78, 92, 62, 52, 56, 15, 63,25, 36, 54, 44, 47, 27, 72, 17, 4, 30.

वर्ग 0 - 9 से प्रारंभ करते हुए और प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई 10 रखते हुए, एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

2. उपरोक्त प्रश्न 1 को देखिए। इसके लिए प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई 10 रखते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी इस प्रकार बनाइए कि इसमें एक वर्ग 10 - 20 (20 सम्मिलित नहीं) हो।

3. निम्नलिखित बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिए :

ऊँचाई (cm में)	विद्यार्थियों की संख्या
150 - 153	7
153 - 156	8
156 - 159	14
159 - 162	10
162 - 165	6
165 - 168	5

4. निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता बंटन को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए :

आयु (वर्षों में)	शिक्षकों की संख्या
20 - 24	10
25 - 29	28
30 - 34	32
35 - 39	48
40 - 44	50
45 - 49	35
50 - 54	12

5. किसी पौधे की 62 पत्तियों की लंबाइयाँ मिलिमीटरों में मापी जाती है तथा इससे प्राप्त आँकड़े नीचे दी सारणी द्वारा निरूपित हैं :

लंबाई (mm में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	8
127 - 135	10
136 - 144	12
145 - 153	17
154 - 162	7
163 - 171	5
172 - 180	3

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

6. एक कक्षा के 80 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 - 20	6
20 - 30	17
30 - 50	15
50 - 70	16
70 - 100	26

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

7. निम्नलिखित सारणी एक राजमार्ग पर किसी स्थान से होकर जाने वाली कारों की चालों के बारंबारता बंटन को दर्शाती है :

वर्ग अंतराल (km/h में)	बारंबारता
30 - 40	3
40 - 50	6
50 - 60	25
60 - 70	65
70 - 80	50
80 - 90	28
90 - 100	14

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र और एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

8. उपरोक्त प्रश्न 7 को देखिए। इन आँकड़ों को निरूपित करने के लिए बिना आयतचित्र खींचे एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

9. निम्नलिखित सारणी किसी कक्षा के अनुभागों A और B द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन दर्शाती है :

अनुभाग A		अनुभाग B	
प्राप्तांक	**बारंबारता**	**प्राप्तांक**	**बारंबारता**
0 - 15	5	0 - 15	3
15 - 30	12	15 - 30	16
30 - 45	28	30 - 45	25
45 - 60	30	45 - 60	27
60 - 75	35	60 - 75	40
75 - 90	13	75 - 90	10

इन दोनों अनुभागों के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों को एक ही आलेख कागज पर दो बारंबारता बहुभुजों से निरूपित कीजिए। आप क्या देखते हैं?

10. निम्नलिखित बंटन का माध्य 50 है।

x	f
10	17
30	$5a + 3$
50	32
70	$7a - 11$
90	19

a का मान ज्ञात कीजिए और फिर 30 और 70 की बारंबारता ज्ञात कीजिए।

11. किसी परीक्षा में लड़के और लड़कियों के (100 में से) प्राप्त अंकों के माध्य क्रमशः 70 और 73 हैं। यदि इसी परीक्षा में, सभी विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का माध्य 71 है, तो लड़के और लड़कियों की संख्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

12. एक अस्पताल में, ब्लड शुगर के स्तर (mg/dl) की जाँच के लिए 25 रोगी भर्ती किए गए तथा प्राप्त परिणाम निम्नलिखित रहे :

87	71	83	67	85
77	69	76	65	85
85	54	70	68	80
73	78	68	85	73
81	78	81	77	75

उपरोक्त आँकड़ों का माध्य, माध्यक और बहुलक (mg/dl) ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1.	(C)	**2.**	(C)	**3.**	(D)	**4.**	(D)	**5.**	(D)
6.	(C)	**7.**	(D)	**8.**	(C)	**9.**	(C)	**10.**	(C)
11.	(B)	**12.**	(A)	**13.**	(D)	**14.**	(B)	**15.**	(B)
16.	(C)	**17.**	(C)	**18.**	(B)	**19.**	(A)	**20.**	(A)
21.	(C)								

प्रश्नावली 1.2

1. हाँ। मान लीजिए कि $x = 21, y = \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अब $x + y = 21 + \sqrt{2} = 21 + 1.4142 \ldots = 22.4142 \ldots$

जो असांत और अनावर्ती है। अत: $x + y$ अपरिमेय है।

2. नहीं, $0 \times \sqrt{2} = 0$ जो अपरिमेय नहीं है।

3. (i) असत्य। यद्यपि $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{p}{q}$ के रूप का है परंतु p, अर्थात् $\sqrt{2}$ एक पूर्णांक नहीं है।

(ii) असत्य; 2 और 3 के मध्य कोई पूर्णांक नहीं है।

(iii) असत्य क्योंकि किन्ही दो परिमेय संख्याओं के बीच हम अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

(iv) सत्य। $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{p}{q}$ के रूप का है, परंतु p और q यहाँ पूर्णांक नहीं हैं।

(v) असत्य क्योंकि $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$, जो एक परिमेय संख्या नहीं है।

(vi) असत्य, क्योंकि $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$, जो एक परिमेय संख्या है।

(vii) असत्य, क्योंकि $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1}$ यहाँ p अर्थात्, $\sqrt{5}$ एक पूर्णांक नहीं है।

4. (i) परिमेय, क्योंकि $\sqrt{196} = 14$

(ii) $3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$, जो एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल है और इसलिए एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $\sqrt{\frac{9}{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, जो एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का भागफल है और इसलिए एक अपरिमेय संख्या है।

(iv) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{343}} = \frac{2}{7}$, जो एक परिमेय संख्या है।

(v) अपरिमेय, $-\sqrt{0.4} = -\frac{2}{\sqrt{10}}$, जो एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का भागफल है।

(vi) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \frac{2}{7}$, जो एक परिमेय संख्या है।

(vii) परिमेय, क्योंकि दशमलव प्रसार सांत है।

(viii) $\left(1+\sqrt{5}\right)-\left(4+\sqrt{5}\right) = -3$, जो एक परिमेय संख्या है।

(ix) परिमेय, क्योंकि दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

(x) अपरिमेय, क्योंकि दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती है।

प्रश्नावली 1.3

1. परिमेय संख्याएँ : (ii), (iii)

अपरिमेय संख्याएँ : (i), (iv)

2. (i) –1.1, –1.2, –1.3 (ii) 0.101, 0.102, 0.103

(iii) $\frac{51}{70}, \frac{52}{70}, \frac{53}{70}$ (iv) $\frac{9}{40}, \frac{17}{80}, \frac{19}{80}$

3. (i) 2.1, 2.040040004 ... (ii) 0.03, 0.007000700007 ...

(iii) $\frac{5}{12}$, 0.414114111 ... (iv) 0, 0.151151115 ...

(v) 0.151, 0.151551555 ... (vi) 1.5, 1.585585558 ...

(vii) 3, 3.101101110 ... (viii) 0.00011, .0001131331333 ...

(ix) 1, 1.909009000 ... (x) 6.3753, 6.375414114111 ...

7. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{9}$ (iii) $\frac{47}{9}$ (iv) $\frac{1}{999}$ (v) $\frac{23}{90}$

(vi) $\frac{133}{990}$ (vii) $\frac{8}{2475}$ (viii) $\frac{40}{99}$

9. (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\frac{7\sqrt{6}}{12}$ (iii) $168\sqrt{2}$ (iv) $\frac{8}{3}$ (v) $\frac{34\sqrt{3}}{3}$

(vi) $5-2\sqrt{6}$ (vii) 0 (viii) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ (ix) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. (i) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (ii) $\frac{2}{3}\sqrt{30}$ (iii) $\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$ (iv) $\sqrt{41}+5$

(v) $7+4\sqrt{3}$ (vi) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ (vii) $5+2\sqrt{6}$ (viii) $9+2\sqrt{15}$

(ix) $\frac{9+4\sqrt{6}}{15}$

11. (i) $a = 11$ (ii) $a=\frac{9}{11}$ (iii) $b=\frac{-5}{6}$ (iv) $a = 0, b = 1$

12. $2\sqrt{3}$

13. (i) 2.309 (ii) 2.449 (iii) 0.463 (iv) 0.414 (v) 0.318

14. (i) 6 (ii) $\frac{2025}{64}$ (iii) 9 (iv) 5

(v) $3^{-\frac{1}{3}}$ (vi) –3 (vii) 16

प्रश्नावली 1.4

1. $\frac{167}{90}$	**2.** 1	**3.** 2.063	**4.** 7
5. 98	**6.** $\frac{1}{2}$	**7.** 214	

प्रश्नावली 2.1

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (A)	**4.** (D)	**5.** (B)
6. (A)	**7.** (D)	**8.** (C)	**9.** (B)	**10.** (B)
11. (D)	**12.** (C)	**13.** (B)	**14.** (D)	**15.** (D)
16. (B)	**17.** (D)	**18.** (D)	**19.** (C)	**20.** (C)
21. (C)				

प्रश्नावली 2.2

1. बहुपद : (i), (ii), (iv), (vii)

क्योंकि, सरल करने के बाद इनमें से प्रत्येक में चर का घातांक एक पूर्ण संख्या है।

2. (i) असत्य, क्योंकि एक द्विपद में ठीक दो पद होते हैं।

(ii) असत्य, $x^3 + x + 1$ एक बहुपद है, द्विपद नहीं।

(iii) सत्य, क्योंकि द्विपद एक बहुपद है जिसकी घात एक पूर्ण संख्या ≥ 1 होती है। अतः, घात 5 भी हो सकती है।

(iv) असत्य, क्योंकि एक बहुपद का शून्य कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

(v) असत्य, क्योंकि एक बहुपद के कितने भी शून्य हो सकते हैं। यह बहुपद की घात पर निर्भर करता है।

(vi) असत्य, $x^5 + 1$ और $-x^5 + 2x + 3$ घात 5 के दो बहुपद हैं, परंतु इनके योग की घात 1 है।

प्रश्नावली 2.3

1. (i) एक चर (ii) एक चर

(iii) तीन चर (iv) दो चर

2. (i) 1 (ii) 0 (iii) 5 (iv) 7

3. (i) 6 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) -1 (iv) $\frac{1}{5}$

4. (i) 1 (ii) 0 (iii) 3 (iv) -16

5. अचर बहुपद : (v)

रैखिक बहुपद : (iii), (vi), (x)

द्विघात बहुपद: (iv), (viii), (ix)

त्रिघात बहुपद : (i), (ii), (vii)

6. (i) $10x$ (ii) $x^{20} + 1$ (iii) $2x^2 - x - 1$

7. 61, -143 **8.** $\frac{-31}{4}$

9. (i) $-3, 3, -39$ (ii) $-4, -3, 0$

10. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य

11. (i) 4 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{7}{2}$ (iv) 0

12. 0 **13.** $x^3 + x^2 + x + 1, 2$

14. (i) 0 (ii) 62 (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{-136}{27}$

15. (i) नहीं (ii) नहीं **17.** (i) **19.** 1

20. $\frac{3}{2}$ **21.** -2 **22.** 2

23. (i) $(x + 6)(x + 3)$ (ii) $(3x - 1)(2x + 3)$

(iii) $(x - 5)(2x + 3)$ (iv) $2(7 + r)(6 - r)$

24. (i) $(x - 2)(x + 3)(2x - 5)$ (ii) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

(iii) $(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ (iv) $(x - 1)(x + 1)(3x - 1)$

25. (i) 1092727 (ii) 10302 (iii) 998001

26. (i) $(2x + 5)^2$ (ii) $(3y - 11z)^2$ (iii) $\left(3x - \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right)$

27. (i) $3(x - 1)(3x - 1)$ (ii) $(3x - 2)(3x - 2)$

28. (i) $16a^2 + b^2 + 4c^2 - 8ab - 4bc + 16ac$

(ii) $9a^2 + 25b^2 + c^2 - 30ab + 10bc - 6ac$

(iii) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6xz$

29. (i) $(3x + 2y - 4z)(3x + 2y - 4z)$ (ii) $(-5x + 4y + 2z)(-5x + 4y + 2z)$

(iii) $(4x - 2y + 3z)(4x - 2y + 3z)$

30. 29

31. (i) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$ (ii) $\frac{1}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{3x} + \frac{y^3}{27}$

(iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{4}{3x^2} - \frac{1}{27x^3}$

32. (i) $(1 - 4a)(1 - 4a)(1 - 4a)$ (ii) $\left(2p + \frac{1}{5}\right)\left(2p + \frac{1}{5}\right)\left(2p + \frac{1}{5}\right)$

33. (i) $\frac{x^3}{8} + 8y^3$ (ii) $x^6 - 1$

34. (i) $(1 + 4x)(1 - 4x + 16x^2)$ (ii) $\left(a - \sqrt{2}\,b\right)\left(a^2 + \sqrt{2}\,ab + 2b^2\right)$

35. $8x^3 - y^3 + 27z^3 + 18xyz$

36. (i) $(a - 2b - 4c)(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ac)$

(ii) $\left(\sqrt{2}a + 2b - 3c\right)\left(2a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2\sqrt{2}ab + 6bc + 3\sqrt{2}ac\right)$

37. (i) $-\frac{5}{12}$ (ii) -0.018 **38.** $3(x - 2y)(2y - 3z)(3z - x)$

39. (i) 0 (ii) 0

40. एक संभावित उत्तर है :

लंबाई = $2a - 1$, चौड़ाई = $2a + 3$

प्रश्नावली 2.4

1. -1 **2.** $a = 5;\ 62$ **5.** $-120x^2y - 250y^3$ **6.** $x^3 - 8y^3 - z^3 - 6xyz$

प्रश्नावली 3.1

1. (B)	**2.** (C)	**3.** (C)	**4.** (A)	**5.** (D)
6. (A)	**7.** (C)	**8.** (C)	**9.** (D)	**10.** (C)
11. (C)	**12.** (D)	**13.** (B)	**14.** (B)	**15.** (B)
16. (D)	**17.** (B)	**18.** (D)	**19.** (B)	**20.** (C)
21. (B)	**22.** (C)	**23.** (C)	**24.** (A)	

प्रश्नावली 3.2

1. (i) असत्य, क्योंकि यदि किसी बिंदु की कोटि शून्य हो, तो वह x-अक्ष पर स्थित होता है।

(ii) असत्य, (1, –1), चतुर्थांश IV में स्थित है तथा (–1, 1) चतुर्थांश II में स्थित है।

(iii) असत्य, क्योंकि एक बिंदु के निर्देशांकों में भुज पहले आता है और कोटि बाद में।

(iv) असत्य, क्योंकि y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है।

(v) सत्य, क्योंकि चतुर्थांश II में भुज और कोटि के चिन्ह क्रमशः – और + होते हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. P(1, 1), Q(–3, 0), R(–3, –2), S(2,1), T(4, –2), O(0,0)

2. समलंब

4. (i) संरेख (ii) संरेख नहीं (iii) संरेख

5. (i) II (ii) III (iii) II (iv) I

6. (i) P(3, 2), R(3, 0), Q(3, –1) (ii) 0

7. II, IV, x-अक्ष, I, III

8. C, D, E, G **10.** (7, 0), (0, –7) **11.** (i) (0, 0) (ii) (0,– 4) (iii) (5, 0)

प्रश्नावली 3.4

1. C(–2, – 4) **2.** (0, 0), (–5, 0), (0, –3) **3.** (4, 3)

4. (i) A, L और O

(ii) G, I और O

(iii) D और H

5. (i) (2, 1), (ii) (5, 7)

प्रश्नावली 4.1

1.	(C)	**2.**	(A)	**3.**	(A)	**4.**	(A)	**5.**	(D)
6.	(B)	**7.**	(C)	**8.**	(A)	**9.**	(B)	**10.**	(A)
11.	(C)	**12.**	(B)	**13.**	(A)	**14.**	(C)	**15.**	(C)
16.	(B)	**17.**	(C)	**18.**	(C)	**19.**	(D)		

प्रश्नावली 4.2

1. सत्य, क्योंकि (0, 3) समीकरण $3x + 4y = 12$ को संतुष्ट करता है।

2. असत्य, क्योंकि (0, 7) समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

3. सत्य, क्योंकि (–1, 1) और (–3, 3) दी हुई समीकरण को संतुष्ट करते हैं तथा दो बिंदुओं से एक अद्वितीय रेखा निर्धारित होती है।

4. सत्य, क्योंकि यह आलेख y-अक्ष के समांतर उससे 3 इकाई (दाईं ओर को) की दूरी पर एक रेखा है।

5. असत्य, क्योंकि बिंदु (3, – 5) दी हुई समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

6. असत्य, क्योंकि समीकरण के आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु एक हल निरूपित करता है।

7. असत्य, क्योंकि दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेख सदैव एक रेखा होता है।

प्रश्नावली 4.3

1. प्रत्येक समीकरण का आलेख (0, 0) से होकर जाने वाली रेखा है।

2. (2, 3)

3. x-अक्ष के समांतर और उससे नीचे की ओर 3 इकाई की दूरी पर रेखा $y = –3$ होती है।

4. $x + y = 10$ **5.** $y = 3x$ **6.** $\frac{5}{3}$

7. (i) एक (ii) अपरिमित रूप से अनेक हल

8. (i) (4, 0) (ii) (0, 2)

9. $c = \frac{8-2x}{x}, x \neq 0$ **10.** $y = 3x$; $y = 15$.

प्रश्नावली 4.4

2. आलेख x-अक्ष को (3, 0) और y-अक्ष को (0, 2) पर काटता है।

3. आलेख x-अक्ष को (2, 0) और y-अक्ष को $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ पर काटता है।

4. (i) 30°C (ii) 95°F (iii) 32°F, $\frac{-160}{9}$ °C

(iv) – 40

5. (i) 104°F (ii) 343°K

6. $y = mx$, जहाँ y बल को व्यक्त करता है, x त्वरण को व्यक्त करता है तथा m अचर द्रव्यमान को व्यक्त करता है।

(i) 30 न्यूटन (ii) 36 न्यूटन

प्रश्नावली 5.1

1.	(A)	**2.**	(C)	**3.**	(B)	**4.**	(A)	**5.**	(A)
6.	(A)	**7.**	(A)	**8.**	(B)	**9.**	(B)	**10.**	(D)
11.	(A)	**12.**	(B)	**13.**	(A)	**14.**	(C)	**15.**	(B)
16.	(A)	**17.**	(C)	**18.**	(C)	**19.**	(A)	**20.**	(A)
21.	(C)	**22.**	(B)						

प्रश्नावली 5.2

1. असत्य, यह केवल तल में बनी आकृतियों के लिए ही मान्य है।

2. असत्य, ठोसों की परिसीमाएँ पृष्ठ होते हैं।

3. असत्य, पृष्ठों के किनारे रेखाएँ होती हैं।

4. सत्य, युक्लिड का एक अभिगृहीत।

5. सत्य, यूक्लिड के एक अभिगृहीत के कारण।

6. असत्य, सिद्ध किए गए कथन प्रमेय कहलाते हैं।

7. सत्य, यह यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा का एक रुपांतरण है।

8. सत्य, यह यूक्लिड की पाँचवी अभिधारणा का एक रुपांतरण है।

9. सत्य, ये ज्यामितियाँ यूक्लिडीय ज्यामिति से भिन्न हैं।

प्रश्नावली 5.4

1. इस प्रश्न का उत्तर **(E)** में दिए प्रतिदर्श प्रश्न 1 के उत्तर की तरह दीजिए।

3. नहीं **4.** नहीं **5.** संगत (या अविरोधी)

प्रश्नावली 6.1

1.	(C)	**2.**	(D)	**3.**	(A)	**4.**	(A)	**5.**	(D)
6.	(A)	**7.**	(C)	**8.**	(B)				

प्रश्नावली 6.2

1. $x + y$ को 180° के बराबर होना चाहिए। ABC को एक रेखा होने के लिए दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होना चाहिए।

2. नहीं, कोणों का योग 180° से कम होगा।

3. नहीं, कोणों का योग 180° से अधिक नहीं हो सकता।

4. कोई नहीं, कोणों का योग 181° नहीं हो सकता।

5. अपरिमित रूप से अनेक त्रिभुज, प्रत्येक त्रिभुज के कोणों का योग 180° होगा।

6. 136°.

7. नहीं, जब ये रैखिक युग्म बनाएँगे, तभी प्रत्येक कोण समकोण होगा।

8. रैखिक युग्म अभिगृहीत द्वारा प्रत्येक एक समकोण होगा।

9. $l \parallel m$ क्योंकि $132° + 48° = 180°$ तथा p, q के समांतर नहीं है क्योंकि $73° + 106° \neq 180°$ है।

10. नहीं, ये समांतर हैं।

प्रश्नावली 6.3

7. 90° **8.** 40°, 60°, 80°

प्रश्नावली 7.1

1.	(C)	**2.**	(B)	**3.**	(B)	**4.**	(C)	**5.**	(A)
6.	(B)	**7.**	(B)	**8.**	(D)	**9.**	(B)	**10.**	(A)
11.	(B)								

प्रश्नावली 7.2

1. QR; ये ASA द्वारा सर्वांगसम होंगे।

2. RP; ये AAS द्वारा सर्वांगसम होंगे।

3. नहीं; कोण अंतर्गत कोण होने चाहिए।

4. नहीं; भुजाएँ संगत भुजाएँ होनी चाहिए।

5. नहीं; दो भुजाओं का योग = तीसरी भुजा।

6. नहीं; BC = PQ.

7. हाँ; ये संगत भुजाएँ हैं।

8. PR; बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।

9. हाँ; AB + BD > AD और AC + CD > AD.

10. हाँ; AB + BM > AM और AC + CM > AM.

11. नहीं; दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से कम है।

12. हाँ, क्योंकि प्रत्येक स्थिति में, दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा है।

प्रश्नावली 7.4

1. 60°, 60°, 60°

3. इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए ∠ABD = ∠ACD का प्रयोग गलत है।

19. ∠B बड़ा होगा।

प्रश्नावली 8.1

1. (D)	**2.** (B)	**3.** (C)	**4.** (C)	**5.** (D)
6. (C)	**7.** (D)	**8.** (C)	**9.** (B)	**10.** (D)
11. (C)	**12.** (C)	**13.** (C)	**14.** (C)	

प्रश्नावली 8.2

1. 6 cm, 4 cm; एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

2. नहीं; समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

3. नहीं; कोणों का योग 360° होना चाहिए।

4. समलंब

5. आयत

6. नहीं; आयत के विकर्णों का परस्पर लंब होना आवश्यक नहीं।

7. नहीं; चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

8. 3.5 cm, क्योंकि $DE = \frac{1}{2} AC$ है।

9. हाँ, क्योंकि BD = EF और CD = EF है।

10. 55°, ∠F = ∠A और ∠A = ∠C है।

11. नहीं; चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

12. हाँ; चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

13. 145° **14.** 4 cm

प्रश्नावली 8.3

1. 84° **2.** प्रत्येक 135° **3.** 120°, 60°, 120°, 60° **4.** 120°, 60°, 120°, 60°

प्रश्नावली 8.4

2. 4 cm

प्रश्नावली 9.1

1.	(A)	**2.**	(D)	**3.**	(D)	**4.**	(C)	**5.**	(C)
6.	(A)	**7.**	(B)	**8.**	(D)	**9.**	(B)	**10.**	(B)

प्रश्नावली 9.2

1. असत्य, क्योंकि ar (AXCD) = ar (ABCD) – ar (BCX) = 48 – 12 = 36 cm^2

2. सत्य, $SR = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = 12$, ar (PAS) $= \frac{1}{2}$ ar (PQRS) = 30 cm

3. असत्य, क्योंकि Δ QSR का क्षेत्रफल = 90 cm^2 तथा Δ ASR का क्षेत्रफल < Δ QRS का क्षेत्रफल

4. सत्य, $\frac{\text{ar BDE}}{\text{ar ABC}} = \frac{\sqrt{3}\,(BD)^2}{\frac{\sqrt{3}\,(BC)^2}{4}} = \frac{(BC)^2}{(BC)^2} = \frac{1}{4}$

5. असत्य, क्योंकि ar (DPC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) = ar (EFGD)

प्रश्नावली 9.3

3. (i) 90 cm^2 (ii) 45 cm^2 (iii) 45 cm^2

7. 12 cm^2

प्रश्नावली 10.1

1.	(D)	**2.**	(A)	**3.**	(C)	**4.**	(B)	**5.**	(D)
6.	(A)	**7.**	(C)	**8.**	(B)	**9.**	(C)	**10.**	(D)

प्रश्नावली 10.2

1. सत्य, क्योंकि केंद्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ बराबर हैं।

2. असत्य, कोण तभी बराबर होंगे, जब $AB = AC$ हो।

3. सत्य, क्योंकि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ संगत केंद्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

4. असत्य, क्योंकि दो बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त इन दोनों बिंदुओं के संरेख तीसरे बिंदु से होकर नहीं जा सकता।

5. सत्य, क्योंकि AB व्यास होगा।

6. सत्य, क्योंकि $\angle C$ एक समकोण है $AC^2 + BC^2 = AB^2$

7. असत्य, क्योंकि $\angle A + \angle C = 90° + 95° = 185° \neq 180°$

8. सत्य, क्योंकि ऐसे अनेक बिंदु D हो सकते हैं कि $\angle BDC = 60°$ हो तथा ऐसा प्रत्येक बिंदु A,B और C बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र नहीं हो सकता।

9. सत्य, एक ही वृत्तखंड के कोण

10. सत्य, $\angle B = 180° - 120° = 60°$, $\angle CAB = 90° - 60° = 30°$

प्रश्नावली 10.3

1. 1:1 **9.** 60° **14.** 30° **15.** 100° **16.** 50°
17. 40° **19.** 278 **20.** $\angle BOC = 66°, \angle AOC = 54°$

प्रश्नावली 10.4

13. $x = 30°, y = 15°$ **14.** 30°

प्रश्नावली 11.1

1. (B) **2.** (A) **3.** (D)

प्रश्नावली 11.2

1. सत्य, क्योंकि $52.5° = \frac{210°}{4}$ और $210° = 180° + 30°$ है, जिसकी रचना की जा सकती है।

2. असत्य, क्योंकि $42.5° = \frac{1}{2} \times 85°$ और 85° की रचना नहीं की जा सकती।

3. असत्य, क्योंकि BC + AC को AB से बड़ा होना चाहिए, जो कि यहाँ ऐसा नहीं है।

4. सत्य, क्योंकि AC – AB < BC, अर्थात् AC < AB + BC

5. असत्य, क्योंकि $\angle B + \angle C = 105° + 90° = 195° > 180°$

6. सत्य, क्योंकि $\angle B + \angle C = 60° + 45° = 105° < 180°$

प्रश्नावली 11.3

2. हाँ

प्रश्नावली 12.1

1.	(A)	**2.**	(D)	**3.**	(C)	**4.**	(A)	**5.**	(D)
6.	(B)	**7.**	(C)	**8.**	(A)	**9.**	(B)		

प्रश्नावली 12.2

1. असत्य, त्रिभुज का क्षेत्रफल 12 cm^2 है।

2. सत्य, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$ है।

3. सत्य, प्रत्येक बराबर भुजा $= 3$ cm है।

4. असत्य, त्रिभुज का क्षेत्रफल $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ है।

5. सत्य, दूसरा विकर्ण 12 cm होगा।

6. असत्य, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 35 cm^2 है।

7. असत्य, सभी 6 समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग ही क्षेत्रफल होगा।

8. सत्य, क्षेत्रफल = 306 m^2.

9. सत्य, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 12\sqrt{105} \text{ cm}^2$

प्रश्नावली 12.3

1.	10500 रु	**2.**	84, 000 रु	**3.**	$300\sqrt{3}$ cm	**4.**	$32\sqrt{2} \text{ cm}^2$
5.	180 cm^2	**6.**	$600\sqrt{15} \text{ m}^2$	**7.**	$2100\sqrt{15} \text{ m}^2$	**8.**	$24(\sqrt{6}+1) \text{ cm}^2$
9.	960 रु	**10.**	114 m^2				

प्रश्नावली 12.4

1. पीला : 484 m^2; लाल : 242 m^2; हरा : 373.04 m^2
2. $20\sqrt{30}$ cm^2
3. 23 cm, 27 cm
4. 374 cm^2
5. 19200 रु
6. 3 cm
7. 45 cm, 40 cm
8. 1632 cm^2, 1868 cm^2

प्रश्नावली 13.1

1. (D)
2. (C)
3. (B)
4. (C)
5. (B)
6. (B)
7. (A)
8. (B)
9. (A)
10. (A)

प्रश्नावली 13.2

1. सत्य, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^2 (2r)$
2. असत्य, क्योंकि नया आयतन $= \frac{1}{3}\pi \ \frac{r}{2}\ ^{2} \times 2h = \frac{1}{2}$ (प्रारंभिक आयतन)
3. सत्य, क्योंकि $r^2 + h^2 = l^2$ है।
4. सत्य, $2\pi rh = 2\pi(2r) \times \frac{h}{2}$
5. सत्य, क्योंकि शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 \times (2r) = \frac{2}{3}\pi r^3 =$ अर्धगोले का आयतन
6. सत्य, क्योंकि $V_1 =$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

   क्योंकि $V_2 =$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ है। अतः, $V_1 = 3V_2$ है।
7. सत्य, $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 r$, $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^3$, $V_3 = \pi r^2 r$
8. असत्य, $\sqrt{3}a = 6\sqrt{3}$ अर्थात् $a = 6$, अतः, किनारा = 6 cm
9. सत्य, V_1 (घन का आयतन) = a^3

गोले की त्रिज्या = $\frac{a}{2}$ V_2 (गोले का आयतन) = $\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}$

$V_1 : V_2 = 6 : \pi$

10. सत्य, नया आयतन = $\pi(2r)^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 2\left[\pi r^2 h\right]$ है। अतः, आयतन दुगुना हो जाता है।

प्रश्नावली 13.3

1. 488 cm^3 **2.** 7.5 cm^3 **3.** 14.8 cm^3 **4.** 471.42 m^2

5. 5 cm **6.** 739.2 लीटर **7.** 200 चक्कर **8.** 40 दिन

9. 8 लड्डू **10.** 304 cm^3, 188.5 cm^2

प्रश्नावली 13.4

1. 8800 cm^3 **2.** 677.6 cm^3 **3.** 110, 241.7 cm^3 **4.** 668.66 m^3

5. 16 : 9 **6.** 30.48 cm^3 **7.** 50%

8. (i) 9152 cm^2 (ii) 55440 cm^3

प्रश्नावली 14.1

1. (B)	**2.** (D)	**3.** (B)	**4.** (C)	**5.** (B)
6. (B)	**7.** (B)	**8.** (C)	**9.** (B)	**10.** (D)
11. (D)	**12.** (C)	**13.** (B)	**14.** (D)	**15.** (B)
16. (B)	**17.** (C)	**18.** (B)	**19.** (D)	**20.** (B)
21. (C)	**22.** (C)	**23.** (C)	**24.** (B)	**25.** (D)
26. (C)	**27.** (C)	**28.** (C)	**29.** (C)	**30.** (D)

प्रश्नावली 14.2

1. सही नहीं है। वर्ग असमान चौड़ाइयों के हैं, एक समान चौड़ाई के नहीं।

2. माध्यक आंकड़ों का एक अच्छा प्रतिनिधि होगा, क्योंकि

(i) प्रत्येक मान केवल एक बार आ रहा है।

(ii) आँकड़े चरम मानों से प्रभावित हो रहे हैं।

3. माध्यक ज्ञात करने से पहले, आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करना होता है।

4. नहीं, माध्यक ज्ञात करने से पहले आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करना होता है।

5. यह सही नहीं है। एक आयत चित्र में, प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उसकी बारंबारता के समानुपाती होता है।

6. यह सही नहीं है क्योंकि दो क्रमगत प्राप्तांकों का अंतर वर्ग माप के बराबर होना चाहिए।

7. नहीं, वास्तव में एक सप्ताह में 10 या 10 से अधिक घंटे तक टी वी देखने वालों की संख्या $4 + 2$, अर्थात् 6 है।

8. नहीं, क्योंकि उन अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें कोई घटना हो सकती है ऋणात्मक नहीं हो सकती तथा अभिप्रयोगों की कुल संख्या सदैव धनात्मक होती है।

9. नहीं, क्योंकि उन अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें कोई घटना हो सकती है अभिप्रयोगों की कुल संख्या से अधिक नहीं हो सकती।

10. नहीं, जैसे-जैसे एक सिक्के के उछालों की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे चितों की संख्या और कुल उछालों की संख्या का अनुपात $\frac{1}{2}$ के निकटतर होता जाता है, ठीक $\frac{1}{2}$ नहीं होता।

प्रश्नावली 14.3

1.

रक्त समूह	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)
A	12
B	8
AB	4
O	6
योग	**30**

2.

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
बारंबारता	1	2	5	6	3	4	3	2	5	4

3.

प्राप्तांक	48	58	64	66	69	71	73	81	83	84
बारंबारता	3	3	4	7	6	3	2	1	2	2

4.

वर्ग	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	4	8	13	12	6

वर्ग माप = 10

5.

वर्ग अंतराल	बारंबारता
149.5 - 153.5	7
153.5 - 157.5	7
157.5 - 161.5	15
161.5 - 165.5	10
165.5 - 169.5	5
169.5 - 173.5	6

153.5 वर्ग अंतराल 153.5-157.5 में सम्मिलित है तथा 157.5 वर्ग अंतराल 157.5 - 161.5 में सम्मिलित है।

9. 20 **10.** 8.05 **11.** 72.2 **12.** 80.94 **13.** 20

14. माध्यक = 12, बहुलक = 10

15.

वर्ग अंतराल	बारंबारता
150 - 200	50
200 - 250	30
250 - 300	35
300 - 350	20
350 - 400	10
योग	**145**

16. (i) 0.06 (ii) 0.19 (iii) $\frac{3}{400}$

17. (i) 0.06 (ii) 0.086 (iii) 0.282 (iv) 0.254

18. (i) $\frac{4}{7}$ (ii) $\frac{59}{350}$ (iii) $\frac{669}{700}$

19. (i) 0.25 (ii) 0.75 (iii) 0.73 (iv) 0

20. (i) 0.675 (ii) 0.325 (iii) 0.135 (iv) 0.66

प्रश्नावली 14.4

1.

वर्ग	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
बारंबारता	1	2	5	6	3	4	3	2	5	4

2.

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	4
10 - 20	7
20 - 30	5
30 - 40	10
40 - 50	5
50 - 60	8
60 - 70	5
70 - 80	8
80 - 90	5
90 - 100	3

10. $a = 5$, 30 की बारंबारता 28 है तथा 70 की 24 है।

11. 2 : 1

12. माध्य = 75.64, माध्यक = 77, बहुलक = 85

सेट-I

प्रश्न पत्र का डिज़ाइन

गणित कक्षा 9

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

प्रश्न पत्र की विभिन्न विमाओं के लिए अंकों का वितरण या भार (महत्व) निम्नलिखित प्रकार से होगा:

1. विषय-वस्तु/विषय इकाई के भार

क्रम संख्या	इकाई	अंक
1.	संख्या पद्धतियाँ	06
2.	बीजगणित	20
3.	निर्देशांक ज्यामिति	06
4.	ज्यामिति	22
5.	मेन्सुरेशन	14
6.	सांख्यिकी और प्रायिकता	12

2. प्रश्नों के प्रकार के भार

क्रम संख्या	प्रश्न के प्रकार	प्रत्येक प्रश्न के अंक	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक
1.	MCQ	01	10	10
2.	SAR	02	05	10
3.	SA	03	10	30
4.	LA	06	05	30
		योग	**30**	**80**

3. विकल्पों की योजना

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, अर्थात् व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। यद्यपि 3 अंक वाले दो प्रश्न और 6 अंक वाले एक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।

4. प्रश्नों का कठिनाई स्तर भार

क्रम संख्या	प्रश्नों के अनुमानित कठिनाई स्तर	अंकों का प्रतिशत
1.	सरल	20
2.	औसत	60
3.	कठिन	20

टिप्पणी :

कोई भी प्रश्न कठिनाई स्तर में व्यक्तियों के अनुसार बदल सकता है। वैसे तो, प्रत्येक प्रश्न से संबंधित मूल्यांकन परीक्षा देने वाले संपूर्ण समूहों से व्यापक अपेक्षाओं के आधार पर प्रश्न पत्र बनाने वाले व्यक्ति/शिक्षक द्वारा किया जाएगा। यहाँ जो कुछ दिया गया है वह केवल प्रश्न पत्र को भारों के आधार पर संतुलित बनाने के लिए है न कि किसी स्तर पर अंक योजना का पैटर्न निर्धारित करने के लिए।

ब्लू प्रिंट

गणित कक्षा 9

प्रश्नों के प्रकार → विषय इकाई ↓	MCQ	SAR	SA	LA	योग
संख्या पद्धतियाँ	1 (1)	2 (1)	3 (1)	–	6 (3)
बीजगणित बहुपद, दो चरों वाले रैखिक समीकरण	1 (1)	4 (2)	9 (3)	6 (1)	20 (7)
निर्देशांक ज्यामिति	1 (1)	2 (1)	3 (1)	–	6 (3)
ज्यामिति यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय, रेखाएँ और कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, क्षेत्रफल, वृत्त, रचनाएँ	4 (4)	–	6 (2)	12 (2)	22 (8)
मेन्सुरेशन क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	2 (2)	–	6 (2)	6 (1)	14 (5)
सांख्यिकी और प्रायिकता	1 (1)	2 (1)	3 (1)	6 (1)	12 (4)
योग	**10 (10)**	**10 (05)**	**30 (10)**	**30 (05)**	**80 (30)**

सारांश

बहु विकल्पीय प्रश्न (MCQ)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 10
तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SAR)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 10
संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SA)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 30
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 30
योग	**30**	**80**

गणित कक्षा 9

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

सामान्य निर्देश :

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. प्रश्न पत्र में चार खंड अ, ब, स और द हैं। खंड अ में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 1 अंक का है, खंड ब में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 2 अंक के हैं, खंड स में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 3 अंक के हैं तथा खंड द में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 6 अंक के हैं।
3. व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। यद्यपि 3 अंक वाले दो प्रश्न तथा 6 अंक वाले एक प्रश्न में आंतरिक विकल्प प्रदान किए गए हैं।
4. रचनाएँ स्वच्छ तथा ठीक दिए हुए मापनों के अनुसार होनी चाहिए।
5. कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड अ

प्रश्न 1 से 10 में प्रत्येक में उत्तर के चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प लिखिए –

1. प्रत्येक परिमेय संख्या होती है एक

(A) प्राकृत संख्या (B) पूर्णांक
(C) वास्तविक संख्या (D) पूर्ण संख्या

2. बिंदु (2, 4) की x-अक्ष से दूरी है

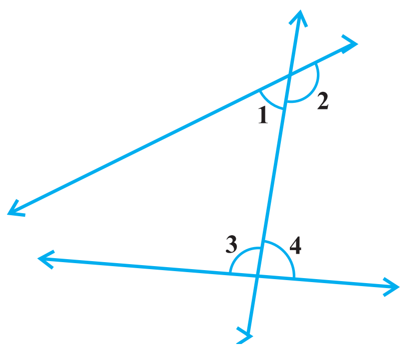
(A) 2 इकाई (B) 4 इकाई (C) 6 इकाई (D) $\sqrt{2^2 + 4^2}$ इकाई

3. बहुपद $(x^3 + 7)(3 - x^2)$ की घात है :

(A) 5 (B) 3
(C) 2 (D) –5

4. आकृति 1 में यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के अनुसार, योग 180° से कम वाले कोणों का युग्म है

(A) 1 और 2 (B) 2 और 4
(C) 1 और 3 (D) 3 और 4



आकृति 1

5. 13 cm त्रिज्या वाले वृत्त के केंद्र से 12 cm की दूरी पर स्थित जीवा की लंबाई है :

(A) 5 cm (B) 12 cm (C) 13 cm (D) 10 cm

6. यदि एक गोले का आयतन संख्यात्मक रूप से उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है तो उसका व्यास है :

(A) 2 इकाई (B) 1 इकाई (C) 3 इकाई (D) 6 इकाई

7. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ 5 cm और 13 cm हैं तथा इसका परिमाप 30 cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल है :

(A) 30 cm^2 (B) 60 cm^2 (C) 32.5 cm^2 (D) 65 cm^2

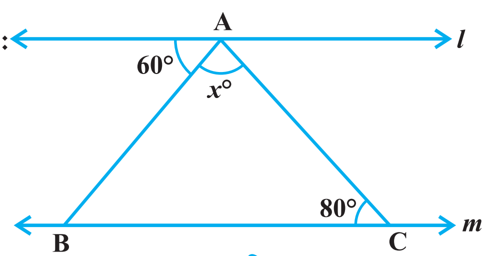
8. निम्नलिखित में से कौन एक घटना की आनुभविक प्रायिकता नहीं हो सकती:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) 1

9. आकृति 2 में, यदि $l \parallel m$ है, तो x का मान है:

(A) 60 (B) 80

(C) 40 (D) 140



आकृति 2

10. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण :

(A) बराबर होते हैं

(B) परस्पर समद्विभाजित करते हैं

(C) परस्पर लंब होते हैं

(D) परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

खंड ब

11. क्या -5 एक परिमेय संख्या है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

12. बिना $p(5)$ ज्ञात किए, ज्ञात कीजिए कि क्या $(x-5)$, $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ का एक गुणनखंड है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

13. क्या (1, 8) समीकरण $y = 3x + 5$ का एक मात्र हल है? कारण दीजिए।

14. x-अक्ष पर उसकी धनात्मक दिशा में मूल बिंदु से 4 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

15. दो सिक्कों को एक साथ 500 बार उछाला जाता है। यदि दो चित 100 बार आए, एक चित 270 बार आए तथा 130 बार कोई भी चित न आए, तो एक या एक से अधिक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

खंड स

16. निम्नलिखित व्यंजक को सरल कीजिए :

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{12}\right)+\frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$$

अथवा

$0.12\overline{3}$ को $\frac{p}{q}, q \neq 0$, के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं।

17. सत्यापित कीजिए कि :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

18. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि $(x-2)$, $4x^3+3x^2-4x+k$ का एक गुणनखंड है।

19. उस चतुर्थांश को लिखिए जिसमें निम्नलिखित प्रत्येक बिंदु स्थित है :

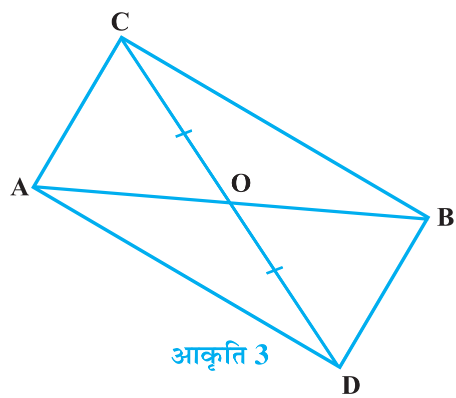
(i) $(-3, -5)$

(ii) $(2, -5)$

(iii) $(-3, 5)$

साथ ही, कार्तीय तल में इन्हें अंकित करके अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

20. आकृति 3 में, ABC और ABD एक ही आधार AB पर स्थित दो त्रिभुज हैं। यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB द्वारा O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ ABD) है।



आकृति 3

21. समीकरण $3x + 2 = 2x - 2$ को हल कीजिए तथा प्राप्त हल को कार्तीय तल में निरूपित कीजिए।

22. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 12 cm है तथा इसके कर्ण और अन्य भुजा की लंबाइयों का अंतर 8cm है। साथ ही, रचना के चरणों का औचित्य भी दीजिए।

23. एक चतुर्भुज ABCD में, AB = 9 cm, BC = 12 cm, CD = 5 cm, AD = 8 m और $\angle C = 90°$ है। ΔABD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

24. गरम पानी द्वारा गरम रखने वाले एक संयत्र में, 35 m लंबाई और 10 cm व्यास वाला एक बेलनाकार पाइप है। इस संयत्र में गरम होने वाले कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक आयताकार हॉल का परिमाप 150 m है। यदि 10 रु प्रति m^2 की दर से इसकी चारों दीवारों पर पेंट कराने का व्यय 9000 रु है, तो हॉल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

25. तीन सिक्कों को एक साथ 200 बार उछाला जाता है तथा विभिन्न परिणामों की निम्नलिखित बारंबारताएँ प्राप्त होती हैं

परिणाम	3 पट	2 पट	1 पट	कोई पट नहीं
बारंबारता	20	68	82	30

यदि इन तीन सिक्कों को एक बार और उछाला जाए, तो 3 से कम पटों को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

खंड द

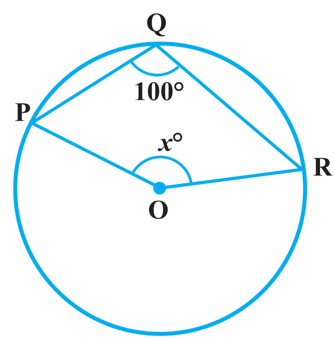
26. एक शहर में टैक्सी का किराया निम्नलिखित प्रकार से है :

प्रथम किलोमीटर के लिए किराया 10 रु है तथा उसके बाद की दूरी के लिए यह किराया 6 रु प्रति km है। तय की गई दूरी x km और कुल किराया y रु लेते हुए, इस सूचना के लिए एक रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए। इस आलेख से 4 km की दूरी तय करने का किराया ज्ञात कीजिए।

27. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं। इस परिणाम का प्रयोग करते हुए, एक समकोण त्रिभुज का $\angle B$ ज्ञात कीजिए जिसमें $\angle A$ समकोण है तथा $AB = AC$ है।

28. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित किए गए कोण का दुगुना होता है।

इस परिणाम का प्रयोग करते हुए, आकृति 4 में x का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ O वृत्त का केंद्र है।



आकृति 4

29. गेहूँ की एक ढेरी शंकु के आकार की है जिसका व्यास 48m और ऊँचाई 7m है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। यदि इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए एक केनवास से ढका जाना है, तो आवश्यक केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

किसी भवन का गुंबज एक खोखले अर्धगोले के आकार का है। इसके आंतरिक भाग पर 498.96 रु खर्च कर सफेदी कराई गई। यदि सफेदी कराने की दर 2.00 रु प्रति वर्ग मीटर है, तो इस गुबंज के अंदर वायु का आयतन ज्ञात कीजिए।

30. निम्नलिखित सारणी 400 नियोन लैंपों के जीवन काल को दर्शाती है।

जीवन काल (घंटों में)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
लैम्पों की संख्या	14	56	60	86	74	62	48

(i) इन आँकड़ों को एक आयत चित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

(ii) कितने लैंपों का जीवन काल 600 घंटे से कम है?

अंक देय योजना

गणित कक्षा 9

खंड अ

अंक

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (A)	**4.** (C)	**5.** (D)
6. (D)	**7.** (A)	**8.** (B)	**9.** (C)	**10.** (B)

$(1 \times 10 = 10)$

खंड ब

11. हाँ, $(\frac{1}{2})$

क्योंकि $-5 = \frac{-5}{1}$ तथा $-5, 1$ पूर्णांक हैं तथा $1 \neq 0$. $(1\frac{1}{2})$

12. $(x-5)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड नहीं है $(\frac{1}{2})$

क्योंकि 5, –12 का गुणनखंड नहीं है $(1\frac{1}{2})$

13. नहीं, $(\frac{1}{2})$

क्योंकि, $y = 3x + 5$ के $(-1, 2), (2, 11)$ इत्यादि जैसे अनेक हल हैं। $(1\frac{1}{2})$

14. $(4, 0)$ $(\frac{1}{2})$

क्योंकि x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$, होते हैं, जहाँ x उसकी मूलबिंदु से दूरी है। $(1\frac{1}{2})$

15. $p = \frac{37}{50}$ $(\frac{1}{2})$

क्योंकि एक या एक से अधिक चित की बारंबारता = 100 + 270 = 370

अत: P (एक या एक से अधिक चित) $= \frac{370}{500} = \frac{37}{50}$ $(1\frac{1}{2})$

खंड स

16. $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{12}\right)+\frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$

$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{36}+1-\sqrt{12}\right)+\frac{9}{\sqrt{12}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ (1)

$=\left(\sqrt{3}-5-\sqrt{12}\right)+\frac{9\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)}{(12-3)}$ (1)

$=\left(\sqrt{3}-5-\sqrt{12}\right)+\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)=-5$ (1)

अथवा

मान लीजिए कि $x=0.12\overline{3}=0.123333...$

अत:, $100x=12.\overline{3}$ (1)

तथा $1000x=123.\overline{3}$ $(\frac{1}{2})$

अत:, $900x=111$, अर्थात्, $x=\frac{111}{900}$ $(1\frac{1}{2})$

17. बायाँ पक्ष $= x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$ (1)

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\left(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\right)$ $(\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[\left(x^2+y^2-2xy\right)+\left(x^2+z^2-2xy\right)+\left(y^2+z^2-2xz\right)\right]$ (1)

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2\right]$ $(\frac{1}{2})$

18. जब $(x-2)$, $p(x)=4x^3+3x^2-4x+k$, का एक गुणनखंड है, तो $p(2)=0$ (1)

अतः, $4(2)^3+3(2)^2-4(2)+k=0$ (1)

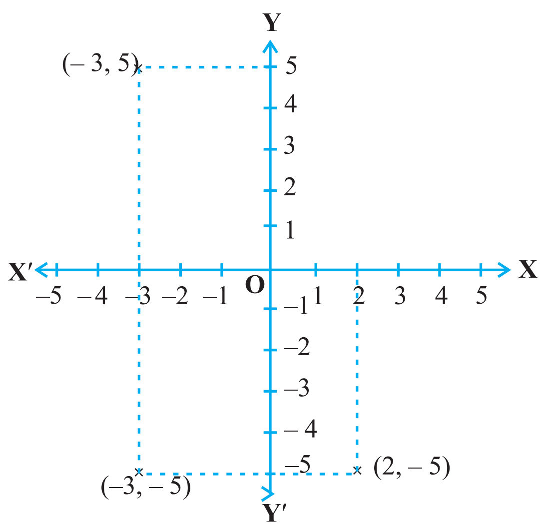
या $32+12-8+k=0$, अर्थात् $k=-36$ (1)

19. $(-3,-5)$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

$(2,-5)$ चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

$(-3,5)$ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है। $(\frac{1}{2}\times 3 = 1\frac{1}{2})$

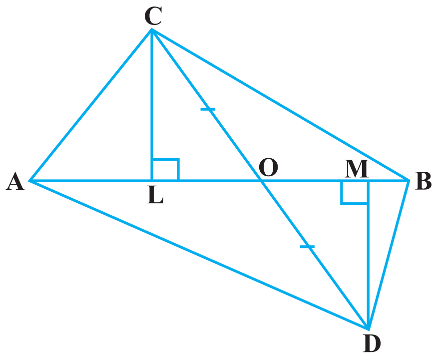
सही बिंदु अंकित करने के लिए $(\frac{1}{2}\times 3 = 1\frac{1}{2})$



20. CL ⊥ AB और DM ⊥ AB खींचिए। $(\frac{1}{2})$

$\Delta COL \cong \Delta DOM$ (AAS) $(\frac{1}{2})$

अतः, CL = DM $(\frac{1}{2})$



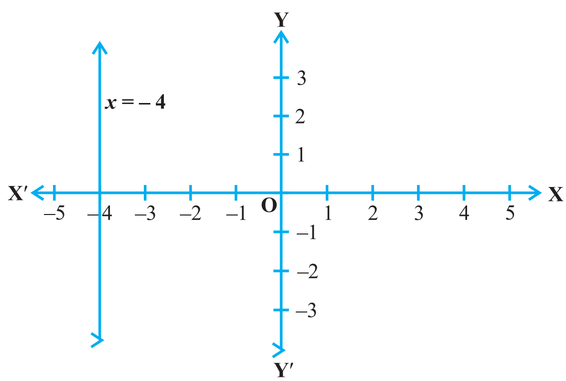
अत:, क्षेत्रफल $(\Delta\ ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot CL$ $(\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}AB \cdot DM$ $(\frac{1}{2})$

= क्षेत्रफल $(\Delta\ ABD)$ $(\frac{1}{2})$

21. $3x + 2 = 2x - 2$

अर्थात् $3x - 2x = -2 - 2,$ अर्थात् $x = -4$ (1)



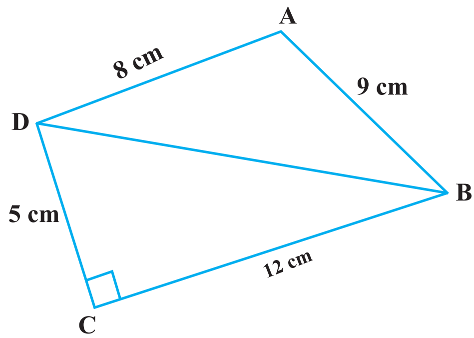
(2)

22. सही ज्यामितीय रचना के लिए (2)

औचित्य देने के लिए (1)

23. $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\text{ cm}$ प्राप्त करना (1)

$s = \frac{13+9+8}{2} = 15\text{ cm}$ $(\frac{1}{2})$



$\Delta ABD = \sqrt{(15)(15-13)(15-8)(15-9)}$

$= \sqrt{840} = 28.98 \text{ cm}^2$

$= 29 \text{ cm}^2$ (लगभग) $(1\frac{1}{2})$

24. गरम होने वाला पृष्ठ = बेलन का वक्र पृष्ठ $(\frac{1}{2})$

$= 2\pi rh$ $(\frac{1}{2})$

$= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{5}{100} 35 \text{ m}^2$ $(1\frac{1}{2})$

$= 11 \text{ m}^2$ $(\frac{1}{2})$

अथवा

यदि l, b हॉल की क्रमशः लंबाई, चौड़ाई निरूपित करते हैं

तो $2(l+b) = 150$ m $(\frac{1}{2})$

चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2(l+b)h$, जहाँ h ऊँचाई है (1)

अतः, $2(l+b)h \times 10 = 9000$ $(\frac{1}{2})$

या $(150)h(10) = 9000$, अर्थात $h = 6\text{m}$

अतः, हॉल की ऊँचाई = 6 m (1)

25. अभिप्रयोगों की कुल संख्या = 200 $(\frac{1}{2})$

परिणाम 3 से कम अभिप्रयोगों की बारंबारता

= 68 + 82 +30 = 180 (1)

अत: वाँछित प्रायिकता = $\frac{180}{200} = \frac{9}{10}$ $(1\frac{1}{2})$

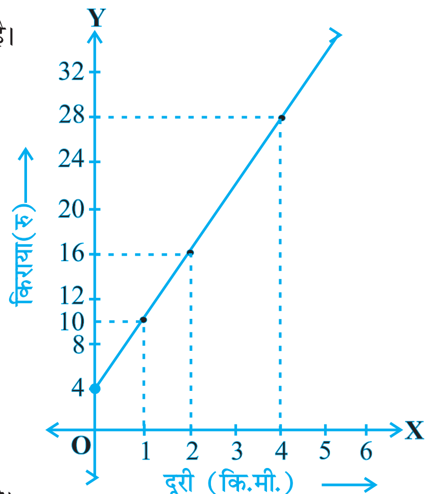
खंड द

26. मान लीजिए कि तय की गई दूरी x km है तथा x km के लिए कुल किराया $= y$ रु है।

अत:, $10 + 6(x - 1) = y$ (2)

या $6x - y + 4 = 0$ (1)

x	0	1	2
y	4	10	16



(2)

आलेख से, जब $x = 4, y = 28$ है

अत: 4 km की दूरी के लिए किराया 28 रु है। (1)

27. सही दिया है, सिद्ध करना है, रचना और आकृति के लिए $(\frac{1}{2} \times 4 = 2)$

सही उपपत्ति के लिए (2)

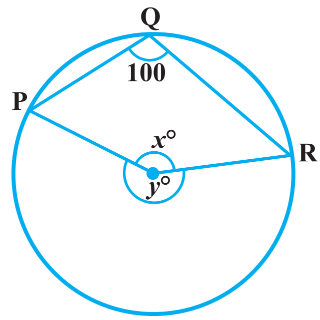
क्योंकि $\angle B = 90°$, अत:, $\angle A + \angle C = 90°$ $(\frac{1}{2})$

AB = AC से प्राप्त होता है: $\angle A = \angle C$ (1)

अत: $\angle A = \angle C = 45°$ $(\frac{1}{2})$

28. सही दिया है, सिद्ध करना है, रचना और आकृति के लिए $(\frac{1}{2} \times 4 = 2)$

सही उपपत्ति के लिए (2)



क्योंकि $\angle PQR = 100°$

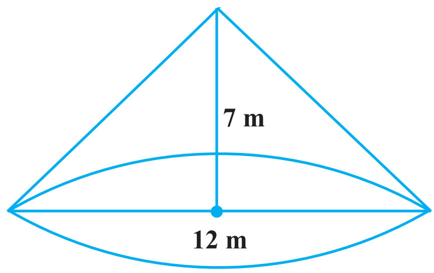
अत:, $\angle y = 200°$ (1)

क्योंकि $\angle x + \angle y = 360°$ $(\frac{1}{2})$

अत:, $\angle x = 360° - 200° = 160°$ $(\frac{1}{2})$

29. शंक्वाकार ढेरी की त्रिज्या $= 24$ m

ऊँचाई = 7 m



आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (1)

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 24 \times 24 \times 7 \ m^3$ $(1\frac{1}{2})$

$= 4224 \ m^3$

केनवास का क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$ $(\frac{1}{2})$

जहाँ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25 \text{m}$ (1)

अत; क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times 24 \times 25 = 1885.7 \ m^2$ (2)

अथवा

कुल लागत $= 498.96$ रु, दर = 2 रु प्रति m^2

अत; क्षेत्रफल $= \frac{498.96}{2} = 249.48 \ m^2$ (1 + 1 = 2)

यदि r त्रिज्या है, तो

$2\pi r^2 = 249.47$, अर्थात् $r^2 = 249.48 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$ (1)

अर्थात् $r^2 = \frac{567 \times 7}{100}$ जिससे $r = 6.3$ m प्राप्त होता है (1)

अत: गुंबज का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{63}{10}^{\,3}$ (1)

$= 523.91$ m^3 (1)

30. सही आयत चित्र बनाने के लिए (4)

600 से कम जीवन काल वाले लैंपों की संख्या

$= 14 + 56 + 60 = 130$ (2)

सेट-II

प्रश्न पत्र का डिज़ाइन

गणित कक्षा 9

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

प्रश्न पत्र की विभिन्न विमाओं के लिए अंकों का वितरण या भार (महत्व) निम्नलिखित प्रकार से होगा:

1. विषय-वस्तु/विषय इकाई के भार

क्रम संख्या	इकाई	अंक
1.	संख्या पद्धतियाँ	06
2.	बीजगणित	20
3.	निर्देशांक ज्यामिति	06
4.	ज्यामिति	22
5.	मेन्सुरेशन	14
6.	सांख्यिकी और प्रायिकता	12

2. प्रश्नों के प्रकार के भार

क्रम संख्या	प्रश्नों के प्रकार	प्रत्येक प्रश्न के अंक	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक
1.	MCQ	01	10	10
2.	SAR	02	05	10
3.	SA	03	10	30
4.	LA	06	05	30
		योग	**30**	**80**

3. विकल्पों की योजना

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, अर्थात् व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। परंतु 3 अंक वाले दो प्रश्न और 6 अंक वाले एक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।

4. प्रश्नों का कठिनाई स्तर के भार

क्रम संख्या	प्रश्नों के अनुमानित कठिनाई स्तर	अंकों का प्रतिशत
1.	सरल	20
2.	औसत	60
3.	कठिन	20

टिप्पणी :

कोई भी प्रश्न कठिनाई स्तर में व्यक्तियों के अनुसार बदल सकता है। वैसे तो, प्रत्येक प्रश्न से संबंधित मूल्यांकन परीक्षा देने वाले संपूर्ण समूहों से व्यापक अपेक्षाओं के आधार पर प्रश्न पत्र बनाने वाले व्यक्ति/शिक्षक द्वारा किया जाएगा। यहाँ जो कुछ दिया गया है वह केवल प्रश्न पत्र को भारों के आधार पर संतुलित बनाने के लिए है न कि किसी स्तर पर अंक योजना का पैटर्न निर्धारित करने के लिए।

ब्लू प्रिंट

गणित कक्षा 9

प्रश्नों के प्रकार → विषय इकाई ↓	MCQ	SAR	SA	LA	योग
संख्या पद्धतियाँ	1 (1)	2 (1)	3 (1)	–	6 (3)
बीजगणित बहुपद, दो चरों में रैखिक समीकरण	1 (1)	4 (2)	9 (3)	6 (1)	20 (7)
निर्देशांक ज्यामिति	1 (1)	2 (1)	3 (1)	–	6 (3)
ज्यामिति यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय, रेखाएँ और कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, क्षेत्रफल, वृत्त, रचनाएँ	4 (4)	–	6 (2)	12 (2)	22 (8)
मेन्सुरेशन क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	2 (2)	–	6 (2)	6 (1)	14 (5)
सांख्यिकी और प्रायिकता	1 (1)	2 (1)	3 (1)	6 (1)	12 (4)
योग	**10 (10)**	**10 (05)**	**30 (10)**	**30 (05)**	**80 (30)**

सारांश

बहु विकल्पीय प्रश्न (MCQ)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 10
तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SAR)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 10
संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SA)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 30
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 30
योग	**30**	**80**

गणित कक्षा 9

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

सामान्य निर्देश :

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

2. प्रश्न पत्र में चार खंड अ, ब, स और द हैं। खंड अ में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 1 अंक का है, खंड ब में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 2 अंक के है, खंड स में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 3 अंक का है तथा खंड द में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 6 अंक का है।

3. व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। यद्यपि 3 अंक वाले दो प्रश्न तथा 6 अंक वाले एक प्रश्न में आंतरिक विकल्प प्रदान किए गए हैं।

4. रचनाएँ स्वच्छ तथा ठीक दिए हुए मापनों के अनुसार होनी चाहिए।

5. कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड अ

प्रश्न 1 से 10 में से प्रत्येक में उत्तर के चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प लिखिए –

1. निम्नलिखित में से कौन x- अक्ष के समांतर एक रेखा निरूपित करती है?

(A) $x + y = 3$ (B) $2x + 3 = 7$ (C) $2y - 3 = y + 1$ (D) $x + 3 = 0$

2. बहुपद $p(x) = 3x + 5$ का शून्यक है :

(A) 0 (B) – 5 (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{-5}{3}$

3. कार्तीय तल में, एक बिंदु P का भुज, P की निम्नलिखित से लांबिक दूरी होता है:

(A) y-अक्ष (B) x-अक्ष (C) मूलबिंदु (D) रेखा $y = x$

4. प्रतिवर्ती कोण वह कोण है जो

(A) $90°$ से छोटा होता है (B) $90°$ से बड़ा होता है

(C) $180°$ से छोटा होता है (D) $180°$ से बड़ा होता है

5. यदि $l, m,$ और n रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $l \parallel m$ और $m \parallel n$ है, तो

(A) $l \parallel n$ (B) $l \perp n$

(C) l और n प्रतिच्छेदी हैं (D) $l = n$

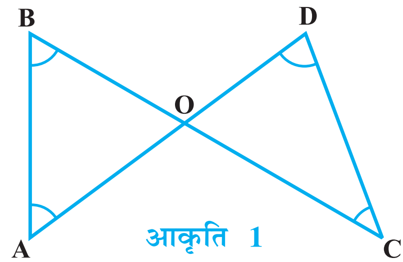
6. आकृति 1 में, $\angle B < \angle A$ और $\angle D > \angle C$, है तो :

(A) AD > BC

(B) AD = BC

(C) AD < BC

(D) AD = 2BC



आकृति 1

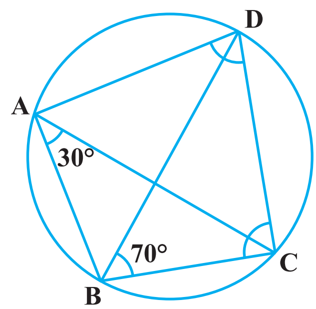
7. आकृति 2 में, $\angle BCD$ का माप है :

(A) 100°

(B) 70°

(C) 80°

(D) 30°



आकृति 2

8. व्यास 10 cm और तिर्यक ऊँचाई 13cm वाले शंकु की ऊँचाई है:

(A) $\sqrt{69}$ cm (B) 12 cm (C) 13 cm (D) $\sqrt{194}$ cm

9. त्रिज्या r वाले एक ठोस अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है:

(A) $4\pi r^2$ (B) $2\pi r^2$ (C) $3\pi r^2$ (D) $\frac{2}{3}\pi r^3$

10. यदि 10, 11, 12, 10, 15, 14, 15, 13, 12, x, 9, 7 आँकड़ों का बहुलक 15 है, तो x का मान है:

(A) 10 (B) 15 (C) 12 (D) $\frac{21}{2}$

खंड ब

11. दो संख्या $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच में एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए। यह दिया है कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है।

12. बिना वास्तविक विभाजन किए, शेषफल ज्ञात कीजिए, जब $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग दिया जाता है तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

13. (2, 10) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए। ऐसी और कितनी रेखाएँ हैं और क्यों?

14. निर्देशांकों (2, 3) और (2, –1) वाले बिंदु जिस रेखा पर स्थित हैं वह किस अक्ष के समांतर हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

15. एक पासे को 100 बार फेंका जाता है तथा जितनी बार 6 आया उसे लिख लिया जाता है। यदि इस सूचना से प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{2}{5}$ परिकलित की जाती है, तो 6 कितनी बार आया था? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

खंड स

16. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

17. गुणनखंड कीजिए : $54a^3 - 250b^3$

18. जाँच कीजिए कि क्या बहुपद $p(y) = 2y^3 + y^2 + 4y - 15$, द्विपद $(2y - 3)$ का एक गुणज है।

19. यदि बिंदु (3, 4) समीकरण $2y = ax + 6$ के आलेख पर स्थित एक बिंदु है, तो ज्ञात कीजिए कि क्या (6, 5) भी इसी आलेख पर स्थित कोई बिंदु है।

20. कार्तीय तल पर बिंदुओं (–3, 0), (5, 0) और (0, 4) को आलेखित कीजिए। इन बिंदुओं को मिलाने से बनी आकृति का नाम बताइए और उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. एक समलंब ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं, जहाँ $AB \parallel DC$ है। सिद्ध कीजिए कि ar(AOD) = ar(BOC) है।

अथवा

ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC कोण A और कोण C दोनों को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक वर्ग है।

22. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $\angle Q = 60°$, $\angle R = 45°$ तथा PQ + QR + PR = 11 cm है।

23. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।

24. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 cm है और उसकी ऊँचाई 3.5 m है। 12.50 रु प्रति m^2 की दर से उस स्तंभ के वक्र पृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक ठोस शंकु की ऊँचाई 16 cm है तथा उसकी आधार त्रिज्या 12 cm है। उस शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ का प्रयोग कीजिए।}\right)$

25. एक पासे को 400 बार फेंका जाता है तथा इससे प्राप्त परिणामों की बारंबारताएँ नीचे दी गई हैं:

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	70	65	60	75	63	67

एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

खंड द

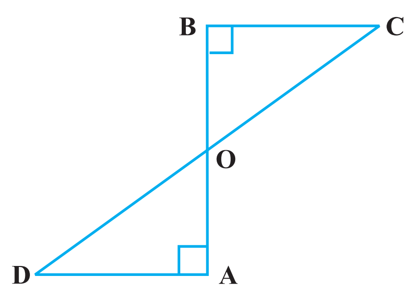
26. कोई खेत एक समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25 m और 10 m हैं। यदि इसकी असमांतर भुजाएँ 14 m और 13 m हैं, तो इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

27. निम्नलिखित बंटन के लिए एक आयत चित्र और बारंबारता बहुभुज खींचिए :

प्राप्तांक	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
विद्यार्थियों की संख्या	7	10	6	8	12	3	2	2

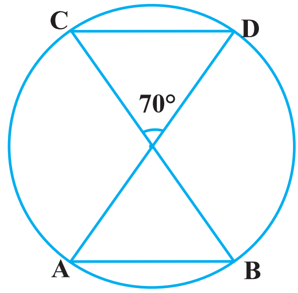
28. सिद्ध कीजिए कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा के बराबर हों।

उपरोक्त का प्रयोग करते हुए, आकृति 3 में सिद्ध कीजिए कि CD रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है, जहाँ AD और BC, रेखाखंड AB पर बराबर लंबाइयों के लंब हैं।



आकृति 3

29. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं। इसका प्रयोग करते हुए, आकृति 4 में $\angle ABO$ ज्ञात कीजिए, यदि $AB = CD$ तथा O वृत्त का केंद्र है।



आकृति 4

30. व्यंजक $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ के गुणनखंड कीजिए।

अथवा

फारेनहाइट (F) को सेल्सियस (C) में बदलने वाली रैखिक समीकरण $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

x-अक्ष पर सेल्सियस और y-अक्ष पर फारेनहाइट लेते हुए, इस समीकरण का आलेख खींचिए। आलेख से 30°C के संगत फारेनहाइट में तापमान ज्ञात कीजिए।

अंक देय योजना

गणित कक्षा 9

खंड अ

1. (C)	**2.** (D)	**3.** (A)	**4.** (D)	**5.** (A)
6. (C)	**7.** (C)	**8.** (B)	**9.** (C)	**10.** (B)

$(1 \times 10 = 10)$

खंड ब

11. क्योंकि $\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857 \ldots$ और $(\frac{1}{2})$

$\frac{2}{7} = 0.285714\ 285714 \ldots$ है, $(\frac{1}{2})$

इसलिए $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच में एक अपरिमेय संख्या $(\frac{1}{2})$

$0.1501500\ 15000 \ldots$ हो सकती है। $(\frac{1}{2})$

12. मान लीजिए कि $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ है। तब शेषफल प्रमेय द्वारा

$p(x)$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल $p(1)$ होगा। $(1\frac{1}{2})$

अतः, शेषफल $= 1 + 1 - 2 + 1 + 1 = 2$ $(\frac{1}{2})$

13. $3x - y + 4 = 0,\ x - y + 8 = 0$ $(\frac{1}{2})$

एक बिंदु से होकर अपरिमित रूप से अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

अतः, ऐसी अपरिमित रूप से अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं। $(1\frac{1}{2})$

14. y-अक्ष के समांतर $(\frac{1}{2})$

क्योंकि दोनों बिंदुओं के x-निर्देशांक 2 हैं,

अतः दोनों बिंदु रेखा $x = 2$ पर स्थित हैं, जो y-अक्ष के समांतर है। $(1\frac{1}{2})$

15. उत्तर 40 है। $(\frac{1}{2})$

$$\text{एक घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{होने वाली घटना की बारंबारता}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

अतः, $\frac{2}{5} = \frac{x}{100}$, अर्थात् $x = 40$ $(1\frac{1}{2})$

खंड स

16. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ और $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ (1)

अतः तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}$ हैं। (2)

17. $54a^3 - 250b^3 = 2[27a^3 - 125b^3]$ (1)

$= 2[(3a)^3 - (5b)^3]$ $(\frac{1}{2})$

$= 2(3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$ $(1\frac{1}{2})$

18. $p(y)$, $(2y - 3)$ का एक गुणज है, यदि $(2y - 3)$ बहुपद $p(y)$ का एक गुणनखंड है। (1)

अतः, $p\left(\frac{3}{2}\right)$ शून्यक होना चाहिए।

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{2}\right) - 15$$ (1)

$= \frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 6 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0$

अत:, $p(y)$ द्विपद $(2y - 3)$ का एक गुणज है। (1)

19. क्योंकि (3, 4) समीकरण $2y = ax + 6$ के आलेख पर स्थित है, अत:, $8 = 3a + 6$

अर्थात् $a = \frac{2}{3}$ (1)

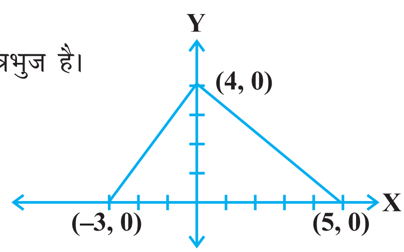
अब हमें प्राप्त है : $2y = \frac{2}{3}x + 6$ $(\frac{1}{2})$

$x = 6, y = 5$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है : $10 = \frac{2}{3}.6 + 6 = 4 + 6 = 10$ (1)

अत:, (6, 5) इसी आलेख पर स्थित है। $(\frac{1}{2})$

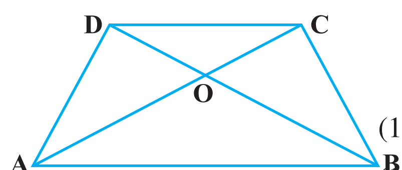
20. सही आलेखन से बनने वाली आकृति एक त्रिभुज है। $(1\frac{1}{2})$

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ वर्ग इकाई $(\frac{1}{2})$



21. ar (ABD) = ar (ABC) (1)

[त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच में बने हैं।]

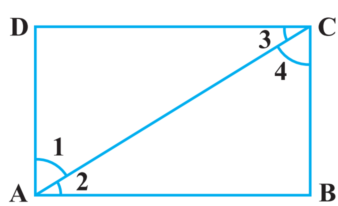


अत:, ar (ABD) – ar (AOB) = ar (ABC) – ar (AOB) (1)

अर्थात् ar (AOD) = ar (BOC) (1)

अथवा

ABCD एक आयत दिया है।



जिसमें $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ $(\frac{1}{2})$

परंतु $\angle 1 = \angle 4$ (एकांतर कोण) (1)

अत:, हमें प्राप्त है : $\angle 2 = \angle 4$, जिसका अर्थ AB = BC है। इसी प्रकार AD = CD $(\frac{1}{2})$

अत:, ABCD एक वर्ग है। (1)

22. स्वच्छ और सही रचना के लिए (3)

23. $a = 18$ cm, $b = 10$ cm है। अत:, $c = 42 - 28 = 14$ cm और $s = 21$ $(\frac{1}{2})$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $(\frac{1}{2})$

$= \sqrt{(21)(3)(11)(7)}$ (1)

$= 21\sqrt{11}$ या 69.69 cm^2 (लगभग) (1)

24. $r = 25$ cm, $h = 3.5$ m $(\frac{1}{2})$

C.S.A. $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{11}{2} m^2$ $(1\frac{1}{2})$

अत:, लागत $= \frac{11}{2} \times 12.50$ रु $= 68.75$ रु (1)

अथवा

$h = 16$ cm और $r = 12$ cm, अत:, $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 20$ cm (1)

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ (1)

$= \frac{22}{7} \times 12 \times 32 = 1206\frac{6}{7}$ cm^2 (1)

25. बारंबारताओं का योग $= 400$ $(\frac{1}{2})$

विषम संख्याएँ हैं : 1, 3, 5

सभी विषम संख्याओं की बारंबारता = 70 + 60 + 63 = 193 (1)

$$P(\text{घटना}) = \frac{\text{इस घटना के घटित होने की कुल संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$ $(\frac{1}{2})$

अत:, विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{193}{400}$ (1)

खंड द

26. मान लीजिए कि AL = x है। अत:, BM = $15 - x$ $(\frac{1}{2})$

अब $13^2 - x^2 = (14)^2 - (15 - x)^2$ 1

इसको हल करने पर $x = 6.6$ m प्राप्त होता है। $(\frac{1}{2})$

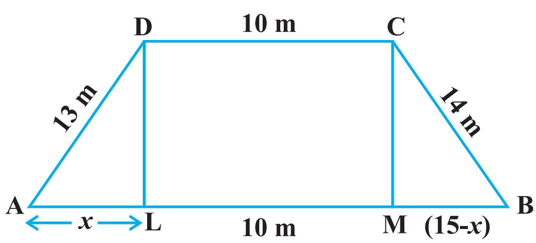
अत:, ऊँचाई DL $= \sqrt{(13)^2 - (6.6)^2}$ $(\frac{1}{2})$

$= 11.2$ m (1)

अत:, समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई (1)

$= \frac{1}{2}(10 + 25)(11.2)\ m^2$ (1)

$= 196\ m^2$ $(\frac{1}{2})$



27. सही आयतचित्र बनाने के लिए (4)

सही बारंबारता बहुभुज बनाने के लिए (2)

28. सही दिया है, सिद्ध करना है, रचना और आकृति के लिए $(\frac{1}{2}\times 4 = 2)$

सही उपपत्ति के लिए (2)

$\angle A = \angle B = 90^o$ $(\frac{1}{2})$

$\angle 1 = \angle 2$ (शीर्षाभिमुख कोण)

AD = BC (दिया है) $(\frac{1}{2})$

अत: Δ AOD $\cong$ Δ BOC [AAS] $(\frac{1}{2})$

अत: AO = OB, अर्थात् CD, AB को समद्विभाजित करता है। $(\frac{1}{2})$

29. सही दिया है, सिद्ध करना, रचना और आकृति के लिए $(\frac{1}{2}\times 4=2)$

सही उपपत्ति के लिए (2)

$\angle$ COD = 70° (दिया है) (1)

$\angle$ AOB = $\angle$ COD = 70° (प्रमेयानुसार)

Δ OAB में, OA = OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

इसलिए, $\angle$ ABO = $\angle$ BAO (Δ की समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

इसलिए, 2$\angle$ ABO = 180 – 70 = 110 (1)

इसलिए, $\angle ABO = \frac{110}{2} = 55°$

30. $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 18xy\ (2x + 3y)$ (2)

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)\ (3y)\ (2x + 3y)$ (2)

$= (2x + 3y)^3 = (2x + 3y)\ (2x + 3y)\ (2x + 3y)$ (2)

अथवा

x-अक्ष पर सेल्सियस और y-अक्ष पर फारेनहाइट लेकर सही आलेख खींचने के लिए (4)

आलेख से C = 30 के लिए F = 86° है। (2)

टिप्पणी

16-04-2018