अध्याय 1

वास्तविक संख्याएँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका :** दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसे अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है जो $a = bq + r, 0 \leq r < b$ को संतुष्ट करते हैं।
- दो धनात्मक पूर्णांकों, मान लीजिए c और $d, c > d$ का HCF प्राप्त करने के लिए यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म :

  चरण 1 : ऐसी पूर्ण संख्याएँ q और r प्राप्त करने के लिए कि $c = dq + r, 0 \leq r < d$ हो, c और d पर यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका का अनुप्रयोग कीजिए।

  चरण 2 : यदि $r = 0$ है, तो c और d का HCF संख्या d है। यदि $r \neq 0$ है, तो d और r पर विभाजन प्रमेयिका का अनुप्रयोग कीजिए।

  चरण 3 : इस प्रक्रिया को तब तक ज़ारी रखिए, जब तक कि शेषफल शून्य न प्राप्त हो जाए। इस स्तर पर भाजक ही वाँछित HCF होगा।
- **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय :** प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह व्यंजक (गुणनखंडन), अभाज्य गुणनखंडों के आने के क्रमों पर ध्यान न देते हुए अद्वितीय होता है।
- मान लीजिए कि p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करता है, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।
- एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है।
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

- दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए HCF $(a, b) \times$ LCM $(a, b) = a \times b$ होता है।

- मान लीजिए कि $x = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q सहअभाज्य हैं, एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m.5^n$ के रूप का होता है; जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक हैं।

- मान लीजिए कि $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m.5^n$ के रूप का नहीं है; जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब, x का असांत आवर्ती दशमलव प्रसार होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : परिमेय संख्या $\frac{33}{2^2.5}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित के बाद समाप्त होता है

(A) एक दशमलव स्थान (B) दो दशमलव स्थान

(C) तीन दशमलव स्थान (D) तीन से अधिक दशमलव स्थान

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका कहती है कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, ऐसे अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है कि $a = bq + r$, जहाँ r निम्नलिखित को अवश्य ही संतुष्ट करेगा

(A) $1 < r < b$ (B) $0 < r \le b$

(C) $0 \le r < b$ (D) $0 < r < b$

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 1.1

निम्नलिखित प्रश्नों में, दिए हुए चार विकल्पों में सें सही उत्तर चुनिए :

1. किसी पूर्णांक m के लिए, प्रत्येक सम पूर्णांक निम्नलिखित रूप का होता है

(A) m (B) $m + 1$

(C) $2m$ (D) $2m + 1$

2. किसी पूर्णांक q के लिए, प्रत्येक विषम पूर्णांक निम्नलिखित रूप का होता है

(A) q (B) $q + 1$

(C) $2q$ (D) $2q + 1$

3. संख्या $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य होती है , यदि n है एक

(A) पूर्णांक (B) प्राकृत संख्या

(C) विषम संख्या (D) सम संख्या

4. यदि 65 और 117 के HCF को $65m - 117$ के रूप में व्यक्त किया जा सके ,तो m का मान है

(A) 4 (B) 2

(C) 1 (D) 3

5. वह सबसे बड़ी संख्या, जिससे 70 और 125 को विभाजित करने पर क्रमश: शेषफल 5 और 8 प्राप्त हों, है

(A) 13 (B) 65

(C) 875 (D) 1750

6. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b को $a = x^3y^2$ और $b = xy^3$ के रूप में व्यक्त किया जाए, जहाँ x और y अभाज्य संख्याएँ हैं, तो HCF (a, b) है

(A) xy (B) xy^2 (C) x^3y^3 (D) x^2y^2

7. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों p और q को $p = ab^2$ और $q = a^3b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ a और b अभाज्य संख्याएँ हैं, तो LCM (p, q) है

(A) ab (B) a^2b^2 (C) a^3b^2 (D) a^3b^3

8. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल होता है

(A) सदैव अपरिमेय संख्या (B) सदैव परिमेय संख्या

(C) परिमेय या अपरिमेय संख्या (D) एक

9. 1 से 10 तक की संख्याओं (दोनों सम्मिलित हैं) में से सभी संख्याओं से विभाज्य न्यूनतम संख्या है

(A) 10 (B) 100 (C) 504 (D) 2520

10. परिमेय संख्या $\frac{14587}{1250}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित किन दशमलव स्थानों के बाद समाप्त हो जाएगा

(A) एक (B) दो

(C) तीन (D) चार

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: जब एक धनात्मक पूर्णांक a को 3 से भाग दिया जाता है, तो शेषफल r के मान केवल 0 और 1 हो सकते हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं।

यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका के अनुसार,

$a = 3q + r$, जहाँ $0 \le r < 3$ है और r एक पूर्णांक है। अत: r के मान 0, 1 या 2 हो सकते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या संख्या 6^n जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है, अंक 5 पर समाप्त हो सकती है? कारण दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ है, अर्थात 6^n के गुणनखंडन में आने वाली अभाज्य संख्याएँ केवल 2 और 3 हैं, 5 नहीं है। अत:, यह संख्या 5 पर समाप्त नहीं हो सकती।

प्रश्नावली 1.2

1. क्या प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक $4q + 2$ के रूप का हो सकता है, जहाँ q एक पूर्णांक है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

2. "दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 2 से विभाज्य है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? कारण दीजिए।

3. "तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 6 से विभाज्य है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. लिखिए कि क्या किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $3m + 2$ के रूप का हो सकता है, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. एक धनात्मक पूर्णांक $3q + 1$ के रूप का है, जहाँ q एक प्राकृत संख्या है। क्या इसके वर्ग को $3m + 1$ से भिन्न रूप में, अर्थात् $3m$ या $3m + 2$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ m कोई पूर्णांक है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

6. दोनों ही संख्याएँ 525 और 3000 केवल 3, 5, 15, 25 और 75 से विभाज्य हैं। HCF (525, 3000) क्या है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

7. स्पष्ट कीजिए कि $3 \times 5 \times 7 + 7$ एक भाज्य संख्या क्यों है।

8. क्या किन्हीं दो संख्याओं का HCF 18 और LCM 380 हो सकता है? कारण दीजिए।

9. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए, ज्ञात कीजिए कि क्या $\frac{987}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत होगा या असांत आवर्ती होगा। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

10. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार 327.7081 है। जब इस संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जाएगा, तो आप q के अभाज्य गुणनखंडों के बारे में क्या कह सकते हैं? कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन से संख्या-युग्म सहअभाज्य हैं:

(i) 231, 396 (ii) 847, 2160

हल : आइए, संख्याओं के प्रत्येक युग्म का HCF ज्ञात करें।

(i) $396 = 231 \times 1 + 165$

$231 = 165 \times 1 + 66$

$165 = 66 \times 2 + 33$

$66 = 33 \times 2 + 0$

अत:, HCF = 33 है। इसलिए संख्याएँ सहअभाज्य नहीं हैं।

(ii) $2160 = 847 \times 2 + 466$

$847 = 466 \times 1 + 381$

$466 = 381 \times 1 + 85$

$381 = 85 \times 4 + 41$

$85 = 41 \times 2 + 3$

$41 = 3 \times 13 + 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$2 = 1 \times 2 + 0$

अत:, HCF = 1 है। इसलिए संख्याएँ सहअभाज्य हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: दर्शाइए कि किसी पूर्ण संख्या m के लिए एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $8m + 1$ के रूप का होता है।

हल : कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्ण संख्या है।

अत:, $(2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q (q + 1) + 1$ (1)

अब $q\ (q+1)$ या तो 0 या एक सम संख्या होगी, जिसे $2m$ से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ m एक पूर्ण संख्या है।

अत:, $(2q + 1)^2 = 4.2\ m + 1 = 8\ m + 1$ [(1) से]

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : आइये कल्पना करें कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। मान लीजिए $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$, जहाँ a एक परिमेय संख्या है।

अत: , $\sqrt{2} = a-\sqrt{3}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2 = a^2 + 3 - 2a\sqrt{3}$$

अत:, $\sqrt{3}=\dfrac{a^2+1}{2a}$ है, जिससे एक विरोधाभास या अंतर्विरोध (contradiction) प्राप्त होता है, क्योंकि दायाँ पक्ष एक परिमेय संख्या है जबकि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। अत: , $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.3

1. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक q के लिए, या तो $4q$ या $4q + 1$ के रूप का होता है।
2. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन, किसी पूर्णांक m के लिए, $4m$, $4m + 1$ या $4m + 3$ के रूप का होता है।
3. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक q के लिए, $5q + 2$ या $5q + 3$ के रूप का नहीं हो सकता।
4. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए, $6m +2$ या $6m + 5$ के रूप का नहीं हो सकता।
5. दर्शाइए कि किसी पूर्णांक q के लिए, किसी विषम पूर्णांक का वर्ग $4q + 1$के रूप का होता है।
6. यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो दर्शाइए कि $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य है।
7. सिद्ध कीजिए कि यदि x और y दोनों धनात्मक विषम पूर्णांक हैं, तो $x^2 + y^2$ एक सम संख्या है, परंतु 4 से विभाज्य नहीं है।

8. 441, 567 और 693 का HCF ज्ञात करने के लिए, यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

9. यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हुए, ऐसी सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 1251, 9377 और 15628 को भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 2 और 3 प्राप्त हो।

10. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

11. दर्शाइए कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 12^n अंक 0 या 5 पर समाप्त नहीं होगी।

12. एक प्रातःकालीन सैर के समय, तीन व्यक्ति एक साथ किसी स्थान से चलना प्रारंभ करते हैं तथा उनके कदमों के माप क्रमशः 40 cm, 42 cm और 45 cm हैं। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी चले कि वह इस दूरी को पूर्ण कदमों में तय करे?

13. परिमेय संख्या $\frac{257}{5000}$ के हर को $2^m \times 5^n$ के रूप में लिखिए, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक है। इसके बाद, बिना वास्तविक विभाजन के इस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार लिखिए।

14. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है, जहाँ p और q अभाज्य संख्याएँ हैं।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : दर्शाइए कि किसी पूर्णांक q के लिए, एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $6q + 1$ या $6q + 3$ के रूप का हो सकता है।

हल : हम जानते हैं कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक, एक पूर्णांक m के लिए, $6m$, $6m + 1$, $6m + 2$, $6m + 3$, $6m + 4$ या $6m + 5$ के रूप का हो सकता है।

इसलिए एक विषम धनात्मक पूर्णांक $6m + 1$, $6m + 3$, या $6m + 5$ के रूप का हो सकता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होते है:

$(6m + 1)^2 = 36m^2 + 12m + 1 = 6(6m^2 + 2m) + 1 = 6q + 1$ है ,जहाँ q एक पूर्णांक है।

$(6m + 3)^2 = 36m^2 + 36m + 9 = 6(6m^2 + 6m + 1) + 3 = 6q + 3$, जहाँ q एक पूर्णांक है।

$(6m + 5)^2 = 36m^2 + 60m + 25 = 6(6m^2 + 10m + 4) + 1 = 6q + 1$, जहाँ q एक पूर्णांक है।

इस प्रकार, एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $6q + 1$ या $6q + 3$ के रूप का हो सकता है।

प्रश्नावली 1.4

1. दर्शाइए कि $6q+r$ के रूप के एक धनात्मक पूर्णांक का घन भी, जहाँ q एक पूर्णांक है तथा $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ हैं, $6m+r$ के रूप का होता है। जहाँ m एक पूर्णांक है।

2. सिद्ध कीजिए कि $n, n+2$ और $n+4$ में से एक और केवल एक ही 3 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

3. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों में से एक पूर्णांक 3 से अवश्य ही विभाज्य होना चाहिए।

4. सिद्ध कीजिए कि किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए संख्या $n^3 - n$, 6 से विभाज्य है।

5. दर्शाइए कि $n, n+4, n+8, n+12$ और $n+16$ में से एक और केवल एक ही 5 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

[**संकेत :** किसी भी धनात्मक पूर्णांक को $5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3, 5q+4$ के रूप में लिखा जा सकता है।]

अध्याय 2

बहुपद

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ :** किसी बहुपद $p(x)$ के शून्यक परिशुद्ध रूप से उन बिंदुओं के x-निर्देशांक होते हैं, जहाँ $y = p(x)$ का आलेख x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।
- **एक बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध :** यदि α और β एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ होता है।
- यदि α, β और γ किसी त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हैं,

  तो $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ और $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ होता है।
- विभाजन एल्गोरिथ्म कहती है कि एक बहुपद $p(x)$ और एक शून्येतर बहुपद $g(x)$ दिए रहने पर, दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे होते हैं कि $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ हो, जहाँ $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$ है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि द्विघात बहुपद $x^2 + 3x + k$ का एक शून्यक 2 है, तो k का मान है

(A) 10 (B) –10 (C) 5 (D) –5

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के दो शून्यक 0 दिए हैं। तीसरा शून्यक है

(A) $\frac{-b}{a}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{c}{a}$ (D) $-\frac{d}{a}$

हल : उत्तर (A) [**संकेत:** क्योंकि यदि तीसरा शून्यक α है, तो शून्यकों का योग $= \alpha + 0 + 0 = \frac{-b}{a}$ है।]

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित प्रश्नों में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि द्विघात बहुपद $(k-1)\,x^2 + k\,x + 1$ के शून्यकों में से एक शून्यक -3 है, तो k का मान है

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{-4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{-2}{3}$

2. शून्यक -3 और 4 वाला द्विघात बहुपद है

(A) $x^2 - x + 12$ (B) $x^2 + x + 12$

(C) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ (D) $2x^2 + 2x - 24$

3. यदि द्विघात बहुपद $x^2 + (a + 1)\,x + b$ के शून्यक 2 और -3 हैं, तो

(A) $a = -7, b = -1$ (B) $a = 5, b = -1$

(C) $a = 2, b = -6$ (D) $a = 0, b = -6$

4 . शून्यक -2 और 5 वाले बहुपदों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 3 से अधिक

5. त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ का एक शून्यक 0 दिया हुआ है। अन्य दोनों शून्यकों का गुणनफल है

(A) $-\frac{c}{a}$ (B) $\frac{c}{a}$ (C) 0 (D) $-\frac{b}{a}$

6. यदि त्रिघात बहुपद $x^3 + ax^2 + bx + c$ का एक शून्यक -1 है, तो अन्य दोनों शून्यकों का गुणनफल है

(A) $b - a + 1$ (B) $b - a - 1$ (C) $a - b + 1$ (D) $a - b - 1$

7. द्विघात बहुपद $x^2 + 99x + 127$ के शून्यक हैं

(A) दोनों धनात्मक (B) दोनों ऋणात्मक

(C) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक (D) दोनों बराबर

8. द्विघात बहुपद $x^2 + kx + k, k \neq 0$ के शून्यक

(A) दोनों धनात्मक नहीं हो सकते

(B) दोनों ऋणात्मक नहीं हो सकते

(C) सदैव असमान होते हैं

(D) सदैव बराबर होते हैं

9. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, c \neq 0$ के शून्यक बराबर हैं, तो

(A) c और a विपरीत चिन्हों के हैं

(B) c और b विपरीत चिन्हों के हैं

(C) c और a एक ही चिन्ह के हैं

(D) c और b एक ही चिन्ह के हैं

10. यदि $x^2+ax + b$ के रूप के एक द्विघात बहुपद का एक शून्यक दूसरे शून्यक का ऋणात्मक हो, तो

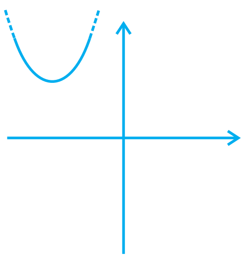
(A) इसमें कोई रैखिक पद नहीं होता तथा अचर पद ऋणात्मक होता है

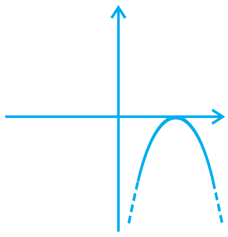
(B) इसमें कोई रैखिक पद नहीं होता तथा अचर पद धनात्मक होता है

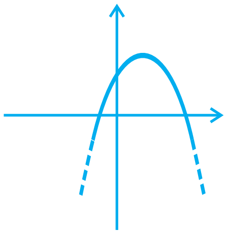
(C) इसका रैखिक पद हो सकता है, परंतु अचर पद ऋणात्मक होता है

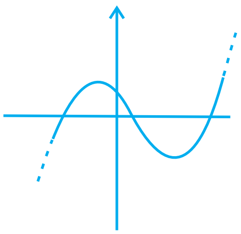
(D) इसका रैखिक पद हो सकता है, परंतु अचर पद धनात्मक होता है

11. निम्नलिखित में से कौन एक द्विघात बहुपद का आलेख नहीं है?

(A)


(B)


(C)


(D)


(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या बहुपद $p(x)$ को $2x + 3$ से भाग देने पर शेषफल $x - 1$ हो सकता है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि घात $(x - 1) = 1 =$ घात $(2x + 3)$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

यदि एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दोनों शून्यक ऋणात्मक हैं, तो a, b और c में से प्रत्येक का एक ही चिन्ह होता है।

हल : सत्य, क्योंकि $-\frac{b}{a} =$ शून्यकों का योग < 0, इसलिए $\frac{b}{a} > 0$ है। साथ ही, शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} > 0$ है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए और उनका औचित्य दीजिए :

(i) क्या $x^6 + 2x^3 + x - 1$ को x में घात 5 के एक बहुपद से भाग देने पर भागफल $x^2 - 1$ हो सकता है?

(ii) $ax^2 + bx + c$ को $px^3 + qx^2 + rx + s, p \neq 0$ से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्या होंगे?

(iii) यदि बहुपद $p(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल शून्य हो, तो $p(x)$ और $g(x)$ की घातों में क्या संबंध है?

(iv) यदि एक शून्येतर बहुपद $p(x)$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल 0 हो, तो $p(x)$ और $g(x)$ की घातों में क्या संबंध है?

(v) क्या किसी विषम पूर्णांक $k > 1$ के लिए, द्विघात बहुपद $x^2 + kx + k$ के बराबर शून्यक हो सकते हैं?

2. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के लिए औचित्य दीजिए।

(i) यदि एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दोनों शून्यक धनात्मक हैं, तो a, b और c में से सभी का समान चिन्ह होता है।

(ii) यदि एक बहुपद का आलेख x-अक्ष को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करे, तो यह एक द्विघात बहुपद नहीं हो सकता।

(iii) यदि एक बहुपद का आलेख x-अक्ष को ठीक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है, तो यह आवश्यक नहीं है कि वह एक द्विघात बहुपद हो।

(iv) यदि एक त्रिघात बहुपद के दो शून्यकों में से प्रत्येक शून्य है, तो इसके रैखिक और अचर पद नहीं हो सकते।

(v) यदि एक त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक ऋणात्मक हैं, तो इस बहुपद के सभी गुणांक और अचर पद एक ही चिह्न के होते हैं।

(vi) यदि एक त्रिघात बहुपद $x^3 + ax^2 - bx + c$ के तीनों शून्यक धनात्मक हैं, तो a, b और c में से कम से कम एक अवश्य ही ऋणेतर होगा।

(vii) k का केवल वह मान जिसके लिए द्विघात बहुपद $kx^2 + x + k$ के शून्यक बराबर हैं शून्यक $\frac{1}{2}$ है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: बहुपद $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा इस बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच के संबंधों का सत्यापन कीजिए।

हल : $x^2 + \frac{1}{6}x - 2 = \frac{1}{6}(6x^2 + x - 12) = \frac{1}{6}[6x^2 + 9x - 8x - 12]$

$$= \frac{1}{6}[3x(2x+3) - 4(2x+3)] = \frac{1}{6}(3x-4)(2x+3)$$

अत:, दिए हुए बहुपद के शून्यक $\frac{4}{3}$ और $-\frac{3}{2}$ हैं।

दिया हुआ बहुपद $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ है।

शून्यकों का योग $= \frac{4}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{6} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ तथा

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{4}{3} \times \frac{-3}{2} = -2 = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

प्रश्नावली 2.3

गुणनखंडन द्वारा निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा इन बहुपदों के गुणांकों और शून्यकों के बीच के संबंधों को सत्यापित कीजिए:

1. $4x^2 - 3x - 1$

2. $3x^2 + 4x - 4$

3. $5t^2 + 12t + 7$

4. $t^3 - 2t^2 - 15t$

5. $2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}$

6. $4x^2 + 5\sqrt{2}x - 3$

7. $2s^2 - (1 + 2\sqrt{2})s + \sqrt{2}$

8. $v^2 + 4\sqrt{3}v - 15$

9. $y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{5}y - 5$

10. $7y^2 - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3}$

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा $-\frac{3}{2}$ हैं। इसके शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

हल : वह द्विघात बहुपद जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$ और $-\frac{3}{2}$ हैं, $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2}$ है।

$$x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}[2x^2 - 2\sqrt{2}x - 3]$$

$$= \frac{1}{2}[2x^2 + \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x - 3]$$

$$= \frac{1}{2}[\sqrt{2}x(\sqrt{2}x + 1) - 3(\sqrt{2}x + 1)]$$

$$= \frac{1}{2} [\sqrt{2}x + 1] [\sqrt{2}x - 3]$$

अतः, वाँछित शून्यक $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\frac{3}{\sqrt{2}}$ हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि $x^3 + 2x^2 + kx + 3$ को $x - 3$ से भाग देने पर शेषफल 21 प्राप्त होता है, तो k का मान और भागफल ज्ञात कीजिए। इसके बाद, त्रिघात बहुपद $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx + 3$ है।

तब, $p(3) = 3^3 + 2 \times 3^2 + 3k + 3 = 21$

अर्थात् $3k = -27$

अर्थात् $k = -9$

अतः दिया हुआ बहुपद $x^3 + 2x^2 - 9x + 3$ होगा।

अब,

$$
\begin{array}{r|l}
x - 3) \; x^3 + 2x^2 - 9x + 3 & (x^2 + 5x + 6 \\
x^3 - 3x^2 \quad\quad\quad\quad & \\
\hline
5x^2 - 9x + 3 & \\
5x^2 - 15x \quad\; & \\
\hline
6x + 3 & \\
6x - 18 & \\
\hline
21 &
\end{array}
$$

अतः, भागफल $= x^2 + 5x + 6$,

अब, $x^3 + 2x^2 - 9x + 3 = (x^2 + 5x + 6)(x - 3) + 21$

अर्थात् $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

$$= (x - 3)(x + 2)(x + 3)$$

अतः, $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ के शून्यक 3, – 2 और – 3 हैं।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बहुपद ज्ञात कीजिए, जिनके शून्यकों के क्रमशः योग और गुणनफल दिए हुए हैं। साथ ही, गुणनखंडन द्वारा, इन बहुपदों के शून्यक भी ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-8}{3}, \frac{4}{3}$

(ii) $\frac{21}{8}, \frac{5}{16}$

(iii) $-2\sqrt{3}, -9$

(iv) $\frac{-3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}$

2. दिया है कि त्रिघात बहुपद $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ के शून्यक $a, a + b$ और $a + 2b$ के रूप के हैं, जहाँ a और b, कोई वास्तविक संख्याएँ हैं। a और b के मान तथा साथ ही दिए हुए बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए।

3. त्रिघात बहुपद $6x^3 + \sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का एक शून्यक $\sqrt{2}$ दिया है। इसके अन्य दो शून्यक ज्ञात कीजिए।

4. k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि $x^2 + 2x + k$ बहुपद $2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखंड हो जाए। इन दोनों बहुपदों के सभी शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

5. त्रिघात बहुपद $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 13x - 3\sqrt{5}$ का एक गुणनखंड $x - \sqrt{5}$ दिया है। इस बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

6. a और b के किन मानों के लिए, $q(x) = x^3 + 2x^2 + a$ के शून्यक बहुपद $p(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + b$ के भी शून्यक होंगे? $p(x)$ के कौन से शून्यक $q(x)$ के शून्यक नहीं हैं?

अध्याय 3

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक ही (या समान) दो चरों वाले रैखिक समीकरण दो चरों वाले समीकरणों का एक युग्म बनाते हैं।
- रैखिक समीकरणों के एक युग्म का व्यापक रूप है:

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

  जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ है।
- यदि रैखिक समीकरणों का एक युग्म संगत (या अविरोधी) होता है तो इसका या अद्वितीय हल हो या अपरिमित रूप से अनेक हल हों।

  अपरिमित रूप से अनेक हलों की स्थिति में, रैखिक समीकरणों का यह युग्म आश्रित कहलाता है। इस प्रकार, इस स्थिति में, रैखिक समीकरणों का युग्म आश्रित और संगत होता है।
- रैखिक समीकरण का युग्म असंगत (या विरोधी) होता है, यदि उसका कोई हल नहीं हो।
- मान लीजिए कि $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दो चरों वाली रैखिक समीकरणों का एक युग्म है।

(I) यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म संगत होता है ;

(ii) युग्म का आलेख एक अद्वितीय बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं का एक युग्म होता है तथा यही प्रतिच्छेद बिंदु समीकरणों के युग्म का हल प्रदान करता है।

(II) यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत (या विरोधी) होता है;

(ii) यहाँ आलेख समांतर रेखाओं का एक युग्म होगा और इसलिए समीकरणों के इस युग्म का कोई हल नहीं होगा।

(III) यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म आश्रित और संगत होता है;

(ii) यहाँ आलेख संपाती रेखाओं का एक युग्म होगा। इन रेखाओं पर स्थित प्रत्येक बिंदु एक हल होगा। इसलिए, समीकरणों के इस युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

- रैखिक समीकरण के एक युग्म को बीजीय रूप से निम्नलिखित विधियों में से किसी एक विधि से हल किया जा सकता है:

  (i) प्रतिस्थापन विधि

  (ii) विलोपन विधि

  (iii) वज्र–गुणन विधि

- रैखिक समीकरणों के युग्म को ज्यामितीय/आलेखीय विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : समीकरण $5x - 15y = 8$ और $3x - 9y = \frac{24}{5}$ के युग्म का/के

(A) एक हल है (B) दो हल हैं

(C) अपरिमित रूप से अनेक हल है (D) कोई हल नहीं है

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 9 है। यदि इसमें 27 जोड़ें, तो इस संख्या के अंक पलट जाते हैं। वह संख्या है

(A) 25 (B) 72 (C) 63 (D) 36

हल : उत्तर (D)

प्रश्नावली 3.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. आलेखीय रूप से,

$$6x - 3y + 10 = 0$$

$$2x - y + 9 = 0$$

समीकरणों का युग्म दो रेखाएँ निरूपित करता है, जो

(A) ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं (B) ठीक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं

(C) संपाती हैं (D) समांतर हैं

2. समीकरण $x + 2y + 5 = 0$ और $-3x - 6y + 1 = 0$ के युग्म

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के ठीक दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

3. यदि रैखिक समीकरणों का कोई युग्म संगत है, तो इसके आलेख की रेखाएँ होंगी

(A) समांतर (B) सदैव संपाती

(C) प्रतिच्छेदी या संपाती (D) सदैव प्रतिच्छेदी

4. समीकरण $y = 0$ और $y = -7$ के युग्म

(A) का एक हल है (B) के दो हल हैं

(C) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

5. समीकरण $x = a$ और $y = b$ का युग्म आलेखीय रूप से वे रेखाएँ निरूपित करता है, जो

(A) समांतर हैं (B) (b, a) पर प्रतिच्छेद करती हैं

(C) संपाती हैं (D) (a, b) पर प्रतिच्छेद करती हैं

6. k के किस मान के लिए समीकरण $3x - y + 8 = 0$ और $6x - ky = -16$ संपाती रेखाएँ निरूपित करते हैं?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) –2

7. यदि $3x + 2ky = 2$ और $2x + 5y + 1 = 0$ द्वारा दी जाने वाली रेखाएँ परस्पर समांतर हैं, तो k का मान है

(A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

8. c का वह मान, जिसके लिए समीकरणों $cx - y = 2$ और $6x - 2y = 3$ के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे, है

(A) 3 (B) – 3 (C) –12 (D) कोई मान नहीं

9. आश्रित रैखिक समीकरणों के युग्म का एक समीकरण $-5x + 7y = 2$ है। दूसरा समीकरण हो सकता है

(A) $10x + 14y + 4 = 0$ (B) $-10x - 14y + 4 = 0$

(C) $-10x + 14y + 4 = 0$ (D) $10x - 14y = -4$

10. एक अद्वितीय हल $x = 2, y = -3$ वाले समीकरण का एक युग्म है

(A) $x + y = -1$
$2x - 3y = -5$

(B) $2x + 5y = -11$
$4x + 10y = -22$

(C) $2x - y = 1$
$3x + 2y = 0$

(D) $x - 4y - 14 = 0$
$5x - y - 13 = 0$

11. यदि $x = a$ और $y = b$ समीकरणों $x - y = 2$ और $x + y = 4$, का हल है, तो a और b के मान क्रमशः हैं

(A) 3 और 5 (B) 5 और 3

(C) 3 और 1 (D) –1 और –3

12. अरुणा के पास केवल 1रु और 2 रु के सिक्के हैं। यदि उसके पास कुल 50 सिक्के हैं तथा कुल धनराशि 75 रु है, तो 1रु और 2 रु के सिक्कों की संख्याएँ क्रमशः हैं

(A) 35 और 15 (B) 35 और 20

(C) 15 और 35 (D) 25 और 25

13. पिता की आयु पुत्र की आयु की 6 गुनी है। चार वर्ष के बाद, पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की चार गुनी होगी। पुत्र और पिता की वर्तमान आयु (वर्षों में) क्रमश: हैं

(A) 4 और 24 (B) 5 और 30

(C) 6 और 36 (D) 3 और 24

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या यह कहना सत्य है कि समीकरणों $-x+2y+2=0$ और $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-1=0$ के युग्म का एक अद्वितीय हल है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : हाँ।

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$ है, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{-\frac{1}{4}}=-8$ है।

चूँकि $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ है, इसलिए समीकरणों के इस युग्म का एक अद्वितीय हल है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या समीकरणों $4x + 3y - 1 = 5$ और $12x + 9y = 15$ संपाती रेखाओं का एक युग्म निरूपित करती हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं।

हम समीकरणों को पुन: निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:

$4x + 3y = 6$

$12x + 9y = 15$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{3}$ और $\frac{c_1}{c_2}=\frac{2}{5}$ है।

चूँकि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$,इसलिए दी हुई समीकरण संपाती रेखाओं का युग्म निरूपित नहीं करती हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: क्या समीकरणों $x + 2y - 3 = 0$ और $6y + 3x - 9 = 0$ का युग्म संगत है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : हाँ। समीकरणों में, पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$3x + 6y - 9 = 0$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}$ और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$ है। क्योंकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है, इसलिए समीकरणों का युग्म संगत है।

प्रश्नावली 3.2

1. क्या समीकरणों के निम्नलिखित युग्म का कोई हल नहीं है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $2x + 4y = 3$
$12y + 6x = 6$

(ii) $x = 2y$
$y = 2x$

(iii) $3x + y - 3 = 0$
$2x + \frac{2}{3}y = 2$

2. क्या निम्नलिखित समीकरण संपाती रेखाओं का एक युग्म निरूपित करती है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $3x + \frac{1}{7}y = 3$
$7x + 3y = 7$

(ii) $-2x - 3y = 1$
$6y + 4x = -2$

(iii) $\frac{x}{2} + y + \frac{2}{5} = 0$
$4x + 8y + \frac{5}{16} = 0$

3. क्या रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित युग्म संगत हैं? अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

(i) $-3x - 4y = 12$
$4y + 3x = 12$

(ii) $\frac{3}{5}x - y = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{6}$

(iii) $2ax + by = a$
$4ax + 2by - 2a = 0$; $a, b \neq 0$

(iv) $x + 3y = 11$
$2(2x + 6y) = 22$

4. समीकरण

$\lambda x + 3y = -7$

$2x + 6y = 14$

के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए, λ का मान 1 होना चाहिए। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए।

5. c के सभी वास्तविक मानों के लिए, समीकरण-युग्म

$x - 2y = 8$

$5x - 10y = c$

का एक अद्वितीय हल है। औचित्य के साथ उत्तर दीजिए कि यह सत्य है या असत्य।

6. $x = 7$ द्वारा निरूपित रेखा $x-$ अक्ष के समांतर है। औचित्य के साथ उत्तर दीजिए कि यह सत्य है या असत्य।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: p और q के किन मानों के लिए समीकरण-युग्म

$4x + 5y = 2$

$(2p + 7q)\, x + (p + 8q)\, y = 2q - p + 1$

के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

हल : यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2p+7q}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{p+8q}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{2q-p+1}$ है।

किसी समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ होता है।

अतः, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q} = \frac{2}{2q-p+1}$

इसलिए, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q}$ और $\frac{4}{2p+7q} = \frac{2}{2q-p+1}$ है।

अर्थात्, $4p + 32q = 10p + 35q$ और $8q - 4p + 4 = 4p + 14q$ है।

अर्थात्, $6p + 3q = 0$ और $8p + 6q = 4$

अर्थात्, $q = -2p$ ...(1) और $4p + 3q = 2$ ...(2)

समीकरण (1) से प्राप्त q के मान को समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$4p - 6p = 2$$

या $p = -1$

p के इस मान को समीकरण (1) में रखने (प्रतिस्थापित करने) पर, हमें प्राप्त होता है:

$$q = 2$$

अतः, $p = -1, q = 2$ के लिए, दिए हुए समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: निम्नलिखित समीकरण-युग्म को हल कीजिए :

$$21x + 47y = 110$$

$$47x + 21y = 162$$

हल : हमें प्राप्त है :

$$21x + 47y = 110 \quad ...(1)$$
$$47x + 21y = 162 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) को 47 से और समीकरण (2) को 21 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$987x + 2209\,y = 5170 \quad ...(3)$$

$$987x + 441y = 3402 \quad ...(4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$1768y = 1768$$

या $y = 1$

समीकरण (1) में y का मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$21x + 47 = 110$$

या $21x = 63$

या $x = 3$

अतः, $x = 3, y = 1$

वैकल्पिक हल: हमें प्राप्त है:

$$21x + 47y = 110 \quad ...(1)$$
$$47x + 21y = 162 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$68x + 68y = 272$$

या $x + y = 4$ ...(5)

समीकरण (1) को समीकरण (2) में से घटाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$26x - 26y = 52$$

या $x - y = 2$ ...(6)

समीकरण (5) और (6) को क्रमशः जोड़ने और घटाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = 3, \quad y = 1$$

प्रतिदर्श प्रश्न 3: समीकरण $x - y + 2 = 0$ और $4x - y - 4 = 0$ के युग्म का आलेख खींचिए। इस प्रकार खींची गयी रेखाओं और x-अक्ष से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

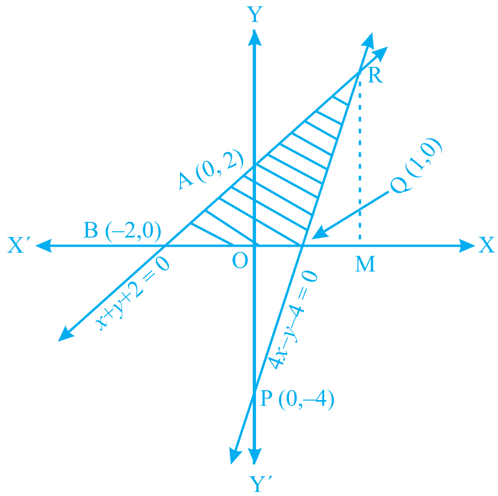
हल : दिए गए समीकरणों का आलेख खींचने के लिए, हम इन समीकरणों में से प्रत्येक के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी 3.1 में दिए गए हैं:

सारणी 3.1

x	0	–2
$y = x + 2$	2	0

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0

बिंदुओं A (0, 2), B (–2, 0), P (0, – 4) और Q (1, 0) को आलेख कागज़ पर आलेखित कीजिए तथा इन बिंदुओं को रेखाएँ AB और PQ बनाने के लिए मिलाइए, जैसा कि आकृति 3.1 में दर्शाया गया है:



आकृति 3.1

हम देखते हैं कि इन दोनों रेखाओं AB और PQ में एक बिंदु R (2, 4) उभयनिष्ठ है। इन रेखाओं और x- अक्ष से बनने वाला त्रिभुज BQR है।

इस त्रिभुज के शीर्ष B (–2, 0), Q (1, 0) और R (2, 4) हैं।

हम जानते हैं कि

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलंब

यहाँ, आधार = BQ = BO + OQ = 2 + 1 = 3 इकाई

शीर्षलंब = RM = R की कोटि = 4 इकाई

अत:, त्रिभुज BQR का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 3.3

1. λ के किस (किन) मान (मानों) के लिए रैखिक समीकरण-युग्म

$$\lambda x + y = \lambda^2$$

$$x + \lambda y = 1$$

(i) का कोई हल नहीं होगा ?

(ii) के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे ?

(iii) का एक अद्वितीय हल होगा ?

2. k के किस (किन) मान (मानों) के लिए, समीकरण-युग्म

$$kx + 3y = k - 3$$

$$12x + ky = k$$

का कोई हल नहीं होगा ?

3. a और b के किन मानों के लिए, निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$x + 2y = 1$$

$$(a - b)x + (a + b)y = a + b - 2$$

4. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों (i) से (iv) में p और (v) में p तथा q के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $3x - y - 5 = 0$ और $6x - 2y - p = 0$,
यदि इन समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाएँ समांतर हैं।

(ii) $-x + py = 1$ और $px - y = 1$,
यदि समीकरण-युग्म का कोई हल नहीं है।

(iii) $-3x + 5y = 7$ और $2px - 3y = 1$,

यदि इन समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाएँ एक अद्वितीय बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(iv) $2x + 3y - 5 = 0$ और $px - 6y - 8 = 0$,
यदि समीकरण-युग्म का एक अद्वितीय हल है।

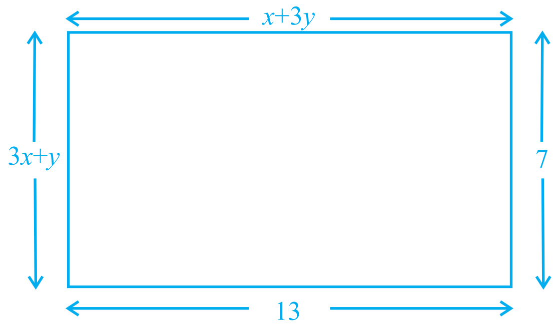
(v) $2x + 3y = 7$ और $2px + py = 28 - qy$,
यदि समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

5. दो सीधे पथ समीकरणों $x - 3y = 2$ और $-2x + 6y = 5$ द्वारा निरूपित हैं। जाँच कीजिए कि ये पथ परस्पर काटते हैं या नहीं।

6. रैखिक समीकरणों का एक ऐसा युग्म लिखिए जिसका एक अद्वितीय हल $x = -1, y = 3$ हो। आप ऐसे कितने युग्म लिख सकते हैं?

7. यदि $2x + y = 23$ और $4x - y = 19$ है, तो $5y - 2x$ और $\frac{y}{x} - 2$ के मान ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित आयत (देखिए आकृति 3.2) में x और y के मान ज्ञात कीजिए:



आकृति 3.2

9. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों को हल कीजिए :

(i) $x + y = 3.3$

$\frac{0.6}{3x-2y} = -1, \quad 3x - 2y \neq 0$

(ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$

$\frac{5x}{6} - \frac{y}{8} = 4$

(iii) $4x + \frac{6}{y} = 15$

$6x - \frac{8}{y} = 14, \quad y \neq 0$

(iv) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8, \quad x, y \neq 0$

(v) $43x + 67y = -24$

$67x + 43y = 24$

(vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2, \quad a, b \neq 0$

(vii) $\frac{2xy}{x+y} = \frac{3}{2}$

$\frac{xy}{2x-y} = \frac{-3}{10}, \quad x + y \neq 0, 2x - y \neq 0$

10. समीकरण $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}-1=0$ और $\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$ के युग्म का हल ज्ञात कीजिए। इसके बाद λ ज्ञात कीजिए, यदि $y=\lambda x+5$ है।

11. आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण-युग्म संगत हैं या नहीं। यदि संगत हैं, तो इन्हें हल कीजिए।

(i) $3x+y+4=0$
$6x-2y+4=0$

(ii) $x-2y=6$
$3x-6y=0$

(iii) $x+y=3$
$3x+3y=9$

12. समीकरण $2x+y=4$ और $2x-y=4$ के युग्म का आलेख खींचिए। इन रेखाओं और y-अक्ष से बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए। साथ ही, इस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

13. रैखिक समीकरण $x+y=2$ और $2x-y=1$ के युग्म के हल को निरूपित करने वाले बिंदु से होकर जाने वाली एक रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए। हम ऐसी कितनी रेखाएँ ज्ञात कर सकते हैं?

14. यदि $2x^3+ax^2+2bx+1$ का एक गुणनखंड $x+1$ है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए, जब कि $2a-3b=4$ दिया हुआ है।

15. किसी त्रिभुज के कोण x, y और $40°$ हैं। दोनों कोणों x और y का अंतर $30°$ है। x और y ज्ञात कीजिए।

16. दो वर्ष पहले, सलीम की आयु अपनी पुत्री की आयु की तिगुनी थी तथा छ: वर्ष बाद उसकी आयु पुत्री की आयु के दुगुने से चार वर्ष अधिक होगी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

17. पिता की आयु अपने दोनों बच्चों की आयु के योग की दुागुनी है। 20 वर्ष बाद, उसकी आयु अपने बच्चों की आयु के योग के बराबर होगी। पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

18. दो संख्याएँ $5:6$ के अनुपात में हैं। यदि प्रत्येक संख्या में से 8 घटा दिया जाए, तो यह अनुपात $4:5$ हो जाता है। ये संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

19. दो परीक्षा कक्षों A और B में कुछ विद्यार्थी हैं। दोनों कक्षों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर करने के लिए, A से B में 10 विद्यार्थी भेजे जाते हैं। परंतु यदि B से 20 विद्यार्थी A में भेज दिए जाएँ, तो A में विद्यार्थियों की संख्या B के विद्यार्थियों की संख्या की दुगुनी हो जाती है। दोनों कक्षों में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

20. कोई दुकानदार पढ़ने के लिए पुस्तकें किराए पर देता है। वह प्रथम दो दिन के लिए एक निश्चित शुल्क लेता है और उसके बाद प्रत्येक दिन के लिए एक अतिरिक्त शुल्क लेता है। लतिका ने एक पुस्तक छः दिन तक रखने के लिए 22रु दिए, जबकि आनंद ने एक पुस्तक चार दिन तक रखने के लिए 16 रु दिए। निश्चित शुल्क तथा प्रत्येक दिन का अतिरिक्त शुल्क ज्ञात कीजिए।

21. किसी प्रतियोगात्मक परीक्षा में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 1 अंक दिया जाता है, जब कि प्रत्येक गलत उत्तर के लिए $\frac{1}{2}$ अंक काट लिया जाता है। जयंती ने 120 प्रश्नों के उत्तर दिए और 90 अंक प्राप्त किए। उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिए?

22. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोण हैं :

$\angle A = (6x + 10)°$, $\angle B = (5x)°$

$\angle C = (x + y)°$, और $\angle D = (3y - 10)°$

x और y के मान ज्ञात कीजिए और फिर चारों कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: रेखाओं $x = -2$ और $y = 3$ के आलेख खींचिए। इन रेखाओं, x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा बनी आकृति के शीर्ष लिखिए। इस आकृति का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल:

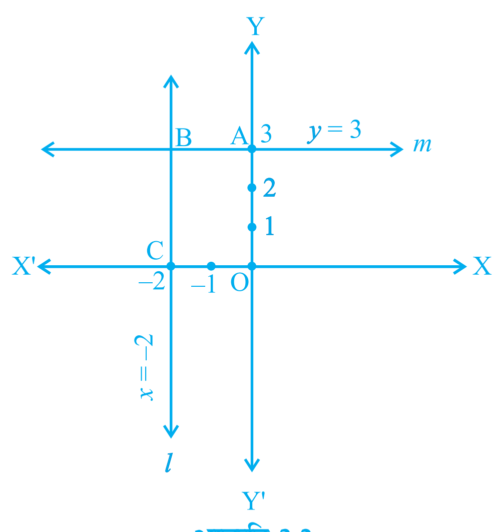
हम जानते हैं कि $x = -2$ का आलेख y-अक्ष के समांतर उसके बाईं ओर 2 इकाई की दूरी पर स्थित एक रेखा है।

अतः, $x = -2$ का आलेख रेखा l है (देखिए आकृति 3.3)।

$y = 3$ का आलेख x-अक्ष के समांतर उसके ऊपर 3 इकाई की दूरी पर स्थित एक रेखा है।

अतः, $y = 3$ का आलेख रेखा m है।

रेखाओं $x = -2$, $y = 3$, x-अक्ष और y-अक्ष से बनी आकृति OABC है, जो एक आयत है। (क्यों?)



आकृति 3.2

y-अक्ष पर A वह बिंदु है, जो x-अक्ष के ऊपर 3 इकाई की दूरी पर है। अतः, A के निर्देशांक (0, 3) हैं;

x-अक्ष पर C वह बिंदु है, जो y-अक्ष के बाईं ओर 2 इकाई की दूरी पर है। अतः, C के निर्देशांक (–2, 0) हैं;

समीकरण $x = -2$ और $y = 3$ के युग्म का हल B है। अतः, B के निर्देशांक (–2, 3) हैं।

अतः, आयत OABC के शीर्ष O (0, 0), A (0, 3), B (–2, 3) और C (–2, 0) हैं।

इस आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 2 इकाई और 3 इकाई हैं। क्योंकि एक आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई होता है, इसलिए आयत OABC का क्षेत्रफल $= 2 \times 3 = 6$ वर्ग इकाई।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: रेखाओं $5x - y = 5$, $x + 2y = 1$ और $6x + y = 17$ द्वारा बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बीजीय विधि से निर्धारित कीजिए।

हल :

एक त्रिभुज का शीर्ष उस त्रिभुज की दो भुजाओं को बनाने वाली दोनों समीकरणों का उभयनिष्ठ हल होता है। अतः, दी हुई समीकरणों को युग्मों में हल करने पर, त्रिभुज के शीर्ष प्राप्त हो जाएँगे।

दी हुई समीकरणों से हमें समीकरणों के निम्नलिखित तीन युग्म प्राप्त होंगे :

$5x - y = 5$ और $x + 2y = 1$

$x + 2y = 1$ और $6x + y = 17$

$5x - y = 5$ और $6x + y = 17$

समीकरण-युग्म

$$5x - y = 5$$

$$x + 2y = 1$$

को हल करने पर, हमें $x = 1, y = 0$ प्राप्त होता है। अतः, त्रिभुज का एक शीर्ष (1, 0) है।

दूसरे समीकरण-युग्म

$$x + 2y = 1$$

$$6x + y = 17$$

को हल करने पर, $x = 3, y = -1$ प्राप्त होता है। अतः, त्रिभुज का दूसरा शीर्ष (3, –1) है।

तीसरे समीकरण-युग्म

$5x - y = 5$

$6x + y = 17,$

को हल करने पर, $x = 2, y = 5$ प्राप्त होता है। अत:, त्रिभुज का तीसरा शीर्ष (2, 5) है।

इस प्रकार, त्रिभुज के शीर्ष (1, 0), (3, –1) और (2, 5)हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: जमीला ने एक मेज़ और एक कुर्सी 1050 रु में बेचा, जिससे उसे मेज पर 10% लाभ और कुर्सी पर 25% लाभ हुआ। यदि उसने मेज पर 25% लाभ और कुर्सी पर 10% लाभ लिया होता, तो उसे कुल 1065 रु प्राप्त होते। प्रत्येक वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि मेज का क्रय मूल्य x रु और कुर्सी का क्रय मूल्य y रु है।

मेज का विक्रय मूल्य, जब उसे 10% लाभ पर बेचा जाता है

$$= \left(x + \frac{10}{100}x\right) \text{रु} = \frac{110}{100}x \text{ रु}$$

कुर्सी का विक्रय मूल्य, जब उसे 25% लाभ पर बेचा जाता है

$$= \left(y + \frac{25}{100}y\right) \text{रु} = \frac{125}{100}y \text{ रु}$$

अत:, $\frac{110}{100}x + \frac{125}{100}y = 1050$ ...(1)

मेज को 25%, लाभ पर बेचने पर, उसका विक्रय मूल्य $= \left(x + \frac{25}{100}x\right) \text{रु} = \frac{125}{100}x \text{ रु}$

कुर्सी को 10%, लाभ पर बेचने पर, उसका विक्रय मूल्य $= \left(y + \frac{10}{100}y\right) \text{रु} = \frac{110}{100}y \text{ रु}$

अत:, $\frac{125}{100}x + \frac{110}{100}y = 1065$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$110x + 125y = 105000$$

$$125x + 110y = 106500$$

इन समीकरणों को जोड़ने और घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$235x + 235y = 211500$$

तथा $15x - 15y = 1500$

अर्थात् , $x + y = 900$ ...(3)

तथा $x - y = 100$ ...(4)

समीकरण (3) और (4) को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = 500, y = 400$$

अतः, मेज का क्रय मूल्य 500 रु और कुर्सी का क्रय मूल्य 400 रु है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4: दो पाइपों द्वारा एक स्वीमिंग पूल को भरने में 12 घंटे लगते हैं। यदि इनमें से बड़े व्यास वाले पाइप का प्रयोग 4 घंटे करें और छोटे व्यास वाले पाइप का प्रयोग 9 घंटे करें, तो स्वीमिंग पूल केवल आधा ही भरा जा सकता है। प्रत्येक पाइप पृथक-पृथक रूप से स्वीमिंग पूल को कितने समय में भर पाएगा?

हल :

मान लीजिए कि बड़े व्यास वाले पाइप को पूल को अकेले भरने में x घंटे लगते हैं तथा छोटे व्यास वाले पाइप को अकेले भरने में y घंटे लगते हैं।

x घंटे में बड़े व्यास वाला पाइप पूल को पूरा भर देता है।

इसलिए, 1 घंटे में बड़े व्यास वाला पाइप पूल का $\frac{1}{x}$ भाग भरेगा और इसीलिए 4 घंटे में यह पाइप पूल का $\frac{4}{x}$ भाग भरेगा।

इसी प्रकार, 9 घंटे में छोटे व्यास वाला पाइप पूल का $\frac{9}{y}$ भाग भरेगा।

प्रश्न के अनुसार,

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{2} \quad ...(1)$$

साथ ही, दोनों पाइपों का प्रयोग करने पर पूल 12 घंटे में भर जाता है।

अतः, $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ ...(2)

मान लीजिए कि $\frac{1}{x}=u$ और $\frac{1}{y}=v$ है। तब, समीकरण (1) और (2) क्रमशः हो जाती हैं:

$$4u+9v=\frac{1}{2} \quad ...(3)$$

$$12u+12v=1 \quad ...(4)$$

समीकरण (3) को 3 से गुणा करके उसमें से समीकरण (4) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$15v=\frac{1}{2} \text{ या } v=\frac{1}{30}$$

अब v का मान समीकरण (4) में रखने पर, हमें $u=\frac{1}{20}$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $u=\frac{1}{20},\ v=\frac{1}{30}$

अतः, $\frac{1}{x}=\frac{1}{20},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{30}$

या $x = 20$ और $y = 30$.

अतः बड़े व्यास वाला पाइप अकेले पूल को 20 घंटे में भर सकता है तथा छोटे व्यास वाला पाइप उसे 30 घंटे में भर पाएगा।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित समीकरण-युग्म को आलेखीय रूप से हल कीजिए :

$$2x + y = 6$$

$$2x - y + 2 = 0$$

उन दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए, जो इन समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाओं द्वारा क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा बनाए जाते हैं।

2. रेखाओं $y = x$, $3y = x$ और $x + y = 8$ से बनने वाले त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक आलेखीय विधि से निर्धारित कीजिए।

3. समीकरण $x = 3, x = 5$ और $2x - y - 4 = 0$ के आलेख खींचिए। इन रेखाओं और x–अक्ष द्वारा बनाए गए चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. 4 पेन और 4 पेंसिल बॉक्सों का मूल्य 100 रु है। एक पेन के मूल्य का तीन गुना एक पेंसिल बॉक्स के मूल्य से 15 रु अधिक है। उपरोक्त स्थिति के लिए, रैखिक समीकरणों का एक युग्म बनाइए। एक पेन और एक पेंसिल बॉक्स के मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

5. रेखाओं

$$3x - y = 3$$
$$2x - 3y = 2$$
$$x + 2y = 8$$

से बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बीजीय विधि से निर्धारित कीजिए।

6. अंकिता अपने घर तक 14 km की दूरी आंशिक रूप से रिक्शा से और आंशिक रूप से बस द्वारा तय करती है। यदि वह 2 km दूरी रिक्शा से तथा शेष दूरी बस से तय करे, तो उसे कुल दूरी चलने में आधा घंटा लगता है। दूसरी ओर, यदि वह 4 km दूरी रिक्शा से और शेष दूरी बस से चले, तो उसे 9 मिनट अधिक लगते हैं। रिक्शा की चाल और बस की चाल ज्ञात कीजिए।

7. एक व्यक्ति शांत जल में 5 km/h की चाल से नाव खेने पर 40 km की दूरी धारा के प्रतिकूल जाने में उस समय से तिगुना समय लेता है जितना 40 km की दूरी धारा के अनुकूल जाने में लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

8. एक मोटरबोट धारा के प्रतिकूल 30 km और धारा के अनुकूल 28 km जाने में 7 घंटे का समय लगाती है। वह धारा के प्रतिकूल 21 km जाकर 5 घंटे में वापस आ सकती है। शांत जल में नाव की चाल और धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

9. दो अंकों की एक संख्या या तो अंकों के योग को 8 से गुणा कर और फिर उसमें से 5 घटा कर प्राप्त होती है या अंकों के अंतर को 16 से गुणा करके और फिर उसमें 3 जोड़ने पर प्राप्त होती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

10. रेल के एक आधे टिकट के लिए, पूरे किराए का आधा तथा आरक्षण शुल्क उतना ही देना पड़ता है जितना पूरे टिकट के लिए देना होता है। स्टेशन A से स्टेशन B तक के लिए एक प्रथम श्रेणी के आरक्षित टिकट की लागत 2530 रु है। साथ ही, A से B तक के लिए, एक प्रथम श्रेणी टिकट और एक प्रथम श्रेणी आधे टिकट की लागत 3810 रु है। स्टेशन A से स्टेशन B तक का प्रथम श्रेणी का पूरा किराया ज्ञात कीजिए तथा साथ ही एक टिकट पर आरक्षण शुल्क भी ज्ञात कीजिए।

11. एक दुकानदार ने एक साड़ी 8% लाभ पर और एक स्वेटर 10% बट्टे पर बेचा, जिससे उसे 1008 रु की धनराशि प्राप्त हुई। यदि उसने साड़ी 10% लाभ और स्वेटर को 8% बट्टे पर बेचा होता, तो उसे 1028 रु की धनराशि प्राप्त होती। साड़ी का क्रय मूल्य और स्वेटर का सूची मूल्य (बट्टे से पहले का मूल्य) ज्ञात कीजिए।

12. सुषान ने कोई धनराशि दो योजनाओं A और B में निवेशित की, जो क्रमशः 8% और 9% वार्षिक ब्याज देती हैं। उसे कुल वार्षिक ब्याज के रूप में 1860 रु प्राप्त हुए। परंतु यदि उसने इन योजनाओं में निवेशित राशियों को परस्पर बदल लिया होता, तो उसे वार्षिक ब्याज के रूप में 20 रु अधिक प्राप्त होते। उसने प्रत्येक योजना में कितनी राशि निवेशित की?

13. विजय के पास कुछ केले थे और उसने उन्हें दो समूहों (ढेरियों) A एवं B में विभाजित कर लिया। उसने पहले समूह के केलों को 2 रु के 3 केले की दर से बेचा तथा दूसरे समूह के केलों को 1 रु प्रति केले की दर से बेचा और कुल 400 रु प्राप्त किए। यदि उसने पहले समूह के केलों को 1 रु प्रति केले की दर से बेचा होता तथा दूसरे समूह के केलों को 4 रु के 5 केले की दर से बेचा होता, तो उसे कुल 460 रु प्राप्त होते। ज्ञात कीजिए कि उसके पास कुल कितने केले थे।

अध्याय 4

द्विघात समीकरण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- द्विघात समीकरण: चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप की होती है, जहाँ a, b, और c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है।
- द्विघात समीकरण के मूल : एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।
- द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वही होते हैं, जो द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक होते हैं।
- गुणनखंडन की विधि द्वारा एक द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करना: यदि हम एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के गुणनखंड कर लेते हैं, तो $ax^2 + bx + c$ के रैखिक गुणनखंडों को शून्य के बराबर करके द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात किए जा सकते हैं।
- पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करना: एक उपयुक्त अचर को जोड़ कर और घटा कर उसे हम x^2 और x के पदों के साथ मिलाते हैं, ताकि एक पूर्ण वर्ग बन जाए और फिर उन्हें x के लिए हल करते हैं।
- द्विघात सूत्र : यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के वास्तविक मूल

  $\dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त होते हैं।
- व्यंजक $b^2 - 4ac$ द्विघात समीकरण का विविक्तकर कहलाता है।

- एक द्विघात समीकरण के मूलों का अस्तित्व : एक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के
    - (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ है।
    - (ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ है।
    - (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

प्रतिदर्श प्रश्न 1: निम्नलिखित में से कौन एक द्विघात समीकरण नहीं है?

(A) $(x + 2)^2 = 2(x + 3)$ (B) $x^2 + 3x = (-1)(1 - 3x)^2$

(C) $(x + 2)(x - 1) = x^2 - 2x - 3$ (D) $x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^3$

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण $4x^2 - \sqrt{3}x - 5 = 0$ को हल करने के लिए, इसमें किस अचर को जोड़ना और घटाना चाहिए?

(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 4.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण है?

(A) $x^2 + 2x + 1 = (4 - x)^2 + 3$ (B) $-2x^2 = (5 - x)\left(2x - \frac{2}{5}\right)$

(C) $(k + 1)x^2 + \frac{3}{2}x = 7$, जहाँ $k = -1$ (D) $x^3 - x^2 = (x - 1)^3$

2. निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण नहीं है?

(A) $2(x - 1)^2 = 4x^2 - 2x + 1$ (B) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(C) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 - 5x$ (D) $(x^2 + 2x)^2 = x^4 + 3 + 4x^3$

3. निम्नलिखित में से किस समीकरण का एक मूल 2 है?

(A) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (B) $x^2 + 3x - 12 = 0$

(C) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ (D) $3x^2 - 6x - 2 = 0$

4. यदि समीकरण $x^2 + kx - \frac{5}{4} = 0$ का एक मूल $\frac{1}{2}$ है, तो k का मान है

(A) 2 (B) – 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. निम्नलिखित में से किस समीकरण के मूलों का योग 3 है?

(A) $2x^2 - 3x + 6 = 0$ (B) $-x^2 + 3x - 3 = 0$

(C) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$ (D) $3x^2 - 3x + 3 = 0$

6. k के वे मान, जिनके लिए द्विघात समीकरण $2x^2 - kx + k = 0$ के मूल बराबर होंगे, निम्नलिखित हैं

(A) केवल 0 (B) 4 (C) केवल 8 (D) 0, 8

7. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण $9x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{2} = 0$ को हल करने के लिए, इसमें किस अचर को जोड़ना और घटाना चाहिए?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{9}{64}$

8. द्विघात समीकरण $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ के

(A) दो भिन्न वास्तविक मूल हैं (B) दो बराबर वास्तविक मूल हैं

(C) कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (D) दो से अधिक वास्तविक मूल हैं

9. निम्नलिखित में से किस समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं?

(A) $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \frac{9}{4} = 0$ (B) $x^2 + x - 5 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 2\sqrt{2} = 0$ (D) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

10. निम्नलिखित में से किस समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं?

(A) $x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$ (B) $x^2 + 4x - 3\sqrt{2} = 0$

(C) $x^2 - 4x - 3\sqrt{2} = 0$ (D) $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

11. समीकरण $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$

(A) के चार वास्तविक मूल हैं (B) के दो वास्तविक मूल हैं

(C) के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (D) का एक वास्तविक मूल है

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या $(x-1)^2 + 2(x+1) = 0$ का कोई वास्तविक मूल है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि यह समीकरण सरल करने पर $x^2 + 3 = 0$ रह जाती है, जिसका विविक्तकर -12 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए। यदि एक द्विघात समीकरण में x का गुणांक शून्य हो, तो उस द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होता।

हल : असत्य,क्योंकि इस स्थिति में विविक्तकर $-4ac$ होता है, जो ऋणेतर हो सकता है, यदि a और c विपरीत चिन्हों के हों अथवा a और c में से कोई एक शून्य हो।

प्रश्नावली 4.2

1. बताइए कि क्या निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $x^2 - 3x + 4 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$ (iv) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

(v) $(x + 4)^2 - 8x = 0$ (vi) $(x - \sqrt{2})^2 - 2(x + 1) = 0$

(vii) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ (viii) $x(1 - x) - 2 = 0$

(ix) $(x - 1)(x + 2) + 2 = 0$ (x) $(x + 1)(x - 2) + x = 0$

2. लिखिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

(i) प्रत्येक द्विघात समीकरण का ठीक एक मूल होता है।

(ii) प्रत्येक द्विघात समीकरण का न्यूनतम एक वास्तविक मूल होता है।

(iii) प्रत्येक द्विघात समीकरण के न्यूनतम दो मूल होते हैं।

(iv) प्रत्येक द्विघात समीकरण के अधिकतम दो मूल होते हैं।

(v) यदि किसी द्विघात समीकरण में, x^2 का गुणांक और अचर पद विपरीत चिन्हों के हों तो उस द्विघात समीकरण के वास्तविक मूल होते हैं।

(vi) यदि किसी द्विघात समीकरण में, x^2 का गुणांक और अचर पद एक चिन्ह के हों तथा x का गुणांक शून्य हो, तो उस द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं होता हैं।

3. पूर्णांकीय गुणांकों वाली एक द्विघात समीकरण के पूर्णांकीय मूल होते हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. क्या किसी ऐसी द्विघात समीकरण का अस्तित्व है, जिसके सभी गुणांक परिमेय संख्याएँ हैं, परंतु दोनों मूल अपरिमेय हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. क्या किसी ऐसी द्विघात समीकरण का अस्तित्व है, जिसके सभी गुणांक भिन्न – भिन्न अपरिमेय संख्याएँ हैं, परंतु दोनों मूल परिमेय हैं? क्यों?

6. क्या समीकरण $x^2 - 0.4 = 0$ का एक मूल 0.2 है? औचित्य दीजिए।

7. यदि $b = 0, c < 0$ है, तो क्या यह सत्य है कि $x^2 + bx + c = 0$ के मूल संख्यात्मक रूप से बराबर परंतु विपरीत चिन्हों के होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: द्विघात सूत्र का प्रयोग करते हुए, द्विघात समीकरण $2x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : $b^2 - 4ac = 5 - 4 \times 2 \times (-2) = 21$

अतः, मूल हैं: $\dfrac{\sqrt{5} \pm \sqrt{21}}{4}$, अर्थात्, $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{4}$ और $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{21}}{4}$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ के मूल संगत द्विघात बहुपद के गुणनखंड करके ज्ञात कीजिए।

हल :

$$6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 6x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,x - 2$$

$$= 3x\,(2x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}\,(2x - \sqrt{2})$$

$$= (3x + \sqrt{2})\,(2x - \sqrt{2})$$

अब, $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ से $(3x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2}) = 0$ प्राप्त होता है। अर्थात् $3x+\sqrt{2}=0$ या $2x - \sqrt{2} = 0$

अतः, वाँछित मूल हैं: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ और $\frac{\sqrt{2}}{2}$

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में, द्विघात सूत्र का प्रयोग करते हुए, द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

(ii) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

(iii) $-3x^2 + 5x + 12 = 0$

(iv) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

(v) $x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6 = 0$

(vi) $x^2 - 3\sqrt{5}\,x + 10 = 0$

(vii) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{11}\,x + 1 = 0$

2. गुणनखंडन विधि से निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2 + \frac{5}{3}x - 2 = 0$

(ii) $\frac{2}{5}x^2 - x - \frac{3}{5} = 0$

(iii) $3\sqrt{2}x^2 - 5x - \sqrt{2} = 0$

(iv) $3x^2 + 5\sqrt{5}x - 10 = 0$

(v) $21x^2 - 2x + \frac{1}{21} = 0$

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: जाँच कीजिए कि क्या समीकरण $6x^2 - 7x + 2 = 0$ के मूल वास्तविक हैं। यदि हैं, तो उन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : विविक्तकर $= b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$ है।

अतः, दी हुई समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं।

अब, $6x^2 - 7x + 2 = 0$

अर्थात् $36x^2 - 42x + 12 = 0$

अर्थात् $\left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \frac{49}{4} = 0$

अर्थात् $\left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ या $\left(6x-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

इसलिए मूल $6x - \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$ से प्राप्त होंगे।

अर्थात् $6x = 4, 3$

अर्थात् $x = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि अजिता ने अपने गणित के टेस्ट में 30 अंकों में से प्राप्त किए गए अंकों से 10 अंक अधिक प्राप्त किए होते, तो इन अंकों का 9 गुना उसके द्वारा वास्तव में प्राप्त किए गए अंकों का वर्ग होता। उसने टेस्ट में कितने अंक प्राप्त किए थे?

हल : मान लीजिए कि उसके वास्तविक अंक x थे।

अतः $9(x + 10) = x^2$

या $x^2 - 9x - 90 = 0$

अर्थात् $x^2 - 15x + 6x - 90 = 0$

अर्थात् $x(x - 15) + 6(x - 15) = 0$

अर्थात् $(x + 6)(x - 15) = 0$

अतः $x = -6$ या $x = 15$

क्योंकि x प्राप्त किए गए अंक हैं, इसलिए $x \neq -6$ है। अतः, $x = 15$ है।

इस प्रकार, अजिता ने गणित टेस्ट में 15 अंक प्राप्त किए थे।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक रेलगाड़ी 63 km की दूरी किसी निश्चित औसत चाल से तय करती है और फिर 72 km की दूरी प्रारंभिक चाल से 6 km/h अधिक औसत चाल से तय करती है। यदि यह पूरी यात्रा 3 घंटे में तय की गई है, तो प्रारंभिक औसत चाल क्या थी?

हल : मान लीजिए कि रेलगाड़ी की प्रारंभिक औसत चाल x km/h थी। अत:,

$$\frac{63}{x}+\frac{72}{x+6}=3$$

अर्थात् $$\frac{7}{x}+\frac{8}{x+6}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

अर्थात् $$\frac{7(x+6)+8x}{x(x+6)}=\frac{1}{3}$$

अर्थात् $21(x+6)+24x = x(x+6)$

अर्थात् $21x + 126 + 24x = x^2 + 6x$

अर्थात् $x^2 - 39x - 126 = 0$

अर्थात् $(x + 3)(x - 42) = 0$

अर्थात् $x = -3$ या $x = 42$

क्योंकि x रेलगाड़ी की औसत चाल है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती।

अत:, रेलगाड़ी की प्रारंभिक औसत चाल 42km/h थी।

प्रश्नावली 4.4

1. ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरणों के वास्तविक मूल हैं। यदि वास्तविक मूल हैं, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

(ii) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

(iii) $5x^2 - 2x - 10 = 0$

(iv) $\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{x-5}=1, x\neq\frac{3}{2}, 5$

(v) $x^2 + 5\sqrt{5}x - 70 = 0$

2. एक ऐसी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिसके वर्ग में से 84 कम करने पर वह दी हुई संख्या से 8 अधिक संख्या के तिगुने के बराबर हो।

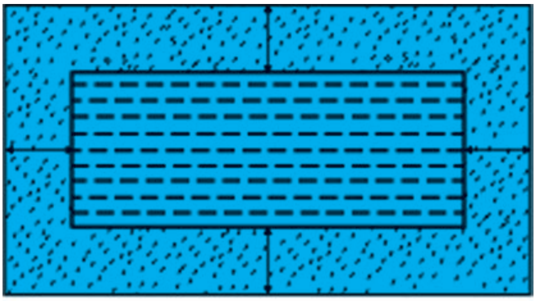
3. एक प्राकृत संख्या में जब 12 की वृद्धि की जाती है, तो वह अपने व्युत्क्रम के 160 गुने के बराबर हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक रेलगाड़ी 360 km की दूरी एक-समान चाल के साथ तय करती है। यदि रेलगाड़ी यही दूरी 5 km/h अधिक चाल से तय करती, तो यात्रा में 48 मिनट कम समय लगता। रेलगाड़ी की प्रारंभिक चाल ज्ञात कीजिए।

5. यदि ज़ेबा अपनी वास्तविक आयु से 5 वर्ष छोटी होती, तो उसकी आयु (वर्षो में) का वर्ग उसकी वास्तविक आयु के पाँच गुने से 11 वर्ष अधिक होता। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

6. आशा की वर्तमात आयु (वर्षो में) अपनी पुत्री निशा की आयु के वर्ग से 2 अधिक है। जब निशा अपनी माँ की वर्तमान आयु के बराबर होगी, तो आशा की आयु निशा की वर्तमान आयु के 10 गुने से 1 वर्ष कम होगी। आशा और निशा की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. विमाओं 50 m × 40 m वाले एक आयताकार लॉन के बीचो-बीच में एक आयताकार तालाब इस प्रकार बनाया जाना है कि तालाब के चारों ओर लगी घास वाले भाग का क्षेत्रफल 1184 m^2 हो [देखिए आकृति 4.1]। तालाब की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 4.1

8. यह ज्ञात हुआ है कि सायं 2 बजकर t मिनट पर किसी घड़ी की मिनट वाली सुई को सायं 3 बजे का समय दर्शाने के लिए $\frac{t^2}{4}$ मिनट से 3 मिनट कम समय की आवश्यकता है। t ज्ञात कीजिए।

अध्याय 5

समांतर श्रेढ़ी

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक समांतर श्रेढ़ी (AP) संख्याओं की एक ऐसी सूची होती है जिसमें प्रत्येक पद अपने से पिछले पद में (प्रथम पद a को छोड़ कर) एक निश्चित संख्या d जोड़ कर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या d इस AP का सार्व अंतर कहलाती है। एक AP का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, a + 3d,...$ है।

- संख्याओं $a_1, a_2, a_3,...$ की सूची में, यदि अंतर $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3,...$ एक ही मान दें, अर्थात् k के विभिन्न मानों के लिए $a_{k+1} - a_k$ एक ही हो, तो प्राप्त संख्याओं की सूची एक AP होती है।

- किसी AP का nवाँ पद (या व्यापक पद) $a_n = a + (n - 1)\, d$ होता है, जहाँ a प्रथम पद और d सार्व अंतर है। ध्यान दीजिए कि $a_1 = a$ है।

- किसी AP के प्रथम n पदों का योग S_n निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d]$$

यदि n पदों वाली AP का अंतिम पद l है, तो इसके सभी पदों का योग निम्नलिखित से भी प्राप्त किया जा सकता है:

$$S_n = \frac{n}{2}\,[a + l]$$

कभी-कभी S_n को S से भी व्यक्त किया जाता है।

- यदि किसी AP के प्रथम n पदों का योग S_n हो, तो इस AP का nवाँ पद a_n निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : AP : 5, 8, 11, 14, ... का 10वाँ पद है

(A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 185

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : किसी AP में, यदि $a = -7.2$, $d = 3.6$ और $a_n = 7.2$ है, तो n का मान है

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

हल : उत्तर (D)

प्रश्नावली 5.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. किसी AP में, यदि $d = -4$, $n = 7$ और $a_n = 4$ है, तो a का मान है

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

2. किसी AP में, यदि $a = 3.5$, $d = 0$ और $n = 101$ है, तो a_n बराबर है

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

3. संख्याओं – 10, – 6, – 2, 2,... की सूची

(A) $d = -16$ वाली एक AP है

(B) $d = 4$ वाली एक AP है

(C) $d = -4$ वाली एक AP है

(D) एक AP नहीं है

4. AP : $-5, \frac{-5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \ldots$ का 11वाँ पद है

(A) –20 (B) 20 (C) –30 (D) 30

5. उस AP, जिसका प्रथम पद –2 और सार्व अंतर –2 है, के प्रथम चार पद हैं

(A) – 2, 0, 2, 4

(B) – 2, 4, – 8, 16

(C) – 2, – 4, – 6, – 8

(D) – 2, – 4, – 8, –16

6. उस AP, जिसके प्रथम दो पद –3 और 4 हैं, का 21वाँ पद है

(A) 17 (B) 137 (C) 143 (D) –143

7. यदि किसी AP का दूसरा पद 13 और 5वाँ पद 25 है, तो उसका 7वाँ पद क्या है?

(A) 30 (B) 33 (C) 37 (D) 38

8. AP: 21, 42, 63, 84,... का कौन–सा पद 210 है?

(A) 9वाँ (B) 10वाँ (C) 11वाँ (D) 12वाँ

9. यदि किसी AP का सार्व अंतर 5 है, तो $a_{18} - a_{13}$ क्या है?

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

10. उस AP का सार्व अंतर क्या है, जिसमें $a_{18} - a_{14} = 32$ है?

(A) 8 (B) – 8 (C) – 4 (D) 4

11. दो समांतर श्रेढ़ियों का एक ही सार्व अंतर है। इनमें से एक का प्रथम पद –1 और दूसरी का प्रथम पद – 8 है। तब, इनके चौथे पदों के बीच का अंतर है

(A) –1 (B) – 8 (C) 7 (D) –9

12. यदि किसी AP के 7 वें पद का 7 गुना उसके 11वें पद के 11 गुने के बराबर हो, तो उसका 18वाँ पद होगा

(A) 7 (B) 11 (C) 18 (D) 0

13. AP: –11, –8, –5, ..., 49 के अंत से चौथा पद है

(A) 37 (B) 40 (C) 43 (D) 58

14. प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं के योग को ज्ञात करने से संबद्ध प्रसिद्ध गणितज्ञ है

(A) पाइथागोरस (B) न्यूटन

(C) गॉस (D) यूक्लिड

15. यदि किसी AP का प्रथम पद –5 और सार्व अंतर 2 है, तो उसके प्रथम 6 पदों का योग है

(A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) 15

16. AP: 10, 6, 2,... के प्रथम 16 पदों का योग है

(A) –320 (B) 320 (C) –352 (D) –400

17. किसी AP में, यदि $a = 1$, $a_n = 20$ और $S_n = 399$ हों, तो n बराबर है

(A) 19 (B) 21 (C) 38 (D) 42

18. 3 के प्रथम पाँच गुणजों का योग है

(A) 45 (B) 55 (C) 65 (D) 75

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: AP: 10, 5, 0, –5, ... का सार्व अंतर d, 5 के बराबर है।

औचित्य के साथ बताइए कि यह कथन सत्य है या असत्य।

हल :

$$a_2 - a_1 = 5 - 10 = -5$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 5 = -5$$
$$a_4 - a_3 = -5 - 0 = -5$$

यद्यपि संख्याओं की दी हुई सूची एक AP बनाती है, परंतु इसका सार्व अंतर $d = -5$ है, न कि $d = 5$

अत:, दिया हुआ कथन असत्य है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : दिव्या ने 1000 रु 10% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा कराए। प्रथम वर्ष, दूसरे वर्ष, तीसरे वर्ष, ..., के अंत में मिश्रधन एक AP बनाते हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : प्रथम वर्ष के अंत में मिश्रधन = 1100 रु

दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन= 1210 रु

तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन= 1331 रु इत्यादि।

इस प्रकार, प्रथम वर्ष, दूसरे वर्ष, तीसरे वर्ष, ... के अंत में मिश्रधन (रुपयों में) है:

1100, 1210, 1331, ...

यहाँ $a_2 - a_1 = 110$

$a_3 - a_2 = 121$

क्योंकि $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ है, इसलिए इन मिश्रधनों से एक AP नहीं बनती है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: किसी AP का nवाँ पद $n^2 + 1$ नहीं हो सकता। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल :

यहाँ, $a_n = n^2 + 1$

अतः, $a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5$

$a_3 = 3^2 + 1 = 10$

$\vdots$

इन संख्याओं की सूची 2, 5, 10, ...है।

यहाँ, $5 - 2 \neq 10 - 5$ है। अतः, किसी AP का nवाँ पद $n^2 + 1$ नहीं हो सकता।

वैकल्पिक हल 1:

हम जानते है कि एक AP में, $d = a_n - a_{n-1}$ होता है।

यहाँ, $a_n = n^2 + 1$

अतः, $a_n - a_{n-1} = (n^2 + 1) - \ (n-1)^2 + 1$

$= 2n - 1$

क्योंकि $a_n - a_{n-1}$, n पर निर्भर है, इसलिए d एक निश्चित या अचर संख्या नहीं हो सकती।

अतः, $a_n = n^2 + 1$, किसी AP का nवाँ पद नहीं हो सकता।

वैकल्पिक हल 2:

हम जानते हैं कि किसी AP में, $a_n = a + (n-1)d$ होता है। हम देखते हैं कि a_n चर n में एक रैखिक बहुपद है।

यहाँ, $a_n = n^2 + 1$, चर n में एक रैखिक बहुपद नहीं है। अतः,यह किसी AP का nवाँ पद नहीं हो सकता।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित में कौन एक AP बनाते हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $-1, -1, -1, -1, \ldots$

(ii) $0, 2, 0, 2, \ldots$

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$

(iv) $11, 22, 33, \ldots$

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(vi) $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$

(vii) $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \ldots$

2. औचित्य के साथ बताइए कि क्या यह कहना सत्य है कि $-1, -\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}, \ldots$ से एक AP बनती है, क्योंकि $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ है।

3. AP: $-3, -7, -11, \ldots$ के लिए, क्या हम a_{30} और a_{20} को वास्तव में बिना ज्ञात किए सीधे $a_{30} - a_{20}$ ज्ञात कर सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

4. दो समांतर श्रेढ़ियों का एक ही सार्व अंतर है। एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 है और दूसरी का प्रथम पद 7 है। उनके दसवें पदों का अंतर वही है जो उनके 21वें पदों का अंतर है और यह वही है जो उनके किन्हीं दो संगत पदों का अंतर है। क्यों ?

5. क्या AP: 31, 28, 25, ...का 0 कोई पद है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

6. जब प्रथम किलोमीटर का टैक्सी का किराया 15 रु है और प्रत्येक अतिरिक्त किलोमीटर का किराया 8 रु है, तो प्रत्येक किलोमीटर के बाद टैक्सी के किराए से AP नहीं बनती है, क्योंकि प्रत्येक किलोमीटर के बाद कुल किराया (रु में) निम्नलिखित है:

15, 8, 8, 8, ...

क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए।

7. निम्नलिखित स्थितियों में से किन में, संबद्ध संख्याओं की सूची से एक AP बनती है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

(i) किसी स्कूल द्वारा प्रत्येक विद्यार्थी से पूरे सत्र में प्रत्येक महीने में लिया गया शुल्क, जब कि मासिक शुल्क 400 रु है।

(ii) किसी स्कूल द्वारा कक्षा I से XII तक से प्रत्येक मास में लिया गया शुल्क, जबकि कक्षा I का मासिक शुल्क 250 रु है तथा यह प्रत्येक अगली कक्षा के लिए 50 रु बढ़ता जाता है।

(iii) वरुण के खाते में प्रत्येक वर्ष के अंत में जमा राशि, जब कि खाते में 1000 रु 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से जमा किए गए हैं।

(iv) किसी खाद्य पदार्थ में प्रत्येक सेकंड के बाद जीवाणुओं की संख्या, जब कि वे प्रत्येक सेकंड में दुगुने हो जाते हैं।

8. औचित्य देते हुए बताइए कि क्या यह कहना सत्य है कि निम्नलिखित किसी AP के nवें पद हैं:

(i) $2n-3$ (ii) $3n^2+5$ (iii) $1+n+n^2$

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि संख्याएँ $n-2$, $4n-1$ और $5n+2$ किसी AP में हैं, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $n-2$, $4n-1$, $5n+2$ किसी AP में हैं, इसलिए

$$(4n-1)-(n-2) = (5n+2)-(4n-1)$$

अर्थात् $3n+1 = n+3$

अर्थात् $n = 1$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: AP : $-11, -7, -3, \ldots, 49$ के बीचो-बीच (मध्य) वाला (वाले) पद (पदों) का (के) मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = -11$, $d = -7-(-11) = 4$, $a_n = 49$

हमें प्राप्त है: $a_n = a + (n-1)\,d$

अत: , $49 = -11 + (n-1)\times 4$

अर्थात्, $60 = (n-1)\times 4$

अर्थात्, $n = 16$

क्योंकि n एक सम संख्या है, इसलिए यहाँ दो मध्य पद $\frac{16}{2}$वें और $\frac{16}{2}+1$ वें होंगे,

अर्थात् ये 8वें और 9वें पद होंगे।

अब $a_8 = a + 7d = -11 + 7\times 4 = 17$

$a_9 = a + 8d = -11 + 8 \times 4 = 21$

अतः, बीचो-बीच वाले मध्य पदों के मान क्रमशः 17 और 21हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: किसी AP के प्रथम तीन पदों का योग 33 है। यदि पहले और तीसरे पदों का गुणनफल दूसरे पद से 29 अधिक है, तो वह AP ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि AP के उपरोक्त तीन पद $a - d, a, a + d$ हैं।

अतः, $a - d + a + a + d = 33$

या $a = 11$

साथ ही, $(a - d)(a + d) = a + 29$

अर्थात् $a^2 - d^2 = a + 29$

अर्थात् $121 - d^2 = 11 + 29$

अर्थात् $d^2 = 81$

अर्थात् $d = \pm 9$

अतः, यहाँ दो AP होंगी, जो 2, 11, 20, ... और 20, 11, 2, ...हैं।

प्रश्नावली 5.3

1. स्तंभ A में दी हुई प्रत्येक AP को स्तंभ B में दिए उपयुक्त सार्व अंतर से सुमेलित कीजिए:

	स्तंभ A		**स्तंभ B**
(A_1)	2, –2, –6, –10,...	(B_1)	$\frac{2}{3}$
(A_2)	$a = -18, n = 10, a_n = 0$	(B_2)	–5
(A_3)	$a = 0, a_{10} = 6$	(B_3)	4
(A_4)	$a_2 = 13, a_4 = 3$	(B_4)	–4
		(B_5)	2
		(B_6)	$\frac{1}{2}$
		(B_7)	5

2. सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक एक AP है और फिर उसके अगले तीन पद लिखिए :

(i) $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ...$

(ii) $5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, ...$

(iii) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, ...$

(iv) $a + b, (a + 1) + b, (a + 1) + (b + 1), ...$

(v) $a, 2a + 1, 3a + 2, 4a + 3, ...$

3. प्रत्येक AP के प्रथम तीन पद लिखिए, जिनके a और d नीचे दिए हैं :

(i) $a = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{6}$

(ii) $a = -5, d = -3$

(iii) $a = \sqrt{2}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. a, b और c के ऐसे मान ज्ञात कीजिए कि संख्याएँ $a, 7, b, 23, c$ एक AP में हों।

5. वह AP निर्धारित कीजिए जिसका पाँचवाँ पद 19 है तथा आठवें पद का तेरहवें पद से अंतर 20 है।

6. किसी AP के 26वें, 11वें और अंतिम पद क्रमशः 0, 3 और $-\frac{1}{5}$ हैं। इसका सार्व अंतर और पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. किसी AP के 5वें और 7वें पदों का योग 52 है तथा 10वाँ पद 46 है। वह AP ज्ञात कीजिए।

8. उस AP का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 7वाँ पद 11वें पद से 24 कम है और प्रथम पद 12 है।

9. यदि किसी AP का 9वाँ पद शून्य है, तो सिद्ध कीजिए कि उसका 29वाँ पद उसके 19वें पद का दुगुना होगा।

10. ज्ञात कीजिए कि 55 एक AP : 7, 10, 13, ... का पद है या नहीं। यदि हाँ, तो ज्ञात कीजिए कि यह कौन-सा पद है।

11. k का मान ज्ञात कीजिए ताकि $k^2 + 4k + 8$, $2k^2 + 3k + 6$, $3k^2 + 4k + 4$ किसी AP के तीन क्रमागत पद हों।

12. 207 को तीन ऐसे भागों में विभक्त कीजिए कि ये भाग एक AP में हों तथा दो छोटे भागों का गुणनफल 4623 हो।

13. किसी त्रिभुज के कोण एक AP में हैं। सबसे बड़ा कोण सबसे छोटे कोण का दुगुना है। त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

14. यदि दो समांतर श्रेढ़ियों 9, 7, 5 ... और 24, 21, 18, ... के nवें पद एक ही हैं, तो n का मान ज्ञात कीजिए। साथ ही, वह पद भी ज्ञात कीजिए।

15. यदि किसी AP के तीसरे और 8वें पदों का योग 7 है तथा 7वें और 14वें पदों का योग –3 है, तो उसका 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

16. AP: –2, –4, –6,..., –100 का अंत से 12वाँ पद ज्ञात कीजिए।

17. AP: 53, 48, 43,.. में प्रथम ऋणात्मक पद कौन-सा होगा?

18. 10 और 300 के बीच में स्थित ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जिनको 4 से भाग देने पर शेषफल 3 रहता है?

19. AP: $-\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, ..., 4\frac{1}{3}$ के दोनों मध्य पदों का योग ज्ञात कीजिए।

20. किसी AP का प्रथम पद –5 और अंतिम पद 45 है। यदि इस AP के पदों का योग 120 हो, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

21. योग ज्ञात कीजिए :

(i) $1 + (-2) + (-5) + (-8) + ... + (-236)$

(ii) $4 - \frac{1}{n} + 4 - \frac{2}{n} + 4 - \frac{3}{n} + ...$ n पदों तक

(iii) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + ...$ 11 पदों तक

22. AP: –2, –7, –12,... का कौन-सा पद –77 है? पद –77 तक इस AP का योग ज्ञात कीजिए।

23. यदि $a_n = 3 - 4n$ हो, तो दर्शाइए कि $a_1, a_2, a_3, ...$ एक AP बनाते हैं। S_{20} भी ज्ञात कीजिए।

24. किसी AP में, यदि $S_n = n(4n + 1)$ है, तो AP ज्ञात कीजिए।

25. किसी AP में यदि $S_n = 3n^2 + 5n$ और $a_k = 164$ है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

26. यदि S_n किसी AP के प्रथम n पदों का योग व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ है।

27. उस AP के प्रथम 17 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके चौथे और 9वें पद क्रमश: –15 और –30 हैं।

28. यदि किसी AP के प्रथम 6 पदों का योग 36 है तथा प्रथम 16 पदों का योग 256 है, तो उसके प्रथम 10 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

29. उस AP के सभी 11 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका मध्य पद 30 है।

30. AP: 8, 10, 12,..., 126 के अंतिम 10 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

31. ऐसी प्रथम सात संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए, जो 2 का गुणज हैं और 9 का भी गुणज हैं। [**संकेत :** 2 और 9 का LCM ज्ञात कीजिए।]

32. AP: –15, –13, –11,... का योग –55 बनाने के लिए इसके कितने पदों की आवश्यकता होगी? दो उत्तर प्राप्त होने का कारण स्पष्ट कीजिए।

33. प्रथम पद 8 और सार्व अंतर 20 वाली एक AP के प्रथम n पदों का योग एक अन्य AP के प्रथम $2n$ पदों के योग के बराबर है, जिसका प्रथम पद –30 और सार्व अंतर 8 है। n ज्ञात कीजिए।

34. कनिका को उसका जेब खर्च 1 जनवरी 2008 को दिया गया। वह इसमें से अपने पिग्गी बैंक में पहले दिन 1 रु डालती है, दूसरे दिन 2 रु डालती है, तीसरे दिन 3 रु डालती है तथा ऐसा ही महीने के अंत तक करती रहती है। उसने अपने जेब खर्च में से 204 रु खर्च भी किए और पाया कि महीने के अंत में उसके पास अभी भी 100 रु शेष हैं। उस महीने उसको कितना जेब खर्च मिला था?

35. यासमीन पहले महीने में 32 रु की बचत करती है, दूसरे महीने में 36 रु की बचत करती है तथा तीसरे महीने में 40 रु की बचत करती है। यदि वह इसी प्रकार बचत करती रहे, तो कितने महीने में वह 2000 रु की बचत कर लेगी?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: किसी AP में चार क्रमागत संख्याओं का योग 32 है तथा पहले और अंतिम संख्याओं

के गुणनफल और दो मध्य संख्याओं के गुणनफल का अनुपात 7 : 15 है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि AP में चारों क्रमागत संख्याएँ

$a-3d, a-d, a+d, a+3d$

अतः, $a-3d+a-d+a+d+a+3d = 32$

$$4a = 32$$

$$a = 8$$

साथ ही, $$\frac{(a-3d)(a+3d)}{(a-d)(a+d)} = \frac{7}{15}$$

या, $$\frac{a^2-9d^2}{a^2-d^2} = \frac{7}{15}$$

अर्थात्, $15a^2 - 135d^2 = 7a^2 - 7d^2$

या, $8a^2 - 128d^2 = 0$

या, $$d^2 = \frac{8\times8\times8}{128} = 4$$

या, $d = \pm 2$

अतः, जब $a = 8$ है, और $d = 2$ है तो वाँछित संख्याएँ 2, 6, 10, 14 हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: समीकरण $1 + 4 + 7 + 10 + ... + x = 287$ को हल कीजिए।

हल :

यहाँ, 1, 4, 7, 10, ..., x से एक AP बनती है, जिसमें $a = 1$, $d = 3$ और $a_n = x$ है।

हमें प्राप्त है: $a_n = a + (n-1)d$

अतः, $x = 1 + (n-1)\times 3 = 3n - 2$

साथ ही, $S = \frac{n}{2}(a+l)$

अतः, $287 = \frac{n}{2}(1 + x)$

$= \frac{n}{2}(1 + 3n - 2)$

या, $574 = n\,(3n - 1)$

या, $3n^2 - n - 574 = 0$

अतः, $n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6888}}{6}$

$= \frac{1 \pm 83}{6} = \frac{84}{6}, \frac{-82}{6}$

$= 14, \frac{-41}{3}$

क्योंकि n ऋणात्मक नहीं हो सकती, इसलिए $n = 14$ है।

अतः, $x = 3n - 2 = 3 \times 14 - 2 = 40$

वैकल्पिक हल:

यहाँ, 1, 4, 7, 10, ... x से एक AP बनती है, जिसमें $a = 1$, $d = 3$ और S = 287 है।

हमें प्राप्त है:, $S = \frac{n}{2}\ 2a + (n-1)d$

अतः, $287 = \frac{n}{2}\ 2 + (n-1) \times 3$

या, $574 = n\,(3n - 1)$

या, $3n^2 - n - 574 = 0$

अब, ऊपर की ही तरह प्रश्न को पूरा कीजिए।

प्रश्नावली 5.4

1. किसी AP के प्रथम पाँच पदों के योग और उसी AP के प्रथम सात पदों के योग का योग 167 है। यदि इस AP के प्रथम दस पदों का योग 235 है, तो इसके प्रथम 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

2. ज्ञात कीजिए :

(i) 1 और 500 के बीच के उन पूर्णांकों का योग जो 2 के भी गुणज हैं और 5 के भी गुणज हैं।

(ii) 1 से 500 तक के उन पूर्णांकों का योग जो 2 के भी गुणज हैं और 5 के भी गुणज हैं।

(iii) 1 से 500 तक के उन पूर्णांकों का योग जो 2 या 5 के गुणज हैं।

[**संकेत (iii) :** ये संख्याएँ होंगी : 2 के गुणज + 5 के गुणज – 2 और 5 दोनों के गुणज]

3. किसी AP का 8वाँ पद उसके दूसरे पद का आधा है तथा 11वाँ पद उसके चौथे पद के एक तिहाई से 1 अधिक है। 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

4. किसी AP में 37 पद हैं। बीचो-बीच के तीन पदों का योग 225 है तथा अंतिम तीन पदों का योग 429 है। वह AP ज्ञात कीजिए।

5. 100 और 200 के बीच के उन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए, जो

(i) 9 से विभाज्य हैं।

(ii) 9 से विभाज्य नहीं हैं।

[**संकेत** (ii) : ये संख्याएँ होंगी: कुल संख्याएँ – 9 से विभाज्य संख्याएँ]

6. किसी AP के 11वें पद का 18वे पद से अनुपात 2 : 3 है। 5वें पद का 21वें पद से अनुपात ज्ञात कीजिए तथा साथ ही प्रथम पाँच पदों के योग का प्रथम 21 पदों के योग से अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. दर्शाइए कि उस AP का योग, जिसका प्रथम पद a, द्वितीय पद b और अंतिम पद c हो,

$$\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$$

के बराबर है।

8. समीकरण $-4 + (-1) + 2 + ... + x = 437$ को हल कीजिए।

9. जसपाल सिंह अपने कुल 118000 रु के ऋण को मासिक किस्तों में, 1000 रु की पहली किस्त से प्रारंभ करते हुए, चुकाता है। यदि वह प्रति मास की किश्त 100 रु बढ़ाता जाता है, तो उसके द्वारा 30वीं किस्त में कितनी राशि चुकाई जाएगी? 30वीं किस्त के बाद उसको कितना ऋण चुकाना और शेष रहेगा?

10. किसी स्कूल के विद्यार्थियों ने, स्कूल के वार्षिक दिवस के उपलक्ष्य में, स्कूल के सीधे मार्ग पर रंगीन झंडियाँ लगाकर स्कूल को सजाने का निर्णय लिया। उनके पास 27 झंडियाँ थीं जिन्हें प्रत्येक 2 मीटर के अंतराल पर लगाया जाना है। इन झंडियों को बीचो-बीच की झंडी के स्थान पर एकत्रित कर लिया जाता है। झंडियाँ लगाने का कार्य रुचि को सौंपा गया। रुचि ने अपनी पुस्तकें वहीं रख दीं जहाँ झंडियों को एकत्रित किया गया था। वह एक बार में केवल एक ही झंडी ले जा सकती है। उसने इस कार्य को पूरा करने तथा अपनी पुस्तकें ले आने के लिए कुल कितनी दूरी तय की? एक झंडी हाथ में लिए हुए आते अधिकतम कितनी दूरी तय की?

अध्याय 6

त्रिभुज

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

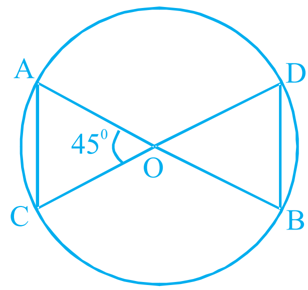
सर्वांगसमता और समरूपता, दो बहुभुजों की समरूपता के लिए प्रतिबंध, त्रिभुजों की समरूपता, समरूपता और शीर्षों की संगतता, त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ : (i) AAA या AA (ii) SSS (iii) SAS

- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर एक रेखा अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए खींची जाए, तो ये दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं (समानुपातिकता का आधारभूत प्रमेय) और इसका विलोम।
- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
- एक समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से उसके कर्ण पर खींचा गया लंब उस त्रिभुज को ऐसे दो त्रिभुजों में विभाजित करता है जो संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं और परस्पर भी समरूप होते हैं।
- किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है (पाइथागोरस प्रमेय) और इसका विलोम।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि आकृति 6.1 में, O दो जीवाओं AB और CD का प्रतिच्छेद बिंदु इस प्रकार है कि OB = OD है, तो त्रिभुज OAC और ODB हैं



आकृति 6.1

(A) समबाहु परंतु समरूप नहीं

(B) समद्विबाहु परंतु समरूप नहीं

(C) समबाहु और समरूप

(D) समद्विबाहु और समरूप

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC पर क्रमश: बिंदु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि $AD = 2$ cm, $BD = 3$ cm, $BC = 7.5$ cm और $DE \parallel BC$ है। तब, DE की लंबाई (cm में) है

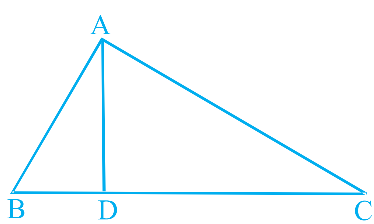
(A) 2.5 (B) 3 (C) 5 (D) 6

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 6.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. आकृति 6.2 में, $\angle BAC = 90°$ और $AD \perp BC$ हैं। तब,



आकृति 6.2

(A) $BD \cdot CD = BC^2$ (B) $AB \cdot AC = BC^2$

(C) $BD \cdot CD = AD^2$ (D) $AB \cdot AC = AD^2$

2. एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाइयाँ 16 cm और 12 cm हैं। तब, इस समचतर्भज की भजा की लंबाई है

(A) 9 cm (B) 10 cm (C) 8 cm (D) 20 cm

3. यदि $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ और ΔABC, ΔDEF के समरूप नहीं है, तो निम्नलिखित में से कौन सत्य नहीं है?

(A) $BC \cdot EF = AC \cdot FD$ (B) $AB \cdot EF = AC \cdot DE$

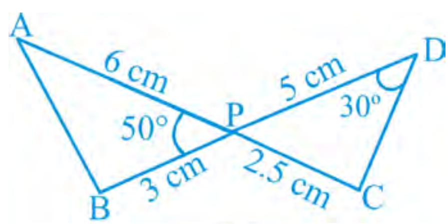
(C) $BC \cdot DE = AB \cdot EF$ (D) $BC \cdot DE = AB \cdot FD$

4. यदि दो त्रिभजों ABC और PQR मे, $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ है, तो

(A) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$ (B) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$ (D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

5. आकृति 6.3 में, दो रेखाखंड AC और BD परस्पर बिंदु P पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि PA = 6 cm, PB = 3 cm, PC = 2.5 cm, PD = 5 cm, $\angle APB = 50°$ और $\angle CDP = 30°$ है तब, $\angle PBA$ बराबर है



आकृति 6.3

(A) 50° (B) 30° (C) 60° (D) 100°

6. यदि दो त्रिभुजों DEF और PQR मे, $\angle D = \angle Q$ और $\angle R = \angle E$ है, तो निम्नलिखित में से कौन सत्य नहीं है?

(A) $\frac{EF}{PR}=\frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ}=\frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR}=\frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP}=\frac{DE}{QR}$

7. त्रिभुजों ABC और DEF में, $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ तथा AB = 3 DE है। तब दोनों त्रिभुज हैं

(A) सर्वांगसम परंतु समरूप नहीं (B) समरूप परंतु सर्वांगसम नहीं

(C) न तो सर्वांगसम और न ही समरूप (D) सर्वांगसम और समरूप दोनों

8. यह दिया है कि $\frac{BC}{QR}=\frac{1}{3}$ के साथ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। तब $\frac{ar\,(PRQ)}{ar\,(BCA)}$ बराबर है

(A) 9 (B) 3

(C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{9}$

9. $\Delta ABC \sim \Delta DFE$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$, AB = 5 cm, AC = 8 cm और DF= 7.5 cm दिया हुआ है। तब, निम्नलिखित सत्य है :

(A) DE = 12 cm, $\angle F = 50°$ (B) DE = 12 cm, $\angle F = 100°$

(C) EF = 12 cm, $\angle D = 100°$ (D) EF = 12 cm, $\angle D = 30°$

10. यदि त्रिभुज ABC और DEF में, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{FD}$ है, तो ये समरूप होंगे, जब

(A) $\angle B = \angle E$ (B) $\angle A = \angle D$

(C) $\angle B = \angle D$ (D) $\angle A = \angle F$

11. यदि $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, $\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(PQR)}=\frac{9}{4}$, AB = 18 cm और BC = 15 cm है, तो PR बराबर है

(A) 10 cm (B) 12 cm (C) $\frac{20}{3}$ cm (D) 8 cm

12. यदि Δ PQR की एक भुजा PQ पर S एक ऐसा बिंदु है कि PS = QS = RS है, तो

(A) $PR \,.\, QR = RS^2$ (B) $QS^2 + RS^2 = QR^2$

(C) $PR^2 + QR^2 = PQ^2$ (D) $PS^2 + RS^2 = PR^2$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: ΔABC में, AB = 24 cm, BC = 10 cm और AC = 26 cm है। क्या यह त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : यहाँ $AB^2 = 576$, $BC^2 = 100$ और $AC^2 = 676$ है। अत:, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

अत:, दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक त्रिभुज DEF की भुजाओं DE और DF पर क्रमश: बिंदु P और Q इस प्रकार हैं कि DP = 5 cm, DE = 15 cm, DQ = 6 cm और QF = 18 cm है। क्या PQ || EF है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : यहाँ, $\frac{DP}{PE} = \frac{5}{15-5} = \frac{1}{2}$ और $\frac{DQ}{QF} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

क्योंकि $\frac{DP}{PE} \neq \frac{DQ}{QF}$ है, इसलिए PQ भुजा EF के समांतर नहीं है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: Δ FED ~ Δ STU दिया है। क्या यह कहना सत्य है कि $\frac{DE}{ST} = \frac{EF}{TU}$? क्यों?

हल : नहीं, क्योंकि सही संगतता $F \leftrightarrow S$, $E \leftrightarrow T$ और $D \leftrightarrow U$ है।

इस संगतता के साथ, $\frac{EF}{ST} = \frac{DE}{TU}$ है।

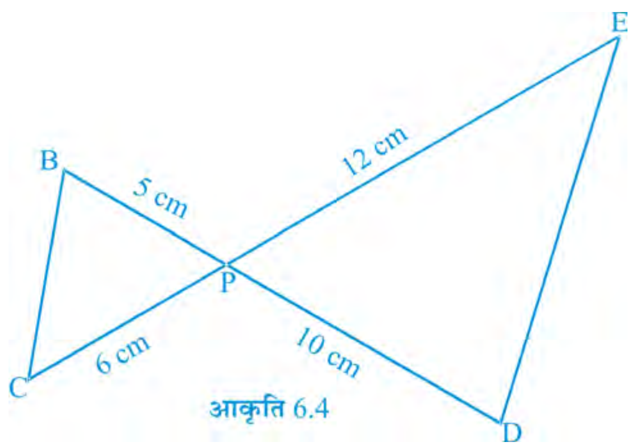
प्रश्नावली 6.2

1. क्या भुजाओं 25 cm, 5 cm और 24 cm वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

2. Δ DEF ~ Δ RPQ दिया है। क्या कहना सत्य है कि $\angle D = \angle R$ और $\angle F = \angle P$? क्यों?

3. किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमश: बिंदु A और B इस प्रकार स्थित हैं कि PQ = 12.5 cm, PA = 5 cm, BR= 6 cm और PB = 4 cm है। क्या AB||QR है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

4. आकृति 6.4 में, BD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या $\Delta PBC \sim \Delta PDE$ है? क्यों?



आकृति 6.4

5. त्रिभुजों PQR और MST में, $\angle P = 55°$, $\angle Q = 25°$, $\angle M = 100°$ और $\angle S = 25°$ है। क्या Δ QPR ~ Δ TSM है? क्यों?

6. क्या निम्नलिखित कथन सत्य है? क्यों

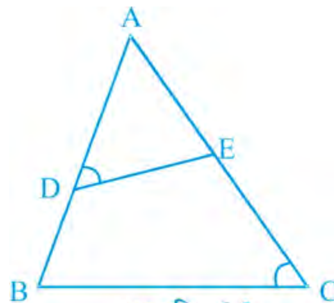
"दो चतुर्भुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण बराबर हों"

7. एक त्रिभुज की दो भुजाओं और परिमाप में से प्रत्येक क्रमश: दूसरे त्रिभुज की संगत दोनों भुजाओं और परिमाप के तिगुने हैं। क्या दोनों त्रिभुज समरूप हैं

8. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का एक न्यून कोण दूसरे त्रिभुज के एक न्यून कोण के बराबर हो, तो क्या आप कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज समरूप होंगे? क्यों

9. दो समरूप त्रिभुजों के संगत शीर्षलंबों का अनुपात $\frac{3}{5}$ है। क्या यह कहना सही है कि इन त्रिभुजों

के क्षेत्रफलों का अनपात $\frac{6}{5}$ है? क्यों?



आकृति 6.5

10. ΔPQR की भुजा QR पर कोई बिंद D इस प्रकार है कि $PD \perp QR$ है। क्या $\Delta PQD \sim \Delta RPD$ कहना सही होगा? क्यों?

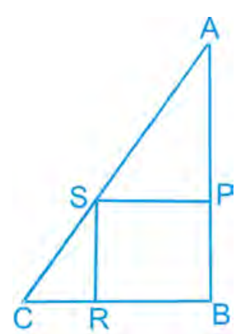
11. आकति 6.5 में. यदि $\angle D = \angle C$ है. तो क्या यह सत्य है कि $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ है? क्यों?

12. क्या यह कहना सत्य है कि यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर है तथा एक त्रिभुज की दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की दो भजाओं के समानपाती हैं. तो त्रिभज समरूप होंगे? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: एक समकोण त्रिभुज के पैर (कर्ण को छोड़ कर अन्य दो भुजाएँ) 16cm और 8cm लंबाइयों के हैं। इस त्रिभज के अंतर्गत खींचे जा सकने वाले सबसे बडे वर्ग की भजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle B$ समकोण है तथा AB = 16 cm और BC = 8 cm है। तब, इस त्रिभुज के अंतर्गत खींचे जा सकने वाला सबसे बडा वर्ग BRSP होगा. जैसा कि आकति 6.6 में दर्शाया गया है।



आकृति 6.6

मान लीजिए कि PB = x cm है। अत:. AP = $(16–x)$ cm है। ΔAPS और ΔABC मे, $\angle A = \angle A$ और $\angle APS = \angle ABC$ (प्रत्येक 90°)

अत:. $\Delta APS \sim \Delta ABC$ (AA समरूपता)

अत:. $$\frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BC}$$

या $$\frac{16-x}{16} = \frac{x}{8}$$

या $128 - 8x = 16x$

या $x = \frac{128}{24} = \frac{16}{3}$

अतः, वाँछित वर्ग की भुजा की लंबाई $\frac{16}{3}$ cm है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण 25 cm है तथा शेष दो भुजाओं में से एक दूसरी से 5 cm बड़ी है। अन्य दो भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि एक भुजा x cm है। तब, दूसरी भुजा $(x + 5)$ cm होगी।

अतः, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$$

या $x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

या $x^2 + 5x - 300 = 0$

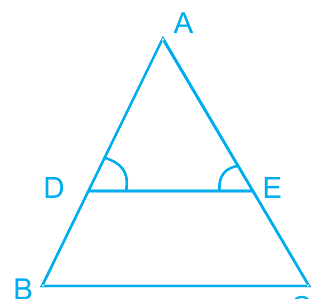
या $x^2 + 20x - 15x - 300 = 0$

या $x(x+20) - 15(x+20) = 0$

या $(x-15)(x+20) = 0$

अतः, $x = 15$ या $x = -20$

$x = -20$ को छोड़ने पर, हमें त्रिभुज की एक भुजा 15 cm तथा दूसरी भुजा $(15 + 5)$ cm = 20 cm प्राप्त होती है।



आकृति 6.7

प्रतिदर्श प्रश्न 3: आकृति 6.7 में,

$\angle D = \angle E$ और $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ है। सिद्ध कीजिए कि BAC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (दिया है)

अतः, DE || BC (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का विलोम)

अतः, $\angle D = \angle B$ और $\angle E = \angle C$ (संगत कोण) (1)

परंतु $\angle D = \angle E$ (दिया है)

अत:, $\angle B = \angle C$ [(1) से]

इसलिए. AB = AC (बराबर कोणों की सम्मख भजाए)

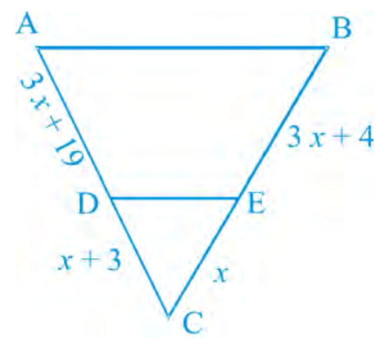
अर्थात BAC एक समद्विबाह त्रिभज है

प्रश्नावली 6.3

1. Δ PQR मे, $PR^2 - PQ^2 = QR^2$ है तथा M भज PR पर एक बिंद इस प्रकार स्थित है कि QM $\perp$ PR है। सिद्ध कीजिए कि

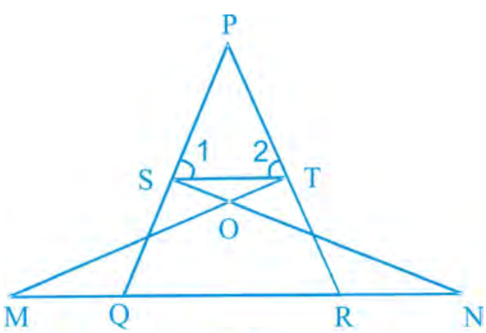
$QM^2 = PM \times MR$ है।

2. x का वह मान ज्ञात कीजिए. जिसके लिए आकति 6.8 में. DE || AB हो।



आकति 6.8

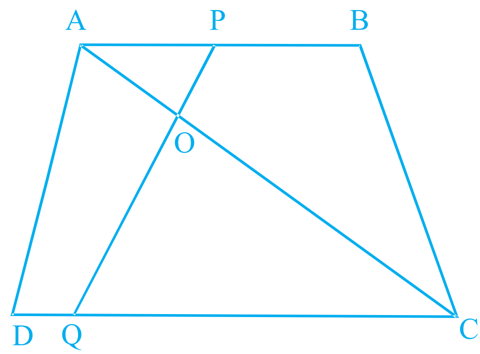
3. आकति 6.9 में. यदि $\angle 1 = \angle 2$ और Δ NSQ $\cong$ Δ MTR है. तो सिद्ध कीजिए Δ PTS ~ Δ PRQ है।



आकति 6.9

4. समलंब PQRS के विकर्ण परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं, PQ || RS और PQ = 3 RS है। त्रिभुजों POQ और ROS के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 6.10 में, यदि AB || DC तथा AC और PQ परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि OA . CQ = OC . AP है।

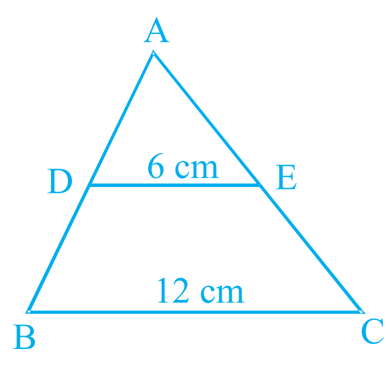


आकृति 6.10

6. भुजा 8 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

7. यदि Δ ABC ~ Δ DEF, AB = 4 cm, DE = 6 cm, EF = 9 cm और FD = 12 cm है, तो Δ ABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 6.11 में, यदि DE || BC है, तो ar (ADE) और ar (DECB) का अनुपात ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.11

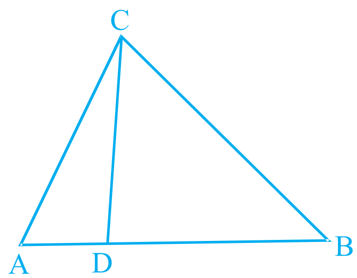
9. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ∥ DC है तथा बिंदु P और Q क्रमशः AD और BC पर इस प्रकार स्थित हैं कि PQ ∥ DC है। यदि PD = 18 cm, BQ = 35 cm और QC = 15 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।

10. दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ 2 : 3 के अनुपात में हैं। यदि छोटे त्रिभुज का क्षेत्रफल 48 cm^2 है, तो बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. त्रिभुज PQR में, भुजा PR पर स्थित N एक ऐसा बिंदु है कि Q N ⊥ PR है। यदि PN. NR = QN^2 है, तो सिद्ध कीजिए कि ∠PQR = 90° है।

12. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 36 cm^2 और 100 cm^2 हैं। यदि बड़े त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 20 cm है, तो उस भुजा के संगत छोटे त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

13. आकृति 6.12 में, यदि ∠ACB = ∠CDA, AC = 8 cm और AD = 3 cm है, तो BD ज्ञात कीजिए।



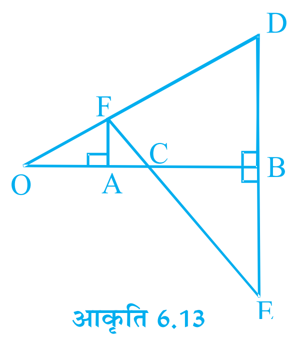
आकृति 6.12

14. एक विशेष समय पर, 15 मीटर ऊँची एक मीनार (टॉवर) की छाया की लंबाई 24 मीटर है। उसी समय पर, एक टेलीफोन के खंभे की छाया की लंबाई 16 मीटर है। टेलीफोन के खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

15. 10m लंबी एक सीढ़ी, जो एक उर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी हुई है, के निचले सिरे की दीवार के आधार से दूरी 6 m है। दीवार पर उस बिंदु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जहाँ तक सीढ़ी का ऊपरी सिरा पहुँचता है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 6.13 में, OB रेखाखंड DE का लंब



आकृति 6.13

समद्विभाजक है, FA ⊥ OB तथा FE रेखाखंड OB को बिंदु C पर

प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$ है।

हल : Δ AOF और Δ BOD में,

∠O = ∠O (एक ही कोण) और ∠A = ∠B (प्रत्येक 90°)

अत:, Δ AOF ~ Δ BOD (AA समरूपता)

इसलिए, $\frac{OA}{OB}=\frac{FA}{DB}$ ...(1)

साथ ही, Δ FAC और Δ EBC में,

∠A = ∠B (प्रत्येक 90°)

और ∠FCA = ∠ECB (शीर्षाभिमुख कोण).

अत:, Δ FAC ~ Δ EBC (AA समरूपता).

इसलिए, $\frac{FA}{EB}=\frac{AC}{BC}$

परंतु EB = DB (DE का मध्य-बिंदु B है)

अत:, $\frac{FA}{DB}=\frac{AC}{BC}$ ...(2)

इसलिए, (1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{OA}{OB}$$

या $$\frac{OC-OA}{OB-OC}=\frac{OA}{OB}$$

या $$OB\,.\,OC-OA\,.\,OB=OA\,.\,OB-OA\,.\,OC$$

या $\quad OB \,.\, OC + OA \,.\, OC = 2\, OA \,.\, OB$

या $\quad (OB + OA).\, OC = 2\, OA \,.\, OB$

या $\quad \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$ [दोनों पक्षों को OA . OB . OC से भाग देने पर]

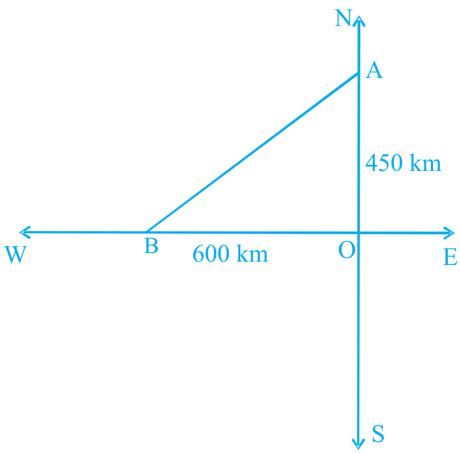
प्रतिदर्श प्रश्न 2: सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज में, एक भुजा पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल : कक्षा X की गणित पाठ्यपुस्तक में प्रमेय 6.9 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: किसी हवाई अड्डे से एक हवाई जहाज उत्तर की ओर 300 km/h की चाल से उड़ता है। उसी समय, एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 400 km/h की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच कितनी दूरी होगी?

हल : पहले हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी $= 300 \times \frac{3}{2}$ km = 450 km तथा $1\frac{1}{2}$ घंटे में दूसरे हवाई जहाज द्वारा तय की गई दूरी

$$= \frac{400 \times 3}{2} \text{km} = 600 \text{ km}$$



आकृति 6.14

$1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद, दोनों हवाई जहाजों की स्थितियाँ A और B हैं, जैसा कि आकृति 6.14 में दर्शाया गया है।

अर्थात् OA = 450 km और OB = 600 km

Δ AOB से, हमें प्राप्त होता है :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

या $\quad AB^2 = (450)^2 + (600)^2$

$$= (150)^2 \times 3^2 + (150)^2 \times 4^2$$

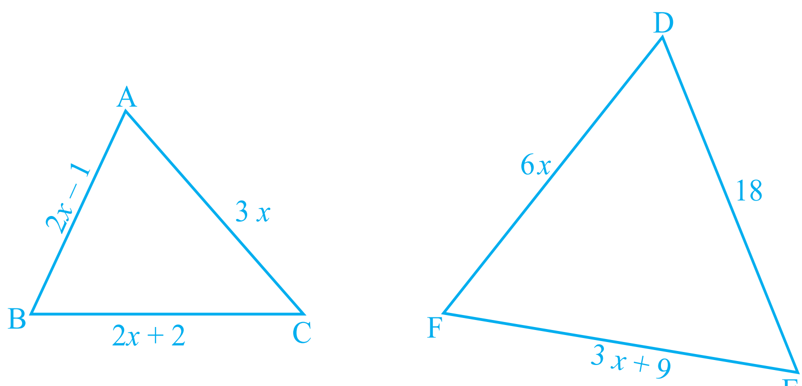
$$= 150^2 \; (3^2 + 4^2)$$

$$= 150^2 \times 5^2$$

या $AB = 150 \times 5 = 750$

अत:, दोनों हवाई जहाज $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद 750 km की दूरी पर होंगे।

प्रतिदर्श प्रश्न 4: आकृति 6.15 में, यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है तथा उनकी भुजाएँ उन लंबाइयों (cm में) की हैं जो उनके अनुदिश अंकित हैं, तो प्रत्येक त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.15

हल : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (दिया है)

अत:, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

इसलिए, $\frac{2x-1}{18} = \frac{2x+2}{3x+9} = \frac{3x}{6x}$

अब, $\frac{2x-1}{18} = \frac{3x}{6x}$ को लेने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{2x-1}{18}=\frac{1}{2}$$

या $4x - 2 = 18$

या $x = 5$

अत:, $AB = 2 \times 5 - 1 = 9$, $BC = 2 \times 5 + 2 = 12$

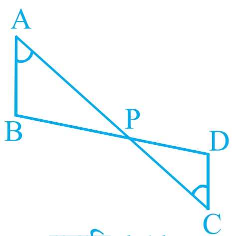
$CA = 3 \times 5 = 15$, $DE = 18$, $EF = 3 \times 5 + 9 = 24$ और $FD = 6 \times 5 = 30$

अत:, AB = 9 cm, BC = 12 cm, CA = 15 cm,

DE = 18 cm, EF = 24 cm और FD = 30 cm.

प्रश्नवाली 6.4

1. आकृति 6.16 में, यदि $\angle A = \angle C$, AB = 6 cm, BP = 15 cm, AP = 12 cm और CP = 4 cm है, तो PD और CD की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

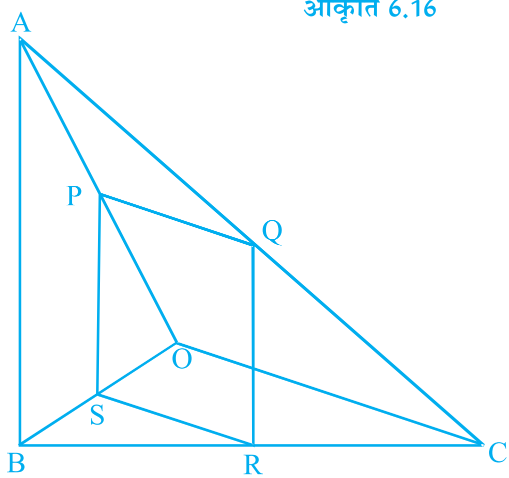


आकृति 6.16

2. यह दिया है कि $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ इस प्रकार है कि AB = 5 cm, AC = 7 cm, DF= 15 cm और DE = 12 cm है। इन त्रिभुजों की शेष भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर, उसकी अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए, रेखा खींची जाए, तो ये दोनों भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

4. आकृति 6.17 में, यदि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा AB||PS है, तो सिद्ध कीजिए कि OC||SR है।



आकृति 6.17

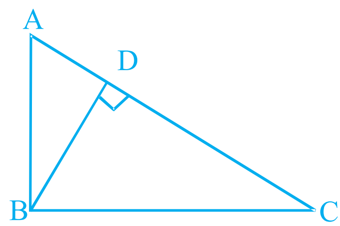
5. 5 m लंबी एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे इस प्रकार टिकी हुई है कि उसका ऊपरी सिरा दीवार पर 4 m ऊँचे बिंदु तक पहुँचता है। यदि सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार की ओर 1.6 m खिसकाया जाए, तो वह दूरी ज्ञात कीजिए जो सीढ़ी का ऊपरी सिरा ऊपर की ओर दीवार पर सरक जाएगा।

6. शहर A से शहर B तक जाने के लिए एक मार्ग शहर C से होकर इस प्रकार जाता है कि $AC \perp CB$ है, $AC = 2x$ km और $CB = 2(x + 7)$ km है। दोनों शहरों A और B को सीधा जोड़ने के लिए, एक 26 km लंबे राजमार्ग बनाने की एक योजना है। ज्ञात कीजिए कि राजमार्ग बन जाने के बाद, शहर A से शहर B तक जाने में कितनी दूरी कम चलनी पड़ेगी।

7. 18 m ऊँचे एक ध्वज स्तंभ की छाया की लंबाई 9.6 m है। इस स्तंभ के ऊपरी सिरे की छाया के दूरस्थ सिरे से दूरी ज्ञात कीजिए।

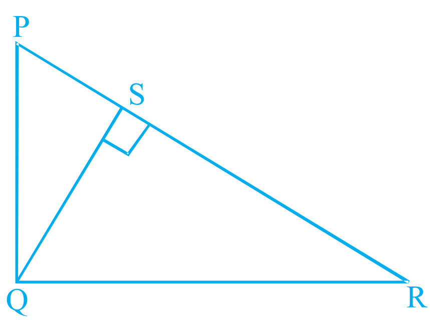
8. सड़क पर लगा एक बिजली का बल्ब एक खंभे पर सड़क के स्तर से 6 m ऊपर लगाया गया है। यदि 1.5 m लंबाई वाली एक महिला की छाया 3m लंबी है, तो ज्ञात कीजिए कि वह महिला खंभे के आधार से कितनी दूरी पर खड़ी है।

9. आकृति 6.18 में, ABC एक त्रिभुज है जिसका $\angle B$ समकोण है तथा $BD \perp AC$ है। यदि AD = 4 cm, और CD = 5 cm है, तो BD और AB ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.18

10. आकृति 6.19 में PQR एक समकोण त्रिभुज है, जिसका $\angle Q$ समकोण है तथा $QS \perp PR$ है। यदि PQ = 6 cm और PS = 4 cm है, तो QS, RS और QR ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.19

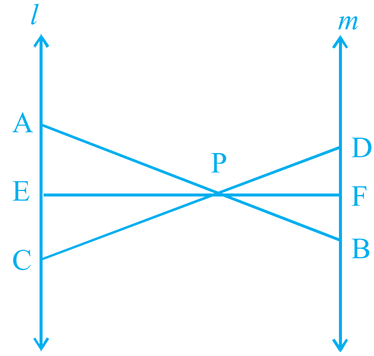
11. Δ PQR में, PD $\perp$ QR इस प्रकार है कि D भुजा QR पर स्थित है। यदि PQ = a, PR = b, QD = c और DR = d है, तो सिद्ध कीजिए कि $(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d)$ है।

12. किसी चतुर्भुज ABCD में, $\angle A + \angle D = 90°$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ है।

[**संकेत :** AB और DC को E पर मिलने के लिए बढ़ाइए]।

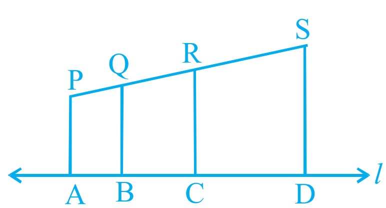
13. आकृति 6.20, में $l \parallel m$ तथा रेखाखंड AB, CD और EF, बिंदु P पर संगामी हैं।

सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FD}$ है।



आकृति 6.20

14. आकृति 6.21 में, PA, QB, RC और SD में से प्रत्येक रेखा l पर लंब है, AB = 6 cm, BC = 9 cm, CD = 12 cm और SP = 36 cm है। PQ, QR और RS ज्ञात कीजिए।

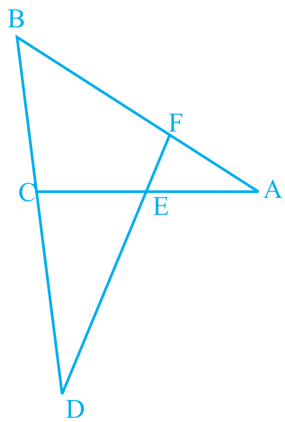


आकृति 6.21

15. एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु O है। O से होकर एक रेखाखंड PQ भुजा AB के समांतर खींचा गया है, जो AD को P और BC को Q पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि PO = QO है।

16. आकृति 6.22 में, रेखाखंड DF त्रिभुज ABC की भुजा AC को बिंदु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि E, भुजा AC का मध्य-बिंदु है और ∠AEF = ∠AFE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}$ है।

[**संकेत :** AB पर ऐसा बिंदु G लीजिए कि CG || DF हो।]



आकृति 6.22

17. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर खींचे गए अर्धवृत्त का क्षेत्रफल अन्य दो भुजाओं पर खींचे गए अर्धवृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

18. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर खींचे गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल अन्य दो भुजाओं पर खींचे गए समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

दूरी सूत्र, विभाजन सूत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल

- दो बिंदुओं P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ होती है।

- किसी बिंदु P(x, y) की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{x^2+y^2}$ होती है।

- उस बिंदु P के निर्देशांक, जो बिंदुओं A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है,

  $\left(\frac{m_1 x_2+m_2 x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1 y_2+m_2 y_1}{m_1+m_2}\right)$ होते हैं।

- बिंदुओं P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ होते हैं।

- शीर्षों A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) और C (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $$\frac{1}{2}\ [x_1\ (y_2 - y_3) + x_2\ (y_3 - y_1) + x_3\ (y_1 - y_2)]$$

  होता है, जिसका शून्येतर मान होता है, जब तक कि A, B और C संरेख न हों। यह मान सदैव धनात्मक ही लिया जाता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि बिंदुओं (2, –2) और (–1, x) के बीच की दूरी 5 है, तो x का एक मान है:

(A) –2 (B) 2 (C) –1 (D) 1

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: बिंदुओं A (–2, 8) और B (–6, –4) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु है

(A) (–4, –6) (B) (2, 6) (C) (–4, 2) (D) (4, 2)

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 3: बिंदु A (9, 0), B (9, 6), C (–9, 6) और D (–9, 0) निम्नलिखित के शीर्ष हैं

(A) वर्ग (B) आयत (C) समचतुर्भुज (D) समलंब

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 7.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. बिंदु P (2, 3) की x-अक्ष से दूरी है

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 5

2. बिंदुओं A (0, 6) और B (0, –2) के बीच की दूरी है

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 2

3. बिंदु P (– 6, 8) की मूलबिंदु से दूरी है

(A) 8 (B) $2\sqrt{7}$ (C) 10 (D) 6

4. बिंदुओं (0, 5) और (–5, 0) के बीच की दूरी है

(A) 5 (B) $5\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 10

5. AOBC एक आयत है, जिसके तीन शीर्ष A (0, 3), O (0, 0) और B (5, 0) हैं। इसका विकर्ण है

(A) 5 (B) 3 (C) $\sqrt{34}$ (D) 4

6. शीर्षों (0, 4), (0, 0) और (3, 0) वाले त्रिभुज का परिमाप है

(A) 5 (B) 12 (C) 11 (D) $7+\sqrt{5}$

7. शीर्षों A (3, 0), B (7, 0) और C (8, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) 14 (B) 28 (C) 8 (D) 6

8. बिंदु (– 4, 0), (4, 0) और (0, 3) निम्नलिखित के शीर्ष हैं

(A) समकोण त्रिभुज (B) समद्विबाहु त्रिभुज

(C) समबाहु त्रिभुज (D) विषमबाहु त्रिभुज

9. बिंदुओं (7, –6) और (3, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करने वाला बिंदु निम्नलिखित में स्थित होता है

(A) चतुर्थांश I (B) चतुर्थांश II

(C) चतुर्थांश III (D) चतुर्थांश IV

10. बिंदुओं A (–2, –5) और B (2, 5) को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित एक बिंदु है

(A) (0, 0) (B) (0, 2) (C) (2, 0) (D) (–2, 0)

11. तीन शीर्षों A (–2, 3), B (6, 7) और C (8, 3) वाले समांतर चतुर्भुज ABCD का चौथा शीर्ष D है

(A) (0, 1) (B) (0, –1) (C) (–1, 0) (D) (1, 0)

12. यदि बिंदु P (2, 1), बिंदुओं A (4, 2) और B (8, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित है, तो

(A) $AP = \frac{1}{3} AB$ (B) AP = PB (C) $PB = \frac{1}{3} AB$ (D) $AP = \frac{1}{2} AB$

13. यदि बिंदुओं Q (– 6, 5) और R (– 2, 3) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु P $\frac{a}{3},4$ है, तो a का मान है

(A) – 4 (B) – 12 (C) 12 (D) – 6

14. बिंदुओं A (1, 5) और B (4, 6) को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक y-अक्ष को निम्नलिखित बिंदु पर काटता है

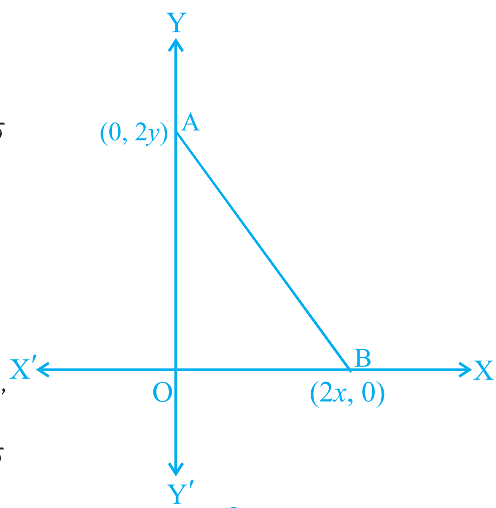
(A) (0, 13) (B) (0, –13)

(C) (0, 12) (D) (13, 0)

15. आकृति 7.1 में दर्शाए गए त्रिभुज AOB के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ बिंदु के निर्देशांक हैं

(A) (x, y) (B) (y, x)

(C) $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$ (D) $\frac{y}{2}, \frac{x}{2}$



आकृति 7.1

16. मूलबिंदु को केंद्र मान कर खींचा गया एक वृत्त, बिंदु $(\frac{13}{2}, 0)$ से होकर जाता है। तब, वृत्त के अभ्यंतर में निम्नलिखित बिंदु स्थित नहीं है

(A) $\frac{-3}{4}, 1$ (B) $2, \frac{7}{3}$ (C) $5, \frac{-1}{2}$ (D) $\left(-6, \frac{5}{2}\right)$

17. एक रेखा y-अक्ष और x-अक्ष को क्रमशः बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। यदि, (2, –5) रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है, तो P और Q के निर्देशांक क्रमशः हैं

(A) (0, – 5) और (2, 0) (B) (0, 10) और (– 4, 0)

(C) (0, 4) और (– 10, 0) (D) (0, – 10) और (4, 0)

18. शीर्षों $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ और $(c, a + b)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) $(a + b + c)^2$ (B) 0 (C) $a + b + c$ (D) abc

19. यदि बिंदुओं $(4, p)$ और (1, 0) के बीच की दूरी 5 है, तो p का मान है

(A) केवल 4 (B) ± 4 (C) केवल – 4 (D) 0

20. यदि बिंदु A (1, 2), O (0, 0) और C (a, b) संरेख हैं, तो

(A) $a = b$ (B) $a = 2b$ (C) $2a = b$ (D) $a = –b$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 1: बिंदु A (–1, 0), B (3, 1), C (2, 2) और D (–2, 1) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल : सत्य। दोनों विकर्णों AC और BD के मध्य-बिंदु $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ हैं, अर्थात् विकर्ण परस्पर समद्विभाजित कर रहे हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: बिंदु (4, 5), (7, 6) तथा (6, 3) संरेख हैं।

हल : असत्य। क्योंकि इन बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है, अतः बिंदु संरेख नहीं हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: बिंदु P (0, –7), बिंदुओं A (–1, 0) और B (7, –6) को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक और y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिंदु है।

हल : सत्य। P (0, –7) स्पष्टतः y–अक्ष पर स्थित है। साथ ही, यह दोनों बिंदुओं (–1, 0) और (7, –6) से $\sqrt{50}$ इकाई की दूरी पर है।

प्रश्नावली 7.2

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

1. शीर्षों A (–2, 0), B (2, 0) और C (0, 2) वाला त्रिभुज ABC शीर्षों D (– 4, 0), E (4, 0) और F (0, 4) वाले त्रिभुज DEF के समरूप है।

2. बिंदु P (– 4, 2), बिंदुओं A (–4, 6) और B (–4, –6) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित है।

3. बिंदु (0, 5), (0, –9) और (3, 6) संरेख हैं।

4. बिंदु P (0, 2), बिंदुओं A (–1, 1) और B (3, 3) को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक और y–अक्ष का प्रतिच्छेद बिंदु है।

5. बिंदु A (3, 1), B (12, –2) और C (0, 2) एक त्रिभुज के शीर्ष नहीं हो सकते।

6. बिंदु A (4, 3), B (6, 4), C (5, –6) और D (–3, 5) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

7. एक वृत्त का केंद्र मूलबिंदु पर है तथा एक बिंदु P (5, 0) इस वृत्त पर स्थित है। बिंदु Q (6, 8) इस वृत्त के बाहर स्थित है।

8. बिंदु A (2, 7), बिंदुओं P (6, 5) और Q (0, –4) को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

9. बिंदु P (5, –3), बिंदुओं A (7, – 2) और B (1, – 5) को मिलाने वाले रेखाखंड को समत्रिभाजित करने वाले दो बिंदुओं में से एक बिंदु है।

10. बिंदु A (–6, 10), B (–4, 6) और C (3, –8) इस प्रकार संरेख हैं कि $AB = \frac{2}{9}AC$ है।

11. बिंदु P (–2, 4), त्रिज्या 6 और केंद्र C (3, 5) वाले वृत्त पर स्थित है।

12. बिंदु A (–1, –2), B (4, 3), C (2, 5) और D (–3, 0) इसी क्रम में, एक आयत बनाते हैं।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि बिंदुओं A (3, 4) और B (k, 6) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु P (x, y) है तथा $x + y - 10 = 0$ है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : बिंदुओं A (3, 4) और B (k, 6) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु

$$= \frac{3+k}{2}, \frac{4+6}{2} = \frac{3+k}{2}, 5$$

तब,
$$\frac{3+k}{2}, 5 = (x, y)$$

अतः, $\frac{3+k}{2} = x$ और $5 = y$

क्योंकि $x + y - 10 = 0$ है, इसलिए हमें प्राप्त है:

$$\frac{3+k}{2} + 5 - 10 = 0$$

अर्थात् $3 + k = 10$

अतः, $k = 7$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: शीर्ष A (1, – 4) वाले उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी A से होकर जाने वाली भुजाओं के मध्य-बिंदु (2, – 1) और (0, – 1) हैं।

हल : मान लीजिए कि B और C के निर्देशांक क्रमशः (a, b) और (x, y) हैं।

तब $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-4+b}{2}\right) = (2, -1)$

अतः, $1 + a = 4, \quad -4 + b = -2$

$a = 3 \qquad b = 2$

साथ ही, $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right) = (0, -1)$

अतः, $1 + x = 0, \qquad -4 + y = -2$

या $x = -1$ अर्थात् $y = 2$

अतः, Δ ABC के शीर्षों के निर्देशांक A (1, –4), B (3, 2) और C (–1, 2) हैं।

इसलिए, Δ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[1(2-2)+3(2+4)-1(-4-2)]$

$= \frac{1}{2}[18+6]$

= 12 वर्ग इकाई

प्रतिदर्श प्रश्न 3: बिंदुओं P $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, Q $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ और R $\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$ द्वारा बनने वाला त्रिभुज PQR किस प्रकार का है?

हल : दूरी सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$PQ = \sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

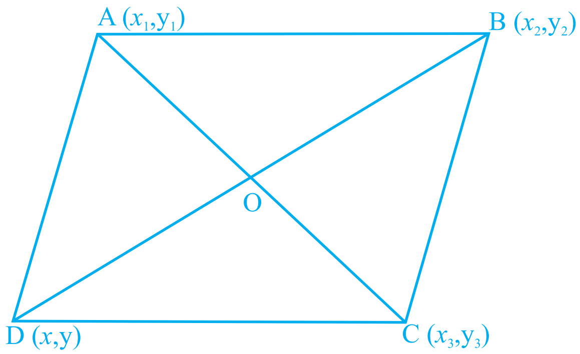
$$PR = \sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6+2\sqrt{12}+2+6-2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

$$RQ = \sqrt{\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6-2\sqrt{12}+2+6+2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

क्योंकि PQ = PR = RQ = 4 है, इसलिए बिंदु P, Q और R एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 4: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसके तीन शीर्ष A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) और C (x_3, y_3) हैं। इस समांतर चतुर्भुज के चौथे शीर्ष D के निर्देशांक x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 और y_3 के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि D के निर्देशांक (x, y) हैं। हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 7.2

अत:, AC का मध्य-बिंदु = BD का मध्य बिंदु

अर्थात्, $\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{x_2 + x}{2}, \frac{y_2 + y}{2}$

अर्थात्, $x_1 + x_3 = x_2 + x$ और $y_1 + y_3 = y_2 + y$

अर्थात्, $x_1 + x_3 - x_2 = x$ और $y_1 + y_3 - y_2 = y$

इस प्रकार, D के निर्देशांक $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$ हैं।

प्रश्नावली 7.3

1. बिंदुओं A (–5, 6), B (–4, –2) और C (7, 5) से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार बताइए।
2. x–अक्ष पर स्थित ऐसे बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (7, –4) से $2\sqrt{5}$ की दूरी पर हैं। ऐसे कितने बिंदु हैं?
3. बिंदुओं A (2, –2), B (7, 3), C (11, –1) और D (6, –6) को इसी क्रम में लेने पर किस प्रकार का चतुर्भुज बनता है?
4. a का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदुओं A (–3, –14) और B $(a, –5)$ के बीच की दूरी 9 इकाई है।
5. एक बिंदु ज्ञात कीजिए, जो A (–5, 4) और B (–1, 6) से समदूरस्थ हो। ऐसे कितने बिंदु हैं?

6. x-अक्ष पर स्थित बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A (–5, –2) और B(4, –2) के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित है। बिंदुओं Q, A और B से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार भी बताइए।

7. m का मान ज्ञात कीजिए, यदि (5, 1), (–2, –3) और (8, 2m) संरेख हैं।

8. यदि बिंदु A (2, –4), बिंदुओं P (3, 8) और Q (–10, y) से समदूरस्थ है, तो y के मान ज्ञात कीजिए। दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए।

9. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–8, 4), (–6, 6) और (–3, 9) हैं।

10. बिंदुओं (–4, –6) और (–1, 7) को मिलाने वाले रेखाखंड को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

11. ज्ञात कीजिए कि बिंदु P$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{12}\right)$, बिंदुओं A $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ और B (2, –5) को मिलाने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है।

12. यदि P (9a – 2, –b), बिंदुओं A (3a + 1, –3) और B (8a, 5) को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करे, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि (a,b), बिंदुओं A (10,–6) और B (k, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु है तथा $a - 2b = 18$ है, तो k का मान और दूरी AB ज्ञात कीजिए।

14. किसी वृत्त का केन्द्र (2a, a – 7) है। यदि वृत्त, बिंदु (11, –9) से होकर जाता है और उसका व्यास $10\sqrt{2}$ इकाई है, तो a के मान ज्ञात कीजिए।

15. बिंदुओं A (3, 2) और B (5,1) को मिलाने वाला रेखाखंड बिंदु P पर 1:2 के अनुपात में विभाजित हो जाता है। तथा बिंदु P रेखा $3x - 18y + k = 0$ पर स्थित है। k का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि बिंदु D$\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$, E (7, 3) और F$\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$ एक त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, तो Δ ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

17. बिंदु A (2, 9), B (a, 5) और C (5, 5) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, जिसका ∠B समकोण है। a के मान ज्ञात कीजिए और फिर ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. बिंदुओं P (–1, 3) और Q (2, 5) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, ताकि $PR = \frac{3}{5}PQ$ हो।

19. k के मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A (k + 1, 2k), B (3k, 2k + 3) और C (5k – 1, 5k) संरेख हैं।

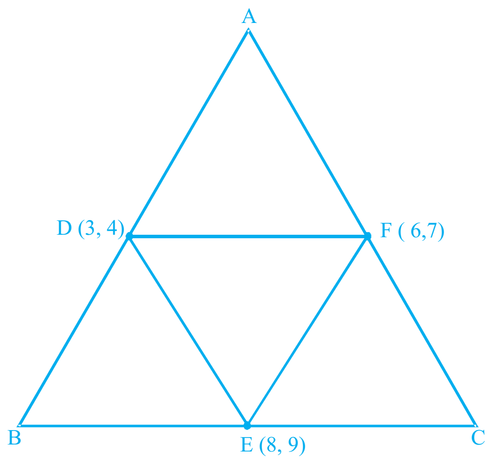
20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए, जिसमें रेखा $2x + 3y - 5 = 0$, बिंदुओं (8, –9) और (2, 1) को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करती है। विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: ΔABC की भुजाओं के मध्य-बिंदु D, E और F क्रमश: (3, 4), (8, 9) और (6, 7) हैं। इस त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

17-04-2018

हल : क्योंकि D और F क्रमशः AB और AC के मध्य-बिंदु हैं, इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि DFEB एक समांतर चतुर्भुज है। मान लीजिए कि B के निर्देशांक (x, y) हैं।



आकृति 7.3

अनुच्छेद (D) के प्रतिदर्श प्रश्न 4 को देख कर, प्राप्त कीजिए :

$$x = 3 + 8 - 6 = 5$$

$$y = 4 + 9 - 7 = 6$$

अतः, B (5, 6) त्रिभुज के शीर्षों में से एक शीर्ष है।

इसी प्रकार, DFCE और DAFE भी समांतर चतुर्भुज हैं तथा A के निर्देशांक (3 + 6 – 8, 4 + 7 – 9) = (1, 2) हैं। C के निर्देशांक (8+6–3, 9+7 – 4) = (11, 12) हैं। इस प्रकार, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक A (1, 2), B (5,6) और C (11, 12) हैं।

प्रश्नावली 7.4

1. यदि (– 4, 3) और (4, 3) एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जब कि दिया है कि मूलबिंदु त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है।

2. A (6, 1), B (8, 2) और C (9, 4) एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्ष हैं। यदि E भुजा DC का मध्य-बिंदु है, तो Δ ADE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) और C (x_3, y_3) एक Δ ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से खींची गई माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

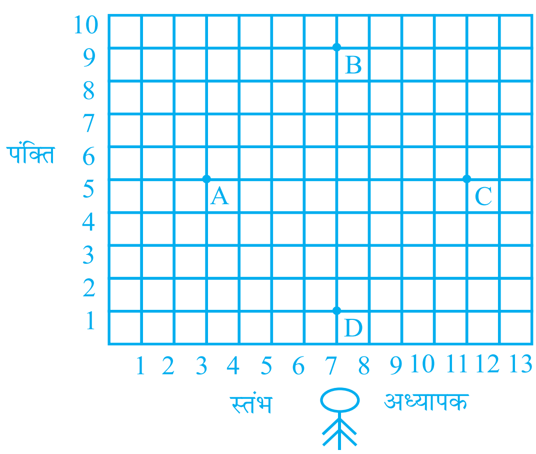
(ii) AD पर स्थित उस बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिससे AP : PD = 2 : 1 हो।

(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर स्थित क्रमश: ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ : QE = 2 : 1 और CR : RF = 2 : 1 हो।

(iv) ΔABC के केंद्रक के क्या निर्देशांक हैं?

4. यदि बिंदुओं A (1, –2), B (2, 3), C (a, 2) और D (– 4, –3) से एक समांतर चतुर्भुज बनता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए तथा AB को आधार लेकर उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. किसी स्कूल के विद्यार्थी ड्रिल अभ्यास के लिए, अपने खेल के मैदान में पंक्तियों और स्तंभों में खड़े हैं। A, B, C और D किन्ही चार विद्यार्थियों के स्थान हैं, जैसा आकृति 7.4 में दर्शाया गया है। क्या यह संभव है कि इस ड्रिल में जसपाल को ऐसे स्थान पर खड़ा कर दिया जाए कि वह A, B, C और D से समदूरस्थ हो? यदि ऐसा है, तो उसकी स्थिति कहाँ होगी?



आकृति 7.4

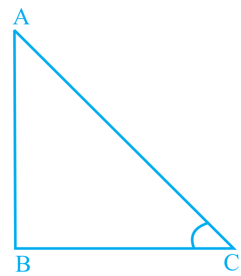
6. आयुष अपने घर से कार्यालय की ओर चलना प्रारंभ करता है। सीधे कार्यालय जाने के स्थान पर, पहले वह एक बैंक में जाता है, वहाँ से वह अपनी पुत्री के स्कूल और फिर कार्यालय पहुँचता है। यदि घर (2, 4) पर स्थित है, बैंक (5, 8) पर स्थित है, स्कूल (13, 14) पर स्थित है और कार्यालय (13, 26) पर स्थित है, तथा निर्देशांक किलोमीटर में हैं, तो आयुष ने कार्यालय पहुँचने के लिए कितनी अतिरिक्त दूरी चली है? (कल्पना कीजिए कि सभी तय की गई दूरियाँ सरल रेखाओं में हैं।)

अध्याय 8

त्रिकोणमिति का परिचय और उसके अनुप्रयोग

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक त्रिभुज ABC, जिसका कोण B समकोण है, कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात इस प्रकार परिभाषित किए जाते हैं:



आकृति 8.1

$\angle$A का sine (साइन) = $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle$A का cosine (कोसाइन) = $\cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle$A का tangent (टैनजेंट) = $\tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$

$\angle$A का cosecant (कोसीकेंट) = $\text{cosec } A = \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{AC}{BC}$

$\angle$A का secant (सीकेंट) = $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{AC}{AB}$

$\angle$A का cotangent (कोटैंजेंट) = $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{AB}{BC}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

- यदि कोण वही रहे, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ बदलते (विचरित) नहीं हैं।
- यदि किसी कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हो, तो उसके अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात निर्धारित किए जा सकते हैं।
- कोणों 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात :

A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं
cosec A	परिभाषित नहीं	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नहीं
cot A	परिभाषित नहीं	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- sin A या cos A का मान 1 से अधिक कभी नहीं होता है, जबकि cosec A या sec A का मान सदैव 1 से बड़ा या उसके बराबर होता है।
- पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात:

  $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$

  $\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

  $\sec(90° - A) = \text{cosec } A$, $\text{cosec}(90° - A) = \sec A$
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ :

  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

  $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$

- किसी प्रेक्षक की आँख से उस वस्तु के बिंदु तक की रेखा जिसे प्रेक्षक देखता है 'दृष्टि रेखा' कहलाती है।
- देखी जाने वाली वस्तु का 'उन्नयन कोण' वह कोण है जो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा से बनाती है, जबकि वह वस्तु क्षैतिज स्तर रेखा से ऊपर होती है।
- देखी जाने वाली वस्तु का 'अवनमन कोण' वह कोण है जो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा से बनाती है, जबकि वह वस्तु क्षैतिज स्तर (रेखा) से नीचे होती है।
- किसी वस्तु की ऊँचाई या लंबाई अथवा दो भिन्न वस्तुओं के बीच की दूरी त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से निर्धारित की जा सकती है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : $(\sin 30° + \cos 30°) – (\sin 60° + \cos 60°)$ का मान है

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : $\dfrac{\tan 30°}{\cot 60°}$ का मान है

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : $(\sin 45° + \cos 45°)$ का मान है

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 8.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि $\cos A = \dfrac{4}{5}$ है, तो $\tan A$ का मान है

(A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{5}{3}$

2. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ है, तो $\cot A$ का मान है

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

3. व्यंजक $[\text{cosec}\,(75° + \theta) - \sec\,(15° - \theta) - \tan\,(55° + \theta) + \cot\,(35° - \theta)]$ का मान है

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

4. यदि $\sin\theta = \frac{a}{b}$ दिया है, तो $\cos\theta$ बराबर है

(A) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ (D) $\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

5. यदि $\cos(\alpha + \beta) = 0$ हो, तो $\sin(\alpha - \beta)$ को निम्नलिखित के रूप में बदला जा सकता है

(A) $\cos\beta$ (B) $\cos 2\beta$ (C) $\sin\alpha$ (D) $\sin 2\alpha$

6. $(\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots \tan 89°)$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

7. यदि $\cos 9\alpha = \sin\alpha$ है और $9\alpha < 90°$ है, तो $\tan 5\alpha$ का मान है

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 0

8. यदि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण C समकोण है, तो $\cos(A + B)$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. यदि $\sin A + \sin^2 A = 1$ है, तो व्यंजक $(\cos^2 A + \cos^4 A)$ का मान है

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

10. यदि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ और $\cos\beta = \frac{1}{2}$ दिया है, तो $(\alpha + \beta)$ का मान है

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

11. व्यंजक $\left[\dfrac{\sin^2 22°+\sin^2 68°}{\cos^2 22°+\cos^2 68°}+\sin^2 63°+\cos 63° \sin 27°\right]$ का मान है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

12. यदि $4 \tan\theta = 3$ है, तो $\left(\dfrac{4\sin\theta-\cos\theta}{4\sin\theta+\cos\theta}\right)$ बराबर है

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

13. यदि $\sin\theta - \cos\theta = 0$ है, तो $(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$ का मान है

(A) 1 (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

14. $\sin (45° + \theta) - \cos (45° - \theta)$ बराबर है

(A) $2 \cos\theta$ (B) 0 (C) $2 \sin\theta$ (D) 1

15. 6m ऊँचे एक खंभे की छाया भूमि पर $2\sqrt{3}$ m लंबी है। तब, उस समय सूर्य का उन्नयन कोण है

(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : $\sin\theta + \cos\theta$ का मान सदैव 1 से बड़ा होता है।

हल : असत्य।

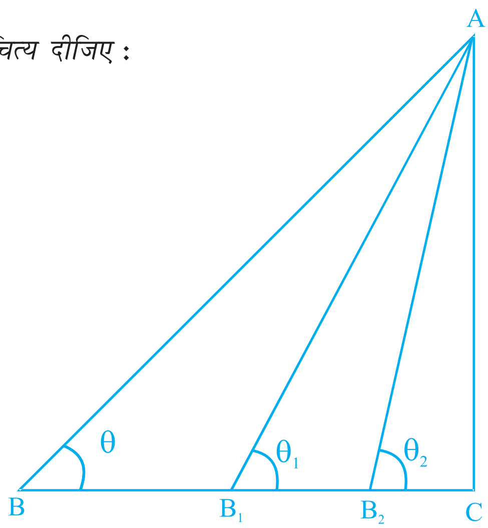
$\theta = 0°$ के लिए $(\sin\theta + \cos\theta)$ का मान 1 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : $\tan\theta$ का मान $(\theta < 90°)$ बढ़ता है, जब θ बढ़ता है

हल : सत्य।

आकृति 8.2 में, जैसे-जैसे बिंदु B भुजा BC के अनुदिश C के निकट आता जाता है, वैसे-वैसे

(i) θ बढ़ता जाता है $(\theta_1 > \theta, \theta_2 > \theta_1, ...)$ तथा



आकृति 8.2

(ii) BC घटता जाता है ($B_1C < BC$, $B_2C < B_1C$, ...)

इस प्रकार, लंब AC स्थिर रहता है तथा आधार BC घटता जाता है। अत: $\tan\theta$ बढ़ता जाता है, जब θ बढ़ता जाता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : जब θ बढ़ता जाता है, $\sin\theta$ की तुलना में $\tan\theta$ तीव्र गति से बढ़ता है।

हल : सत्य।

हम जानते हैं कि जब θ बढ़ता है तो $\sin\theta$ बढ़ता है, परंतु $\cos\theta$ घटता जाता है।

हमें प्राप्त है: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

अब जब θ बढ़ता है, तो $\sin\theta$ बढ़ता है परंतु $\cos\theta$ घटता जाता है। अत: $\tan\theta$ की स्थिति में अंश बढ़ता जाता है, परंतु हर घटता जाता है। परंतु $\sin\theta$ की स्थिति में, जिसे $\dfrac{\sin\theta}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है, अर्थात् 1 रहता है। अत: जब θ बढ़ता है, तो $\sin\theta$ की तुलना में $\tan\theta$ तीव्र गति से बढ़ता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : $\sin\theta$ का मान $a+\dfrac{1}{a}$ है, जहाँ 'a' एक धनात्मक संख्या है।

हल : असत्य।

हम जानते हैं कि $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ अर्थात्, $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ है, परंतु $\sin\theta$ का मान 1 से बड़ा नहीं होता है।

वैकल्पिक रूप से, यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

स्थिति 1. यदि $a < 1$ है, तो $a+\dfrac{1}{a} > 1$

स्थिति 2. यदि $a = 1$ है, तो $a+\dfrac{1}{a} > 1$

स्थिति 3. यदि $a > 1$ है, तो $a+\dfrac{1}{a} > 1$

परंतु $\sin\theta$ का मान 1 से बड़ा नहीं हो सकता।

प्रश्नावली 8.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:

1. $\frac{\tan 47°}{\cot 43°} = 1$ है।

2. व्यंजक $(\cos^2 23° - \sin^2 67°)$ का मान धनात्मक है।

3. व्यंजक $(\sin 80° - \cos 80°)$ का मान ऋणात्मक है।

4. $\sqrt{(1-\cos^2\theta)\sec^2\theta} = \tan\theta$

5. यदि $\cos A + \cos^2 A = 1$ है, तो $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ है।

6. $(\tan\theta + 2)(2\tan\theta + 1) = 5\tan\theta + \sec^2\theta$ है।

7. यदि एक मीनार की छाया की लंबाई बढ़ रही है, तो सूर्य का उन्नयन कोण भी बढ़ रहा है।

8. यदि एक झील की सतह से 3 मीटर ऊपर एक प्लेटफार्म पर खड़ा एक व्यक्ति किसी बादल और झील में उसके परावर्तन को देखता है, तो उस बादल का उन्नयन कोण उसके परावर्तन के अवनमन कोण के बराबर होता है।

9. $2\sin\theta$ का मान $a + \frac{1}{a}$ हो सकता है, जहाँ a एक धनात्मक संख्या है और $a \neq 1$ है।

10. $\cos\theta = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ है, जहाँ a और b ऐसी दो भिन्न संख्याएँ हैं कि $ab > 0$ है।

11. किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई दुगुनी हो जाए, तो इसकी चोटी का उन्नयन कोण भी दुगुना हो जाएगा।

12. यदि एक मीनार की ऊँचाई तथा उसके आधार से प्रेक्षण बिंदु की दूरी दोनों ही 10% बढ़ जाते हैं, तो चोटी का उन्नयन कोण वही रहता है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : सिद्ध कीजिए कि $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$ है।

हल : हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

अतः, $$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1$$

या, $$(\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$$

या, $$\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि $(\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1)\,\text{cosec}^2\theta = 2$ है।

हल :

बायाँ पक्ष $= (\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1)\,\text{cosec}^2\theta$

$= [(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1]\,\text{cosec}^2\theta$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1)\,\text{cosec}^2\theta$

[क्योंकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= 2\sin^2\theta\ \text{cosec}^2\theta$ [क्योंकि $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$]

$= 2 =$ दायाँ पक्ष

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यदि $\alpha + \beta = 90°$ दिया है, तो दर्शाइए कि

$$\sqrt{\cos\alpha\,\text{cosec}\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \sin\alpha$$

हल:

$$\sqrt{\cos\alpha\,\text{cosec}\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \sqrt{\cos\alpha\,\text{cosec}(90° - \alpha) - \cos\alpha\sin(90° - \alpha)}$$

[$\alpha + \beta = 90°$ दिया है]

$$= \sqrt{\cos\alpha\sec\alpha - \cos\alpha\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$= \sin\alpha$$

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : यदि $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta + \cot\theta = 1$ है।

हल :

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ (दिया है)

या, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 3$

या, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 3$

$2\sin\theta\ \cos\theta = 2$ [$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

या, $\sin\theta\cos\theta = 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

या, $$1=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

अत:, $\tan\theta + \cot\theta = 1$

प्रश्नावली 8.3

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (प्रश्न 1 से प्रश्न 7 तक) :

1. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\text{cosec}\theta$

2. $\frac{\tan A}{1+\sec A}-\frac{\tan A}{1-\sec A} = 2\text{cosec } A$

3. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$ है, तो $\sin A \cos A = \frac{12}{25}$ है।

4. $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha) = \sec\alpha + \text{cosec }\alpha$

5. $\left(\sqrt{3}+1\right)(3 - \cot 30°) = \tan^3 60° - 2\sin 60°$

6. $1+\frac{\cot^2\alpha}{1+\text{cosec}\,\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$

7. $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \sec\theta\ \sec(90° - \theta)$

8. सूर्य का उस समय उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए, जब h मीटर ऊँचे एक खंभे की छाया की लंबाई $\sqrt{3}\,h$ मीटर है।

9. यदि $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ है, तो $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. 15 मीटर लंबी एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के ठीक ऊपरी सिरे पर पहुँच पाती है। यदि सीढ़ी इस समय दीवार से 60° का कोण बनाती है, तो दीवार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

11. $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ को सरल कीजिए।

12. यदि $2\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2$ है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

13. दर्शाइए कि $\dfrac{\cos^2(45°+\theta)+\cos^2(45°-\theta)}{\tan(60°+\theta)\tan(30°-\theta)} = 1$ है।

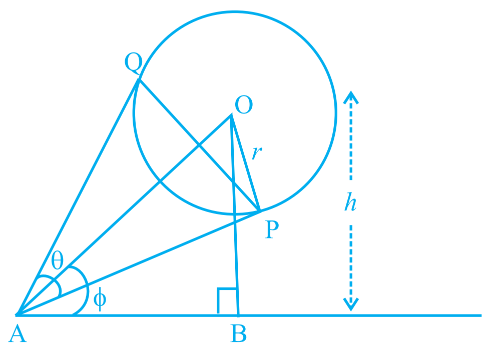
14. 1.5 मीटर ऊँचाई वाला एक प्रेक्षक 22 मीटर ऊँची एक मीनार से 20.5 मीटर की दूरी पर खड़ा है। प्रेक्षक की आँख से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण निर्धारित कीजिए।

15. दर्शाइए कि $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : त्रिज्या r का एक गोलाकार गुब्बारा एक प्रेक्षक की आँख पर कोण θ अंतरित करता है। यदि इसके केंद्र का उन्नयन कोण ϕ है, तो गुब्बारे के केंद्र की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 8.3 में, O गुब्बारे का केंद्र है, जिसकी त्रिज्या OP = r और $\angle PAQ = \theta$ है। साथ ही, $\angle OAB = \phi$ है।



आकृति 8.3

मान लीजिए कि गुब्बारे के केंद्र की ऊँचाई h है। इस प्रकार, OB = h है।

अब, ΔOAP से, $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r}{d}$, जहाँ OA = d है। ...(1)

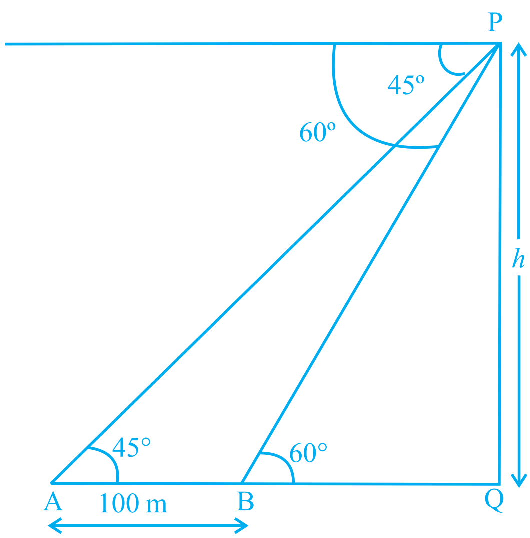
साथ ही ΔOAB से, $\sin\phi = \dfrac{h}{d}$ है। ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है: $\dfrac{\sin\phi}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{\dfrac{h}{d}}{\dfrac{r}{d}} = \dfrac{h}{r}$

या $h = r\sin\phi\,\text{cosec}\,\dfrac{\theta}{2}$.

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक सीधी सड़क के ऊर्ध्वाधर ऊपर एक गुब्बारे से, किसी क्षण पर दो कारों के अवनमन कोण 45° और 60° प्राप्त किए गए हैं। यदि कारों के बीच की दूरी 100 m है, तो गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि गुब्बारे की ऊँचाई h मीटर है तथा A और B दो कारें हैं (देखिए आकृति 8.4)। इस प्रकार, AB = 100 m है। ΔPAQ से, $AQ = PQ = h$ है।



आकृति 8.4

अब, ΔPBQ से, $\frac{PQ}{BQ} = \tan 60° = \sqrt{3}$ या $\frac{h}{h-100} = \sqrt{3}$

या $h = \sqrt{3}\,(h - 100)$

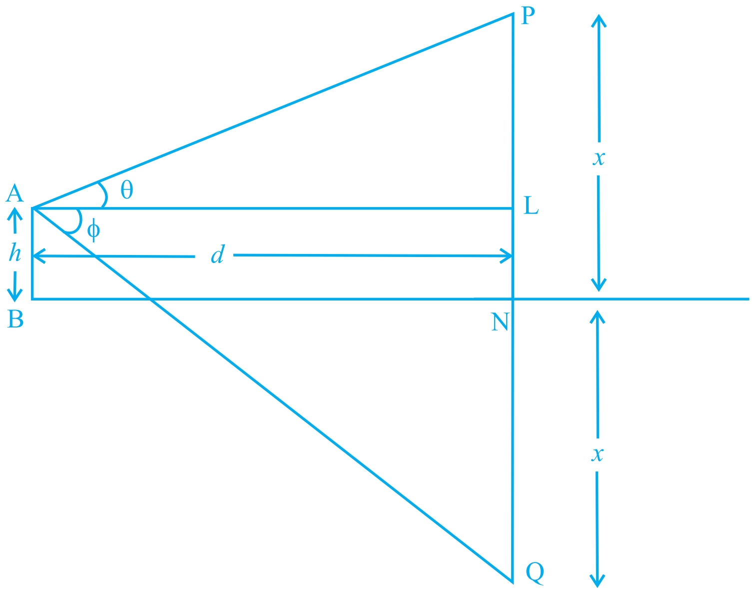
अतः, $h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 50\,(3+\sqrt{3})$

अतः, गुब्बारे की ऊँचाई $50\,(3+\sqrt{3})$ m है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी झील की सतह से h मीटर की ऊँचाई पर स्थित एक बिंदु से एक बादल का उन्नयन कोण θ है तथा इसी बिंदु से झील में बादल के परावर्तन का अवनमन कोण ϕ है। सिद्ध

कीजिए कि झील की सतह के ऊपर बादल की ऊँचाई $h\left(\dfrac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi-\tan\theta}\right)$ है।

हल : मान लीजिए कि P बादल है और Q झील में बादल का परावर्तन है (देखिए आकृति 8.5)। मान लीजिए कि A प्रेक्षण का बिंदु इस प्रकार है कि $AB = h$ है।



आकृति 8.5

मान लीजिए कि झील के ऊपर बादल की ऊँचाई x है। मान लीजिए कि $AL = d$ है।

अब, ΔPAL से, $\dfrac{x-h}{d} = \tan\theta$ ...(1)

ΔQAL से, $\dfrac{x+h}{d} = \tan\phi$ ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x+h}{x-h} = \frac{\tan\phi}{\tan\theta}$$

या $\frac{2x}{2h} = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{\tan\phi - \tan\theta}$

अतः, $x = h\left(\frac{\tan\phi + \tan\theta}{\tan\phi - \tan\theta}\right)$.

प्रश्नावली 8.4

1. यदि $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = p$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$ है।

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ है।

3. किसी बिंदु से, एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण $30°$ है। यदि प्रेक्षक दीवार की ओर 20 मीटर चलता है, तो उन्नयन कोण में $15°$ की वृद्धि हो जाती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

4. यदि $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\ \cos\theta$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = 1$ या $\frac{1}{2}$ है।

5. यदि $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ दिया है, तो सिद्ध कीजिए कि $2\sin\theta - \cos\theta = 2$ है।

6. किसी मीनार के आधार से s और t की दूरियों पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार की चोटी के उन्नयन कोण परस्पर पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{st}$ है।

7. एक समतल भूमि पर खड़ी मीनार की छाया की उस समय की लंबाई जब सूर्य का उन्नयन कोण $30°$ है, उस समय की लंबाई से 50 m अधिक है जब सूर्य का उन्नयन कोण $60°$ था। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक ऊर्ध्वाघर मीनार एक क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा उस पर h ऊँचाई का एक ऊर्ध्वाधर ध्वज-दंड लगा हुआ है। समतल के किसी बिंदु से ध्वज-दंड के निचले और ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण क्रमशः α और β हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\left(\frac{h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\right)$ है।

9. यदि $\tan\theta + \sec\theta = l$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sec\theta = \frac{l^2 + 1}{2l}$ है।

10. यदि $\sin\theta + \cos\theta = p$ और $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $q(p^2 - 1) = 2p$ है।

11. यदि $a \sin\theta + b \cos\theta = c$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $a \cos\theta - b \sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ है।

12. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1+\sec\theta-\tan\theta}{1+\sec\theta+\tan\theta} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ है।

13. 30 m ऊँची एक मीनार की चोटी का उसी समतल भूमि पर खड़ी मीनार के आधार से उन्नयन कोण 60° है तथा दूसरी मीनार की चोटी का पहली मीनार के आधार से उन्नयन कोण 30° है। दोनों मीनारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए तथा दूसरी मीनार की ऊँचाई भी ज्ञात कीजिए।

14. h ऊँचाई की किसी मीनार की चोटी से दो वस्तुओं, जो मीनार के आधार वाली रेखा में स्थित हैं, के अवनमन कोण α और β $(\beta > \alpha)$ हैं। दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

15. एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी हुई है तथा क्षैतिज से α कोण बनाती है। इसके निचले सिरे को दीवार से p दूरी अधिक पर कर दिया जाता है, जिससे सीढ़ी का ऊपरी सिरा दीवार पर q दूरी नीचे खिसक जाता है तथा उस समय सीढ़ी क्षैतिज से कोण β बनाती है। दर्शाइए कि $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$ है।

16. किसी ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी का भूमि पर स्थित किसी बिंदु से उन्नयन कोण 60° है। पहले बिंदु से 10 m उर्ध्वाधरतः ऊपर एक अन्य बिंदु पर उसका उन्नयन कोण 45° है। मीनार की उँचाई ज्ञात कीजिए।

17. किसी मकान की खिड़की भूमि से h m की ऊँचाई पर है। इस खिड़की से, सड़क के दूसरी ओर स्थित एक अन्य मकान के शिखर और आधार के क्रमशः उन्नयन और अवनमन कोण α और β पाए जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि दूसरे मकान की ऊँचाई $h(1 + \tan\alpha \cot\beta)$ मीटर है।

18. किसी मकान की निचली खिड़की भूमि से 2 m की ऊँचाई पर है तथा उसकी ऊपरी खिड़की निचली खिड़की से ऊर्ध्वाधरतः 4 m ऊपर है। किसी क्षण इन खिड़कियों से एक गुब्बारे के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° प्रेक्षित किए गए। भूमि के ऊपर गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

अध्याय 9

वृत्त

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- वृत्त पर स्पर्श रेखा और उसके स्पर्श बिंदु का अर्थ।
- स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लंब होती है।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि वृत्त की दो त्रिज्याओं के बीच का कोण 130º हो, तो इन त्रिज्याओं के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है :

(A) 90º (B) 50º (C) 70º (D) 40º

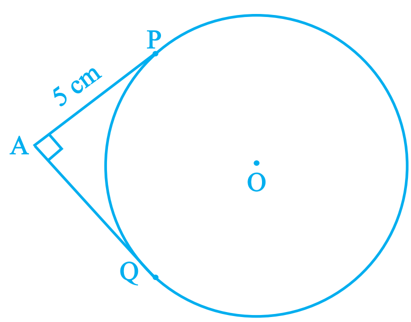
हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: आकृति 9.1 में, केंद्र O वाले वृत्त पर एक बाहरी बिंदु A से खींची गई स्पर्श रेखाएँ AP और AQ परस्पर लंब हैं तथा प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई 5 cm है। तब, वृत्त की त्रिज्या है

(A) 10 cm (B) 7.5 cm

(C) 5 cm (D) 2.5 cm

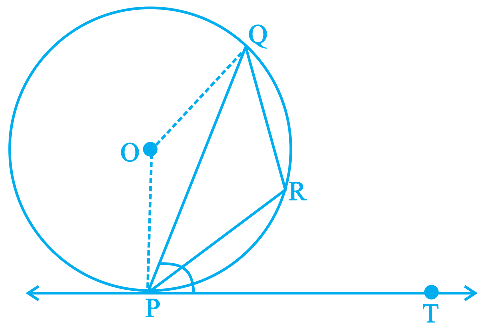
हल : उत्तर (C)



आकृति 9.1

प्रतिदर्श प्रश्न 3: आकृति 9.2 में, PQ वृत्त की एक जीवा है तथा PT बिंदु P पर एक स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि $\angle QPT = 60°$ है। तब, $\angle PRQ$ बराबर है

(A) 135° (B) 150°
(C) 120° (D) 110°



आकृति 9.2

हल : उत्तर (C)

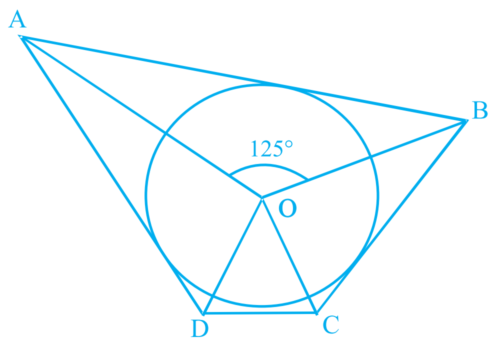
[**संकेत :** $\angle OPQ = \angle OQP = 30°$, अर्थात् $\angle POQ = 120°$ है। साथ ही, $\angle PRQ = \frac{1}{2}$ प्रतिवर्ती $\angle POQ$ है।]

प्रश्नावली 9.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 4 cm और 5 cm हैं, तो एक वृत्त की प्रत्येक उस जीवा की लंबाई, जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा है, निम्नलिखित होगी

(A) 3 cm (B) 6 cm
(C) 9 cm (D) 1 cm



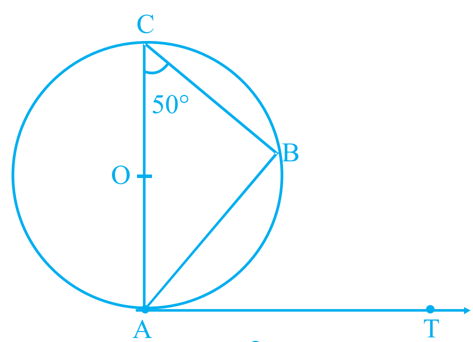
आकृति 9.3

2. आकृति 9.3 में, यदि $\angle AOB = 125°$ है, तो $\angle COD$ बराबर है

(A) 62.5° (B) 45°
(C) 35° (D) 55°

3. आकृति 9.4 में, AB एक वृत्त की जीवा है तथा AOC वृत्त का व्यास इस प्रकार है कि $\angle ACB = 50°$ है। यदि AT बिंदु A पर वृत्त की स्पर्श रेखा है, तो $\angle BAT$ बराबर है

(A) 65° (B) 60°
(C) 50° (D) 40°



आकृति 9.4

4. किसी बिंदु P से, जो त्रिज्या 5 cm वाले एक वृत्त के केंद्र O से 13 cm की दूरी पर है, वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR खींची गई हैं। तब चतुर्भुज PQOR का क्षेत्रफल है

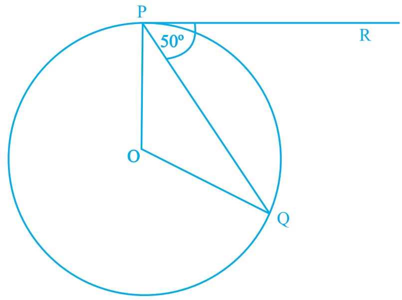
(A) 60 cm^2 (B) 65 cm^2 (C) 30 cm^2 (D) 32.5 cm^2

5. किसी 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त के एक व्यास AB के एक सिरे A पर स्पर्श रेखा XAY खींची गई है। XY के समांतर तथा A से 8 cm की दूरी पर, जीवा CD की लंबाई है

(A) 4 cm (B) 5 cm
(C) 6 cm (D) 8 cm

6. आकृति 9.5 में, AT केंद्र O वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि OT = 4 cm और $\angle OTA = 30°$ है। तब, AT बराबर है

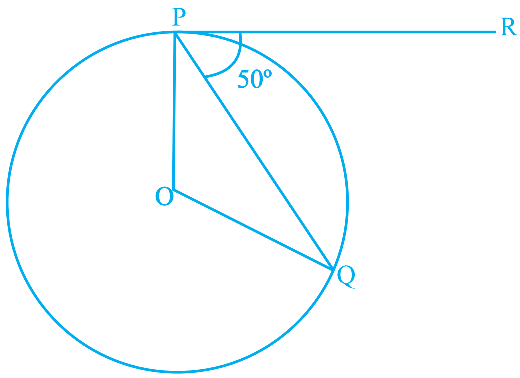
(A) 4 cm (B) 2 cm
(C) $2\sqrt{3}$ cm (D) $4\sqrt{3}$ cm



आकृति 9.5

7. आकृति 9.6 में, यदि O वृत्त का केंद्र है, PQ एक जीवा है तथा P पर खींची गई स्पर्श रेखा PR जीवा PQ के साथ 50° का कोण बनाती है, तो $\angle POQ$ बराबर है

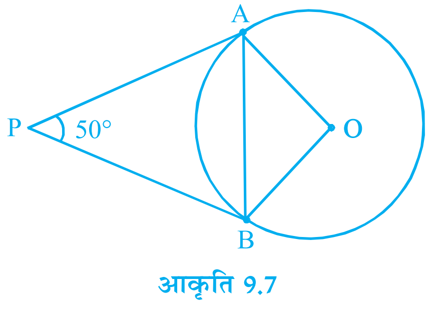
(A) 100° (B) 80°
(C) 90° (D) 75°



आकृति 9.6

8. आकृति 9.7 में, यदि PA और PB केंद्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle APB = 50°$ हैं, तब $\angle OAB$ बराबर है

(A) 25° (B) 30°
(C) 40° (D) 50°



आकृति 9.7

9. यदि त्रिज्या 3cm वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ ऐसी खींची जाएँ कि उनके बीच का कोण 60° हो, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई होगी

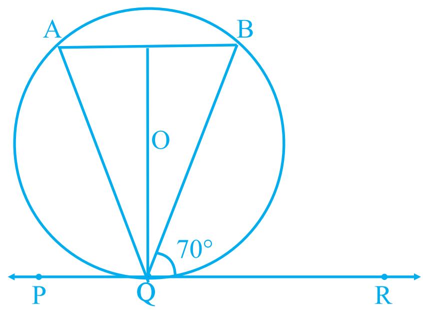
(A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm (B) 6 cm

(C) 3 cm (D) $3\sqrt{3}$ cm

10. आकृति 9.8 में, यदि PQR केंद्र O वाले वृत्त की बिंदु Q पर स्पर्श रेखा है, AB रेखा PR के समांतर एक जीवा है तथा $\angle BQR = 70°$ है, तो $\angle AQB$ बराबर है

(A) 20° (B) 40°

(C) 35° (D) 45°

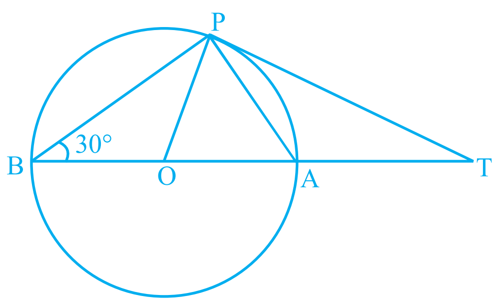


आकृति 9.8

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

'सत्य' या 'असत्य' लिखिए और अपने उत्तर का कारण दीजिए।

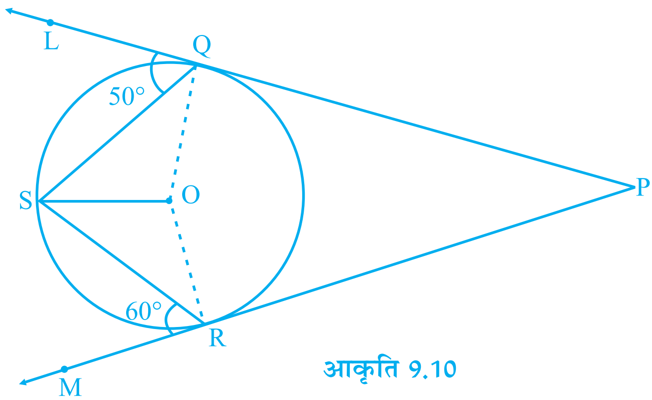
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.9 में, BOA वृत्त का एक व्यास है तथा एक बिंदु P पर खींची गई स्पर्श रेखा बढ़ाई गई BA से T पर मिलती है। यदि $\angle PBO = 30°$ है, तो $\angle PTA$ भी 30° के बराबर है।



आकृति 9.9

हल : सत्य। क्योंकि $\angle BPA = 90°$ है, इसलिए $\angle PAB = \angle OPA = 60°$ है। साथ ही, $OP \perp PT$ है। अतः, $\angle APT = 30°$ और $\angle PTA = 60° - 30° = 30°$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 9.10 में, PQL और PRM केंद्र O वाले वृत्त की बिंदुओं Q और R पर क्रमशः स्पर्श रेखाएँ हैं तथा S इस वृत्त पर एक बिंदु इस प्रकार स्थित है कि $\angle SQL = 50°$ और $\angle SRM = 60°$ है। तब, $\angle QSR = 40°$ है।



आकृति 9.10

हल : असत्य। यहाँ $\angle OSQ = \angle OQS = 90° – 50° = 40°$ है तथा $\angle RSO = \angle SRO = 90° – 60° = 30°$ है। अतः, $\angle QSR = 40° + 30° = 70°$ है।

प्रश्नावली 9.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

1. यदि एक जीवा AB वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती (बनाती) है, तो A और B पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण भी 60° होगा।

2. किसी बाहरी बिंदु से एक वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई सदैव उसकी त्रिज्या से बड़ी होती है।

3. केंद्र O वाले वृत्त पर किसी बाहरी बिंदु P से खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई OP से सदैव छोटी होती है।

4. वृत्त की दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 0° हो सकता है।

5. यदि किसी बिंदु P से त्रिज्या a और केंद्र O वाले वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 90° है, तो $OP = a\sqrt{2}$ होता है।

6. यदि किसी बिंदु P से त्रिज्या a और केंद्र O वाले वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60° है, तो $OP = a\sqrt{3}$ होता है।

7. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC के शीर्ष A पर त्रिभुज के परिवृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा भुजा BC के समांतर होती है।

8. यदि एक दिए हुए रेखाखंड PQ को कई वृत्त बिंदु A पर स्पर्श करते हैं, तो उनके केंद्र PQ के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।

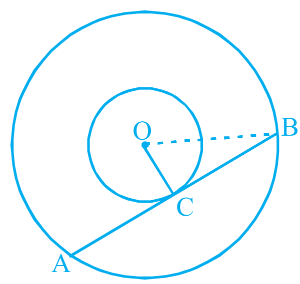
9. यदि कई वृत्त एक रेखाखंड PQ के अंत बिंदुओं P और Q से होकर जाते हैं, तो उनके केंद्र PQ के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।

10. AB एक वृत्त का व्यास है और AC उसकी एक जीवा इस प्रकार है कि $\angle BAC = 30°$ है। यदि C पर खींची गई स्पर्श रेखा बढ़ाई गई AB से D पर मिलती है, तो BC = BD होगा।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि d_1 और d_2 ($d_2 > d_1$) दो संकेंद्रीय वृत्तों के व्यास हैं तथा c एक वृत्त की उस जीवा की लंबाई है, जो दूसरी वृत्त की स्पर्श रेखा है, तो सिद्ध कीजिए कि $d_2^2 = c^2 + d_1^2$ है।

हल : मान लीजिए कि एक वृत्त की जीवा AB है जो दूसरे वृत्त की C पर स्पर्श रेखा है। तब, ΔOCB एक समकोण त्रिभुज है (देखिए आकृति 9.11)। पाइथागोरस प्रमेय से, $OC^2 + CB^2 = OB^2$



आकृति 9.11

अर्थात्, $$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$$

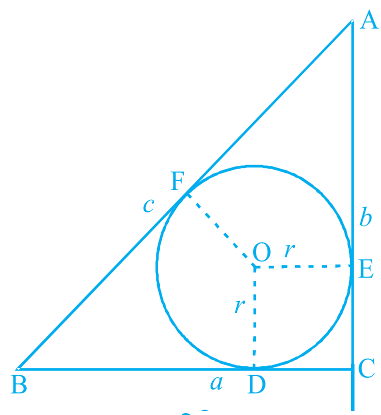
(क्योंकि C जीवा AB को समद्विभाजित करता है)

अत:, $d_2^2 = c^2 + d_1^2$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि a, b, c किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं, जिनमें से c कर्ण है, तो सिद्ध कीजिए कि उस वृत्त की त्रिज्या r, जो इस त्रिभुज की भुजाओं को स्पर्श करता है,

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$ से प्राप्त होती है।

हल : मान लीजिए कि वृत्त समकोण त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB को क्रमश: D, E और F पर स्पर्श करता है, जहाँ BC = a, CA = b और AB = c है (देखिए आकृति 9.12)। तब, AE = AF और BD = BF है। साथ ही, CE = CD = r है।



आकृति 9.12

अर्थात्, $b - r = AF$, $a - r = BF$

या $\quad AB = c = AF + BF = b - r + a - r$

इससे $\quad r = \dfrac{a + b - c}{2}$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 9.3

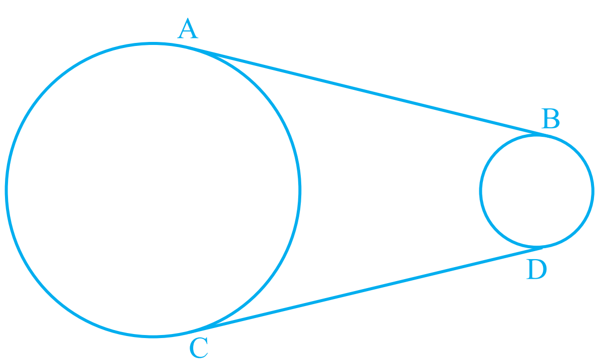
1. दो संकेंद्रीय वृत्तों में से बाहरी वृत्त की त्रिज्या 5 cm है तथा इसकी 8 cm लंबी जीवा AC आंतरिक वृत्त की स्पर्श रेखा है। आंतरिक वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. केंद्र O वाले एक वृत्त पर एक बाहरी बिंदु से दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि QORP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

3. यदि केंद्र O वाले एक वृत्त के एक बाहरी बिंदु B से दो स्पर्श रेखाएँ BC और BD इस प्रकार खींची जाएँ कि $\angle DBC = 120°$ है, तो सिद्ध कीजिए कि BC + BD = BO है, अर्थात् BO = 2BC है।

4. सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त का केंद्र इन रेखाओं से बने कोण के समद्विभाजक पर स्थित होता है।

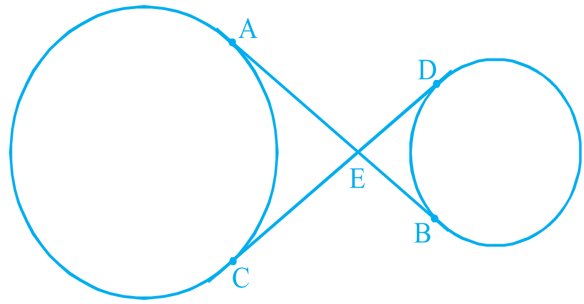
5. आकृति 9.13 में, AB और CD असमान त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि AB = CD हैं।



आकृति 9.13

6. उपरोक्त प्रश्न 5 में, यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

7. आकृति 9.14 में, दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ AB और CD परस्पर बिंदु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।



आकृति 9.14

8. एक वृत्त की जीवा PQ, बिंदु R पर इस वृत्त की स्पर्श रेखा के समांतर है। सिद्ध कीजिए कि बिंदु R चाप PRQ को सम- द्विभाजित करता है।

9. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की एक जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ उस जीवा से बराबर कोण बनाती हैं।

10. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त का एक व्यास AB उन सभी जीवाओं को समद्विभाजित करता है, जो बिंदु A से खींची गई वृत्त की स्पर्श रेखा के समांतर हैं।

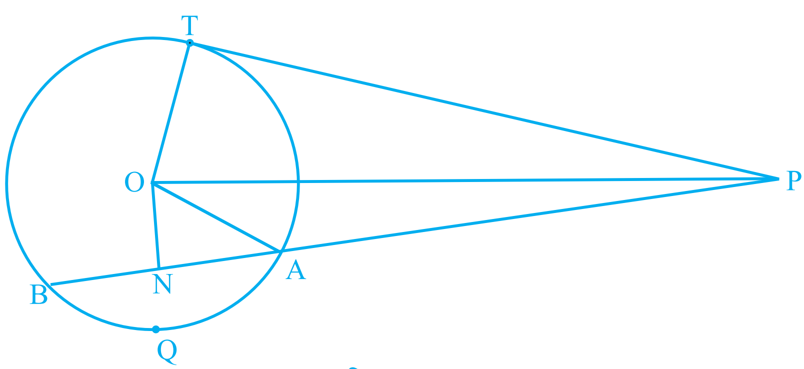
(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.15 में, एक बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले वृत्त की एक स्पर्श रेखा PT खींची गई है और एक रेखाखंड PAB खींचा गया है। ON जीवा AB पर लंब है। सिद्ध कीजिए कि:

(i) $PA.\ PB = PN^2 - AN^2$

(ii) $PN^2 - AN^2 = OP^2 - OT^2$

(iii) $PA.PB = PT^2$



आकृति 9.15

हल :

(i) $PA.\ PB = (PN - AN)\ (PN + BN)$

$= (PN - AN)\ (PN + AN)$ (क्योंकि $AN = BN$)

$= PN^2 - AN^2$

(ii) $PN^2 - AN^2 = (OP^2 - ON^2) - AN^2$ (क्योंकि $ON \perp PN$)

$= OP^2 - (ON^2 + AN^2)$

$= OP^2 - OA^2$ (क्योंकि $ON \perp AN$)

$= OP^2 - OT^2$ (क्योंकि $OA = OT$)

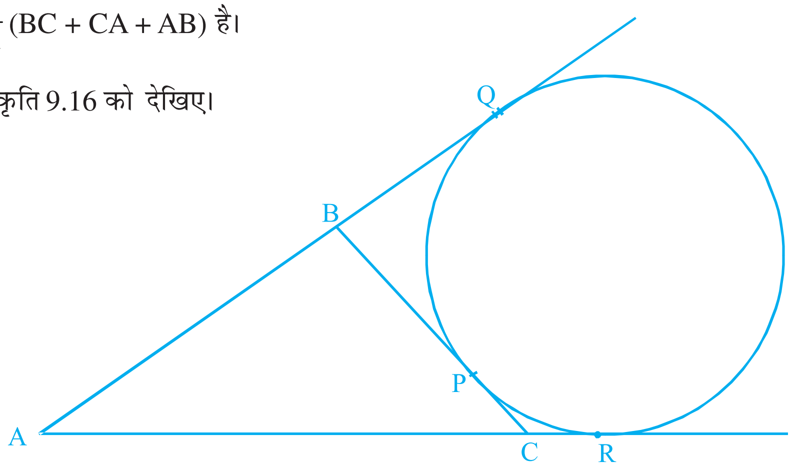
(iii) (i) और (ii) से,

$PA.PB = OP^2 - OT^2$

$= PT^2$ (क्योंकि $\angle OTP = 90°$)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि कोई वृत्त एक त्रिभुज ABC की भुजा BC को बिंदु P पर स्पर्श करता है तथा बढ़ाई गई भुजाओं AB और AC को क्रमशः Q और R पर स्पर्श करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $AQ = \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$ है।

हल : आकृति 9.16 को देखिए।



आकृति 9.16

पाठ्यपुस्तक की प्रमेय 10.2 से,

$BQ = BP$

$CP = CR$, और

$AQ = AR$

अब, $$2AQ = AQ + AR$$
$$= (AB + BQ) + (AC + CR)$$
$$= AB + BP + AC + CP$$
$$= (BP + CP) + AC + AB$$
$$= BC + CA + AB$$

अर्थात् $$AQ = \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$$

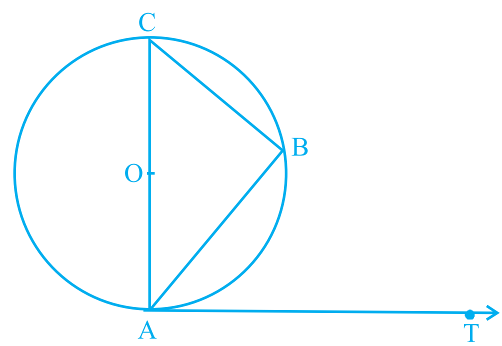
प्रश्नावली 9.4

1. यदि एक षड्भुज ABCDEF एक वृत्त के परिगत है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB + CD + EF = BC + DE + FA$ है।

2. मान लीजिए कि s उस त्रिभुज ABC के अर्ध-परिमाप को व्यक्त करता है, जिसमें $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ है। यदि एक वृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमश: D, E और F पर स्पर्श करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = s - b$ है।

3. एक बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची जाती हैं। वृत्त के एक बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा खींची जाती है, जो PA और PB को क्रमश: D और E पर प्रतिच्छेद करती है। यदि PA = 10 cm है, तो त्रिभुज PCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।

4. यदि केंद्र O वाले वृत्त की AB एक जीवा है, AOC एक व्यास है तथा AT बिंदु A पर खींची गई स्पर्श रेखा है, जैसा कि आकृति 9.17 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAT = \angle ACB$ है।



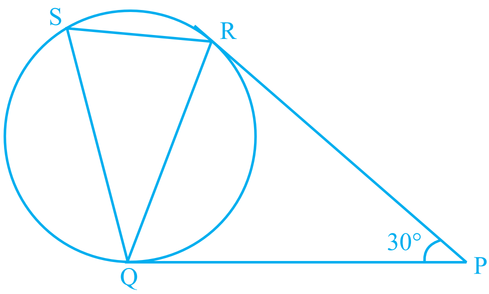
आकृति 9.17

5. केंद्रों O और O′ वाले तथा क्रमश: त्रिज्याओं 3 cm और 4 cm वाले दो वृत्त परस्पर बिंदुओं P और Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OP और O′P दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ हैं। उभयनिष्ठ जीवा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

6. एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle B = 90°$ है, AB को व्यास मान कर एक वृत्त खींचा गया है, जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P पर वृत्त की स्पर्श रेखा BC को समद्विभाजित करती है।

7. आकृति 9.18 में, एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR इस प्रकार खींची गई हैं कि $\angle RPQ = 30°$ है। एक जीवा RS स्पर्श रेखा PQ के समांतर खींची जाती है। $\angle RQS$ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** Q से होकर जाती हुई QP पर एक लंब रेखा खींचिए।]

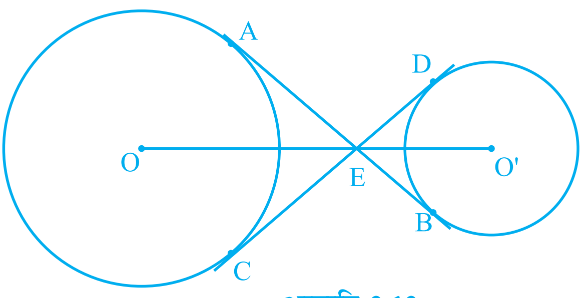


आकृति 9.18

8. केंद्र O वाले किसी वृत्त का AB एक व्यास है और AC एक जीवा इस प्रकार है कि $\angle BAC = 30°$ है। C पर वृत्त की स्पर्श रेखा बढ़ाई गई AB को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि BC = BD है।

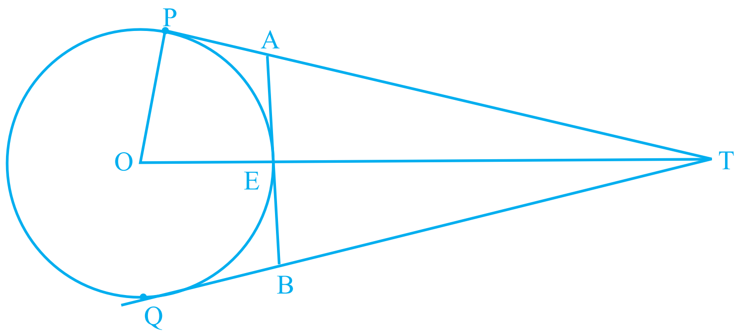
9. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के एक चाप के मध्य-बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा उस चाप के सिरों को मिलाने वाली जीवा के समांतर होती है।

10. आकृति 9.19 में, केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ AB और CD परस्पर E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि बिंदु O, E, O′ संरेखी हैं।



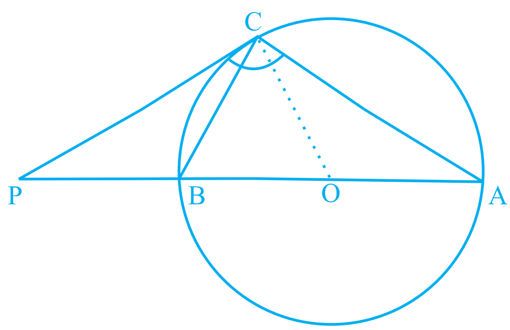
आकृति 9.19

11. आकृति 9.20 में, O त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त का केंद्र है, T एक बिंदु इस प्रकार है कि OT = 13 cm है तथा OT वृत्त को E पर प्रतिच्छेद करती है। यदि AB, बिंदु E पर वृत्त की एक स्पर्श रेखा है तो AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.20

12. किसी वृत्त की बिंदु C पर खींची गई स्पर्श रेखा और व्यास AB बढ़ाने पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle PCA = 110^o$ है, तो $\angle CBA$ ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 9.21)।



आकृति 9.21

[**संकेत:** बिंदु C को केंद्र O से मिलाइए।]

13. यदि त्रिज्या 9 cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचा गया है, जिसमें AB = AC = 6 cm है, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. केंद्र O और त्रिज्या 5 cm वाले एक वृत्त के केंद्र से 13 cm की दूरी पर एक बिंदु A है। AP और AQ क्रमशः बिंदुओं P और Q पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि लघु चाप PQ पर स्थित एक बिंदु R पर एक स्पर्श रेखा BC ऐसी खींची जाए, जो AP को B और AQ को C पर प्रतिच्छेद करे, तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

अध्याय 10

रचनाएँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक रेखाखंड का आंतरिक रूप से एक दिये हुए अनुपात में विभाजन।
- एक दिये हुए त्रिभुज के समरूप एक दिये हुए स्केल गुणक के अनुसार त्रिभुज की रचना करना, जहाँ स्केल गुणक 1 से छोटा हो सकता है या 1 से बड़ा भी हो सकता है।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं के एक युग्म की रचना करना।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक रेखाखंड AB को $p : q$ के अनुपात में विभाजित करने के लिए (यहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक हैं), एक किरण AX खींचिए ताकि ∠BAX एक न्यून कोण हो। फिर किरण AX पर समान दूरियों पर इतने बिंदु अंकित कीजिए कि इन बिंदुओं की न्यूनतम संख्या हो

(A) p और q में से बड़ी (B) $p + q$

(C) $p + q - 1$ (D) pq

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का ऐसा युग्म खींचने के लिए कि उनके बीच का कोण 35° हो, उन दो त्रिज्याओं के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचनी चाहिए, जिनके बीच का कोण हो

(A) 105° (B) 70° (C) 140° (D) 145°

हल: उत्तर (D)

प्रश्नावली 10.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. एक रेखाखंड AB को 5:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, पहले एक किरण AX खींचिए, ताकि $\angle$BAX एक न्यून कोण हो और फिर किरण AX पर समान दूरियों पर बिंदु अंकित किये जाएँ ताकि इनकी न्यूनतम संख्या हो

(A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 12

2. एक रेखाखंड AB को 4:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, पहले एक किरण AX इस प्रकार खींची जाती है कि $\angle$BAX एक न्यून कोण हो और फिर किरण AX पर समान दूरियों पर बिंदु A_1, A_2, A_3, ... अंकित किये जाते हैं और बिंदु B को निम्नलिखित से मिलाया जाता है

(A) A_{12} (B) A_{11} (C) A_{10} (D) A_9

3. एक रेखाखंड AB को 5 : 6 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, एक किरण AX खींचिए ताकि $\angle$BAX एक न्यून कोण हो, फिर किरण BY किरण AX के समांतर विपरीत दिशा में खींचिए। इसके बाद AX और BY किरणों पर क्रमशः समान दूरियों पर बिंदु A_1, A_2, A_3, ... और B_1, B_2, B_3, ... अंकित किये जाएँ। फिर जिन बिंदुओं को मिलाया जाता है वे हैं

(A) A_5 और B_6 (B) A_6 और B_5 (C) A_4 और B_5 (D) A_5 और B_4

4. एक दिये हुए त्रिभुज ABC के समरूप एक ऐसा त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{3}{7}$ हों, पहले एक किरण BX ऐसी खींचिए कि $\angle$CBX एक न्यून कोण हो और X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर हो। किरण BX पर अब समान दूरियों पर बिंदु B_1, B_2, B_3, ... अंकित कीजिए तथा उसके बाद अगला चरण मिलाने का है

(A) B_{10} को C से (B) B_3 को C से (C) B_7 को C से (D) B_4 को C से

5. एक दिये हुए त्रिभुज ABC के समरूप एक ऐसा त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{8}{5}$ हों, पहले एक किरण BX ऐसी खींचिए कि $\angle$CBX एक न्यून कोण हो और X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर हो। किरण BX पर अब समान दूरियों पर अंकित किये जाने वाले बिंदुओं की न्यूनतम संख्या है

(A) 5 (B) 8 (C) 13 (D) 3

6. किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक ऐसा युग्म खींचने के लिए कि उनके बीच का कोण 60° हों, उन दो त्रिज्याओं के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचनी चाहिए जिनके बीच का कोण हो

(A) 135° (B) 90° (C) 60° (D) 120°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का कारण दीजिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : ज्यामितीय रचना से, एक दिये हुए रेखाखंड को $2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ के अनुपात में विभाजित करना संभव है।

हल : असत्य। क्योंकि $2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ को सरल करने पर, $7+4\sqrt{3}:1$ प्राप्त होता है। यहाँ $7+4\sqrt{3}$ एक धनात्मक पूर्णांक नहीं है, जबकि 1 है।

प्रश्नावली 10.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का कारण दीजिए :

1. ज्यामितीय रचना से, एक दिये हुए रेखाखंड को $\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}$ के अनुपात में विभाजित किया जा सकता है।

2. एक दिये हुए त्रिभुज के समरूप एक ऐसे त्रिभुज की रचना करने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{7}{3}$ हों, BC से एक न्यून कोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए, ताकि X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर स्थित हो। BX पर समान दूरियों पर बिंदु B_1, B_2, ..., B_7 अंकित कीजिए, B_3 को C से मिलाइए और फिर B_3C के समांतर एक रेखाखंड B_6C' खींचा जाता है,जबकि बिंदु C' बढ़ाई गयी भुजा BC पर स्थित है। अंत में, AC के समांतर रेखाखंड $A'C'$ खींचा जाता है।

3. त्रिज्या 3.5 cm वाले वृत्त के केंद्र से 3 cm की दूरी पर स्थित एक बिंदु P से उस वृत्त की स्पर्श रेखाओं के एक युग्म की रचना की जा सकती है।

4. किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं के एक ऐसे युग्म की रचना की जा सकती है कि जिनके बीच का कोण 170° हो।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक समबाहु त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी प्रत्येक भुजा 4 cm हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका स्केल गुणक $\frac{3}{5}$ हो। क्या नया त्रिभुज भी एक समबाहु त्रिभुज है?

हल : कक्षा X की गणित की पाठ्यपुस्तक में दिये हुए चरणों का अनुसरण कीजिए। हाँ, नया त्रिभुज भी समबाहु है।

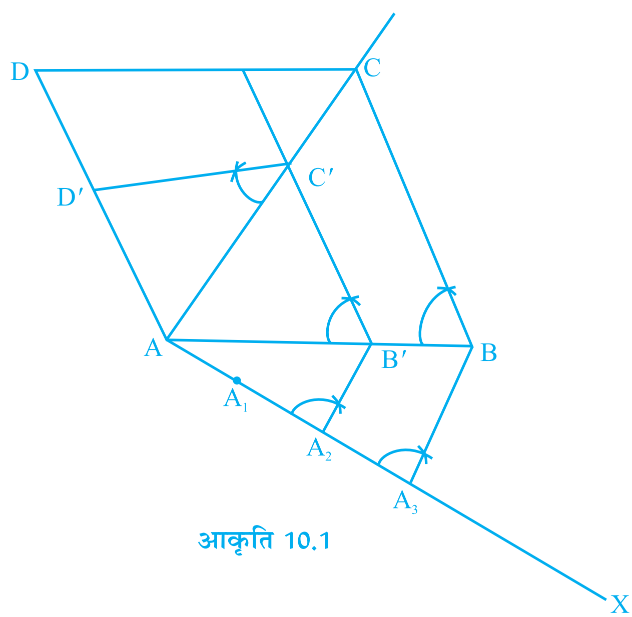
प्रश्नावली 10.3

1. लंबाई 7 cm का एक रेखाखंड खींचिए। इस पर स्थित एक बिंदु P ज्ञात कीजिए जो इस रेखाखंड को 3:5 के अनुपात में विभाजित करे।

2. एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 12 cm, AB = 5 cm और $\angle B = 90°$ है। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ हो। क्या नया त्रिभुज भी एक समकोण त्रिभुज है?

3. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 6 cm, CA = 5 cm और AB = 4 cm है। इस त्रिभुज के समरूप और स्केल गुणक $\frac{5}{3}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

4. एक 4 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर उस बिंदु से एक स्पर्श रेखा खींचिए, जो इस वृत्त के केंद्र से 6 cm की दूरी पर है।



आकृति 10.1

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक समचतुर्भुज ABCD दिया है, जिसमें AB = 4 cm और $\angle ABC = 60°$ है। इसे दो त्रिभुजों ABC और ADC में विभाजित कीजिए। मान लीजिए, ΔABC के समरूप एक त्रिभुज $AB'C'$ की रचना कीजिए, जिसका स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ हो। एक रेखाखंड C'D' की रचना कीजिए, जो CD के समांतर हो, जहाँ D' भुजा AD पर स्थित है। क्या AB'C'D' भी एक समचतुर्भुज है? कारण दीजिए।

हल : पहले एक समचतुर्भुज ABCD खींचिए, जिसमें AB = 4 cm और $\angle ABC = 60°$ हो, जैसा आकृति 10.1 में दर्शाया गया है। AC को मिलाइए। त्रिभुज ABC के समरूप स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ वाले एक त्रिभुज AB'C' की रचना कीजिए, जैसा कि कक्षा X की गणित की पाठ्यपुस्तक में वर्णित है (देखिए आकृति 10.1)।

अंत में $C'D'$ भुजा CD के समांतर खींचिए।

अब $$\frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{A'C'}{AC}$$

साथ ही, $$\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{AD'}{AD} = \frac{2}{3}$$

अत: $AB' = B'C' = C'D' = AD' = \frac{2}{3}AB$

अर्थात्, $AB'C'D'$ एक समचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 10.4

1. दो रेखाखंडों AB और AC के बीच का कोण 60° है, जहाँ AB = 5 cm और AC = 7 cm है। AB और AC पर क्रमशः बिंदु P और Q इस प्रकार निर्धारित कीजिए कि $AP = \frac{3}{4}AB$ और $AQ = \frac{1}{4}AC$ हो। P और Q को मिलाइए तथा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए, जिसमें BC = 5 cm, AB = 3 cm और $\angle ABC = 60°$ है। विकर्ण BD द्वारा इसे दो त्रिभुजों BCD और ABD में विभाजित कीजिए। ΔBDC के समरूप स्केल गुणक $\frac{4}{3}$ के एक त्रिभुज $BD'C'$ की रचना कीजिए। DA के समांतर $D'A'$ खींचिए, जहाँ A' बढ़ाई गयी भुजा BA पर स्थित है। क्या $A'BC'D'$ भी एक समांतर चतुर्भुज है?

3. त्रिज्याओं 3 cm और 5 cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्त खींचिए। बाहरी वृत्त पर एक बिंदु लेकर उससे दूसरे वृत्त की स्पर्श रेखाओं के युग्म की रचना कीजिए। एक स्पर्श रेखा की लंबाई मापिये तथा वास्तविक परिकलन से इसका सत्यापन कीजिए।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = AC = 6 cm और BC = 5 cm है। ΔABC के समरूप, एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 8 cm हो। अपनी रचना का औचित्य भी दीजिए।

5. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 5 cm, BC = 6 cm और $\angle ABC = 60°$ है। ΔABC के समरूप, स्केल गुणक $\frac{5}{7}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए। रचना का औचित्य दीजिए।

6. त्रिज्या 4 cm का एक वृत्त खींचिए। इस पर स्पर्श रेखाओं के एक ऐसे युग्म की रचना कीजिए कि इनके बीच का कोण 60° हो। रचना का औचित्य भी दीजिए। वृत्त के केंद्र और स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु के बीच की दूरी को मापिये।

7. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 4 cm, BC = 6 cm और AC = 9 cm है। इस ΔABC के समरूप, स्केल गुणक $\frac{3}{2}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए। रचना का औचित्य दीजिए क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों त्रिभुजों में तीनों कोण और दो भुजाएँ बराबर हैं।

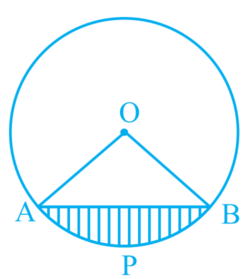
अध्याय 11

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

सरल बंद आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल। वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल। वृत्ताकार पथ (अर्थात् एक वलय) का क्षेत्रफल। वृत्त का त्रिज्यखंड और उसका केंद्रीय कोण–दीर्घ और लघु त्रिज्यखंड। वृत्तखंड–दीर्घ और लघु वृत्तखंड।

- वृत्त की परिधि $= 2\,\pi\, r$ और वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\, r^2$ होता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
- त्रिज्याओं r_1 और r_2 $(r_1 > r_2)$ वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों से बनने वाले वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल $\pi\, r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$ होता है।
- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल, जिसका केंद्रीय कोण θ है, $\frac{\theta}{360} \times \pi\, r^2$ होता है, जहाँ θ को डिग्री (अंशों) में मापा गया है।
- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड के चाप की लंबाई, जिसका केंद्रीय कोण θ है, $\frac{\theta}{360} \times 2\,\pi\, r$ होती है, जहाँ θ को डिग्री (अंशों) में मापा गया है।
- आकृति 11.1 में दिये लघु वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल $- \Delta$ OAB का क्षेत्रफल।
- त्रिज्या r वाले एक दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\pi\, r^2 -$ संगत लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल होता है।



आकृति 11.1

- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल πr^2 – संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल होता है।

टिप्पणी: जब तक अन्यथा न कहा जाये, π का मान $\frac{22}{7}$ लिया जायेगा।

(B) बहुविकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 154 cm^2 है, तो उसका परिमाप है

(A) 11 cm (B) 22 cm (C) 44 cm (D) 55 cm

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का कोण (डिग्री में) θ है, त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ (B) $\frac{\pi r^2 \theta}{180}$ (C) $\frac{2\pi r \theta}{360}$ (D) $\frac{2\pi r \theta}{180}$

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 11.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि R_1 और R_2 वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग त्रिज्या R वाले वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1^2 + R_2^2 = R^2$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) $R_1^2 + R_2^2 < R^2$

2. यदि R_1 और R_2 त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की परिधियों का योग त्रिज्या R वाले एक वृत्त की परिधि के बराबर हो, तो

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) R_1, R_2 और R के बीच संबंध के बारे में निश्चित रूप से कुछ नहीं कहा जा सकता।

3. यदि एक वृत्त की परिधि और एक वर्ग का परिमाप बराबर है, तो

(A) वृत्त का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

(B) वृत्त का क्षेत्रफल > वर्ग का क्षेत्रफल

(C) वृत्त का क्षेत्रफल < वर्ग का क्षेत्रफल

(D) वृत्त और वर्ग के क्षेत्रफलों के बीच के संबंध में निश्चित रूप से कुछ नहीं कहा जा सकता।

4. त्रिज्या r के एक अर्धवृत्त के अंतर्गत खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) r^2 (B) $\frac{1}{2}r^2$ (C) $2r^2$ (D) $\sqrt{2}\,r^2$

5. यदि एक वृत्त का परिमाप एक वर्ग के परिमाप के बराबर है, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 22 : 7 (B) 14 : 11 (C) 7 : 22 (D) 11: 14

6. किसी स्थान पर 16 m और 12 m व्यास वाले दो वृत्ताकार पार्कों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल का एक अकेला वृत्ताकार पार्क बनाने का प्रस्ताव है। नये पार्क की त्रिज्या होगी

(A) 10 m (B) 15 m (C) 20 m (D) 24 m

7. भुजा 6 cm वाले एक वर्ग के अंतर्गत खीचे जा सकने वाले वृत्त का क्षेत्रफल है

(A) 36π cm² (B) 18π cm² (C) 12π cm² (D) 9π cm²

8. त्रिज्या 8 cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत खींचे जा सकने वाले वर्ग का क्षेत्रफल है

(A) 256 cm² (B) 128 cm² (C) $64\sqrt{2}$ cm² (D) 64 cm²

9. व्यासों 36 cm और 20 cm वाले दो वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर परिधि वाले एक वृत्त की त्रिज्या है

(A) 56 cm (B) 42 cm (C) 28 cm (D) 16 cm

10. त्रिज्याओं 24 cm और 7 cm वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल वाले एक वृत्त का व्यास है

(A) 31 cm (B) 25 cm (C) 62 cm (D) 50 cm

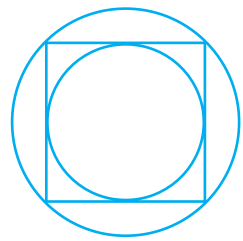
(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : क्या निम्नलिखित कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल

हल : कथन सत्य नहीं है। यह केवल लघु वृत्तखंड के लिए ही सत्य है। दीर्घ वृत्तखंड के क्षेत्रफल के लिए संगत त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल में त्रिभुज का क्षेत्रफल जोड़ना पड़ेगा।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 11.2 में, भुजा 5 cm वाले एक वर्ग के अंतर्गत एक वृत्त खींचा गया है तथा इस वर्ग के परिगत एक अन्य वृत्त खींचा गया है। क्या यह सत्य है कि बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल आंतरिक वृत्त के क्षेत्रफल का दुगुना है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।



आकृति 11.2

हल : यह कथन सत्य है, क्योंकि आंतरिक वृत्त का व्यास 5 cm है तथा बाहरी वृत्त का व्यास = वर्ग का विकर्ण = $5\sqrt{2}$ cm है।

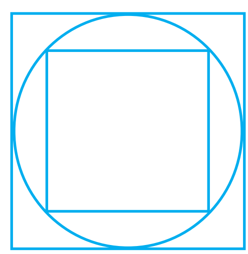
अत:, $A_1 = \pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ और $A_2 = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$, जिससे अनुपात $\frac{A_1}{A_2} = 2$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 11.2

1. क्या भुजा a cm वाले वर्ग के अंतर्गत खींचे गये वृत्त का क्षेत्रफल πa^2 cm^2 होता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

2. क्या यह कहना सत्य होगा कि त्रिज्या a cm वाले एक वृत्त के परिगत वर्ग का परिमाप 8 cm है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

3. आकृति 11.3 में, व्यास d वाले एक वृत्त के अंतर्गत एक वर्ग खींचा गया है तथा एक अन्य वर्ग इसी वृत्त के परिगत है। क्या बाहरी वर्ग का क्षेत्रफल आंतरिक वर्ग के क्षेत्रफल का चार गुना है? उपने उत्तर का कारण दीजिए।



आकृति 11.3

4. क्या यह कहना सत्य है कि एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल संगत त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल से कम होता है? क्यों?

5. क्या यह कहना सत्य है कि व्यास d cm वाले एक वृत्ताकार पहिए द्वारा एक परिभ्रमण में चली गयी दूरी $2\pi d$ cm होती है? क्यों?

6. s मीटर की दूरी चलने के लिए, त्रिज्या r मीटर वाला एक वृत्ताकार पहिया $\frac{s}{2\pi r}$ चक्कर लगाता है। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

7. एक वृत्त के क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान उसकी परिधि के संख्यात्मक मान से अधिक होता है। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

8. यदि त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक चाप की लंबाई त्रिज्या $2r$ वाले एक वृत्त के चाप की लंबाई के बराबर हो, तो पहले वृत्त के संगत त्रिज्यखंड का कोण दूसरे वृत्त के संगत त्रिज्यखंड के कोण का दोगुना होता है? क्या यह कथन असत्य है? क्यों?

9. दो भिन्न वृत्तों के बराबर लंबाइयों वाले चापों के संगत त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

10. दो भिन्न वृत्तों के दो त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन त्रिज्यखंडों के संगत चापों की लंबाइयाँ बराबर होंगी? क्यों?

11. क्या लंबाई a cm और चौड़ाई b cm ($a > b$) वाले एक आयत के अंदर खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल πb^2 cm^2 है? क्यों?

12. दो वृत्तों की परिधियाँ बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन वृत्तों के क्षेत्रफल भी बराबर हों? क्यों?

13. दो वृत्तों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन वृत्तों की परिधियाँ भी बराबर हों? क्यों?

14. क्या यह कहना सत्य है कि व्यास p cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत वर्ग का क्षेत्रफल p^2 cm^2 है? क्यों?

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : उस वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 20 cm और 48 cm व्यास वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल : यहाँ पहले वृत्त की त्रिज्या $r_1 = \frac{20}{2}$ cm = 10 cm तथा

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r_2 = \frac{48}{2}$ cm = 24 cm है।

अत:, इनके क्षेत्रफलों का योग $= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (10)^2 + \pi (24)^2 = \pi \times 676$ ...(1)

मान लीजिए नये वृत्त की त्रिज्या r cm है। अत:, इसका क्षेत्रफल $= \pi r^2$ ...(2)

इसलिए, (1) और (2) से,

$$\pi r^2 = \pi \times 676$$

या $r^2 = 676$

अर्थात् $r = 26$

अत:, नये वृत्त की त्रिज्या = 26 cm

अत:, नये वृत्त का व्यास = 2×26 cm = 52 cm

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक 21 cm त्रिज्या वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केंद्रीय कोण 120° है।

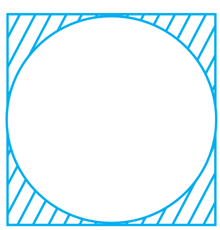
हल: त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 21 \text{ cm}^2$$

$$= 462 \text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 11.4 में, त्रिज्या 7.5 cm वाला एक वृत्त एक वर्ग के अंतर्गत खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।



आकृति 11.4

हल: वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= 3.14 \times (7.5)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 176.625 \text{ cm}^2$$

स्पष्टत:, वर्ग की भुजा = वृत्त का व्यास = 15 cm

अत:, वर्ग का क्षेत्रफल $= 15^2 \text{cm}^2 = 225 \text{ cm}^2$

इसलिए, छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= 225 \text{ cm}^2 - 176.625 \text{ cm}^2 = 48.375 \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : एक 36 cm त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $54\,\pi \text{ cm}^2$ है। इस त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि केंद्रीय कोण (डिग्री में) θ है।

अत:
$$\frac{\pi \times (36)^2 \theta}{360} = 54\,\pi$$

या
$$\theta = \frac{54 \times 360}{36 \times 36} = 15$$

अब, संगत चाप की लंबाई $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{15}{360} \times 2\pi \times 36 \text{ cm}$$

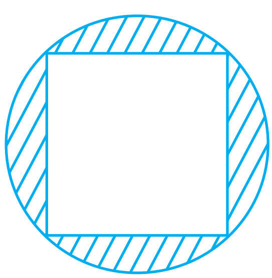
$$= 3\,\pi \text{ cm}$$

प्रश्नावली 11.3

1. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि त्रिज्याओं 15 cm और 18 cm वाले दो वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

2. आकृति 11.5 में, विकर्ण 8 cm वाला एक वर्ग एक वृत्त के अंतर्गत है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. त्रिज्या 28 cm वाले एक वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केंद्रीय कोण 45° है।

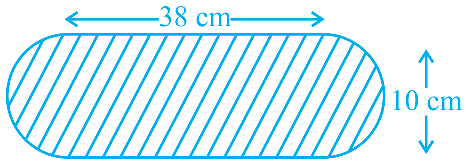


आकृति 11.5

4. एक मोटर साइकिल के पहिये की त्रिज्या 35 cm है। 66 km/h की चाल रखने के लिए, पहिये को प्रति मिनट कितने चक्कर लगाने चाहिए?

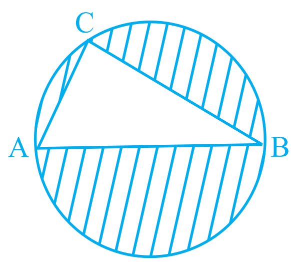
5. विमाओं $20\text{m} \times 16\text{m}$ वाले एक आयताकार खेत के कोने पर एक गाय 14m लंबी रस्सी से बँधी हुई है। खेत का वह क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें गाय चर सकती है।

6. आकृति 11.6 में दर्शायी गयी फूलों की क्यारी (अर्धवृत्ताकार सिरों वाली) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



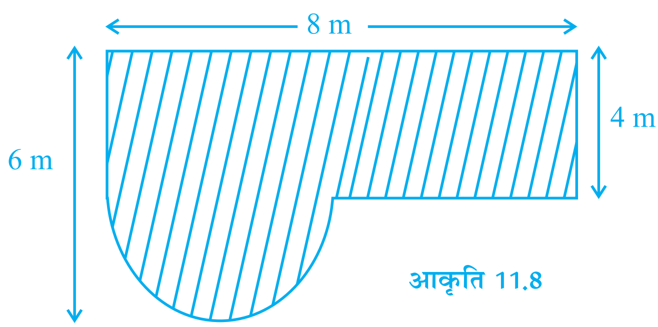
आकृति 11.6

7. आकृति 11.7 में, AB वृत्त का व्यास है, AC = 6 cm और BC = 8 cm है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।



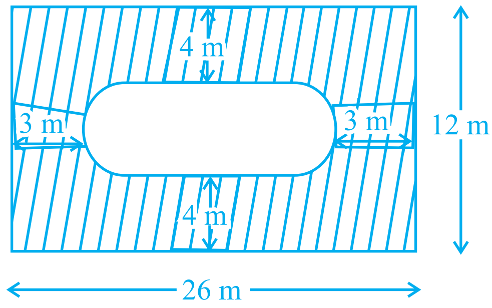
आकृति 11.7

8. आकृति 11.8 में दर्शाये गये छायांकित खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.8

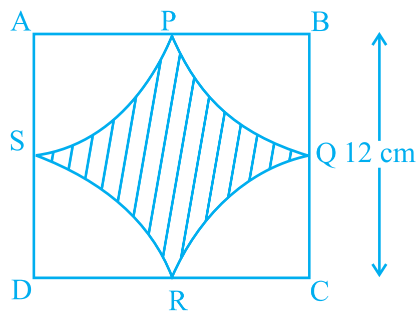
9. आकृति 11.9 में, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.9

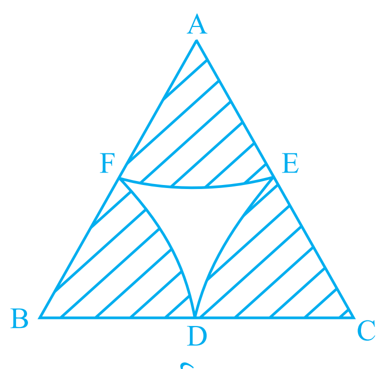
10. त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त के लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके संगत त्रिज्यखंड का कोण 60° है।

11. आकृति 11.10 में, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ A, B, C और D को केंद्र मान कर खींचे गये चाप युग्म में वर्ग ABCD की क्रमश: AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिंदुओं P, Q, R और S पर प्रतिच्छेद करते हैं ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।



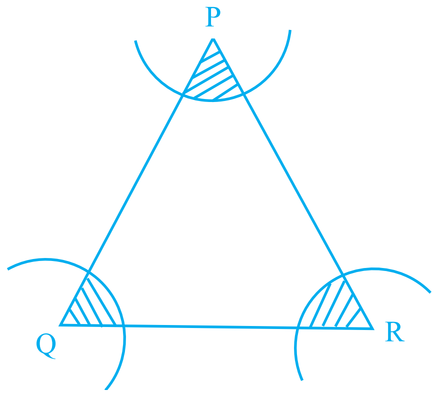
आकृति 11.10

12. आकृति 11.11 में, 10 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों A, B और C को केंद्र लेकर चाप खींचे गये हैं, जो परस्पर क्रमश: BC, CA और AB के मध्य बिंदुओं D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।



आकृति 11.11

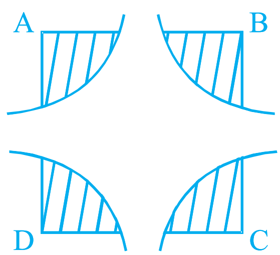
13. आकृति 11.12 में, 14 cm की त्रिज्याएँ लेकर तथा P, Q और R को केंद्र मान कर चाप खींचे गये हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.12

14. एक वृत्ताकार पार्क के अनुदिश बाहर की ओर 21 m चौड़ी एक सड़क है। यदि पार्क की त्रिज्या 105 m है, तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. आकृति 11.13 में, चतुर्भुज ABCD के A, B, C और D शीर्षों को केंद्र मानकर और 21 cm की त्रिज्या लेकर चाप खींचे गये हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



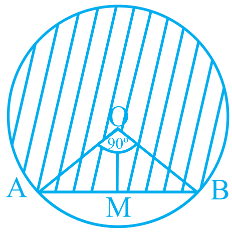
आकृति 11.13

16. एक 20 cm लंबे तार के टुकड़े को मोड़कर एक वृत्त का चाप बनाया गया है, जो इस वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : व्यास 20 cm वाले वृत्त की एक जीवा उसके केंद्र पर 90° का कोण बनाती है। इस वृत्त के संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

हल : मान लीजिए कि A B केंद्र O और 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा है (देखिए आकृति 11.14)।



आकृति 11.14

यहाँ, $\angle AOB = 90°$ है तथा हमें दीर्घ वृत्तखंड (जो छायांकित है) का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। क्योंकि $\angle AOB = 90°$ है, इसलिए दीर्घ त्रिज्यखंड का कोण $= 360° - 90° = 270°$ है।

अत:, दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{270}{360} \times \pi \times (10)^2\ \text{cm}^2$

$$= \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100\ \text{cm}^2$$

$$= 75 \times 3.14\ \text{cm}^2 = 235.5\ \text{cm}^2$$

अब, Δ OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ खींचिए।

अब, $AM = \frac{1}{2}$ A B और $\angle AOM = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$.

अब, $\frac{AM}{OA} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अत:, $AM = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ cm

इसलिए, $AB = 10\sqrt{2}$ cm तथा $OM = OA \cos 45° = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\text{cm} = 5\sqrt{2}$ cm

अत:, Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}\ \text{cm}^2 = 50\ \text{cm}^2$$

इसलिए, वाँछित दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= 235.5\ \text{cm}^2 + 50\ \text{cm}^2 = 285.5\ \text{cm}^2$$

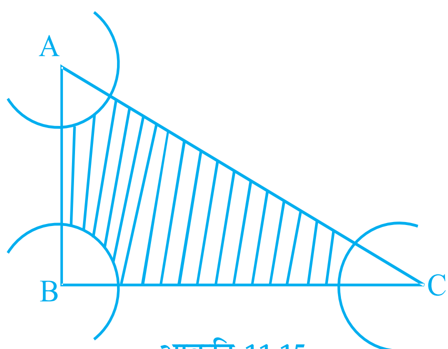
Δ OAB के क्षेत्रफल के लिए अन्य विधि:

क्योंकि $\angle AOB = 90°$ है, इसलिए

$$\Delta\ OAB \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\ OA \times OB$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\ \text{cm}^2 = 50\ \text{cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक त्रिभुज ABC के A, B और C शीर्षों को केंद्र मानकर तथा त्रिज्याएँ 5 cm लेकर आकृति 11.15 में दर्शाए अनुसार चाप खींचे गये हैं। यदि AB = 14 cm, BC = 48 cm और CA = 50 cm है, तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)



आकृति 11.15

हल : कोण A वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\angle A}{360°} \times \pi r^2 = \frac{\angle A}{360°} \times \pi \times (5)^2\ \text{cm}^2$$

कोण B वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\angle B}{360°} \times \pi r^2 = \frac{\angle B}{360°} \times \pi \times (5)^2\ \text{cm}^2$$

तथा कोण C वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ cm}^2$

अत:, तीनों त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों (cm^2 में) का योग

$$= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2$$

$$= \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} \times 25\,\pi$$

$$= \frac{180^\circ}{360^\circ} \times 25\,\pi \quad (\text{क्योंकि } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ)$$

$$= 25 \times \frac{\pi}{2} = 25 \times 1.57 = 39.25$$

अब, Δ ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम ज्ञात करते हैं:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{48+50+14}{2} \text{ cm} = 56 \text{ cm}$$

हीरोन के सूत्र द्वारा,

$$\text{ar (ABC)} = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$= \sqrt{56 \times 8 \times 6 \times 42} \text{ cm}^2$$

$$= 336 \text{ cm}^2$$

अत: छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल – तीनों त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$$= (336 - 39.25) \text{ cm}^2 = 296.75 \text{ cm}^2$$

ar (ABC) के लिए वैकल्पिक विधि

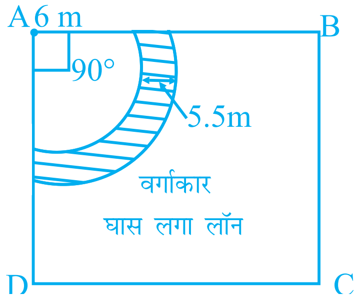
यहाँ $AB^2 + BC^2 = (14)^2 + (48)^2 = 2500 = (50)^2 = (CA)^2$

अत:, $\angle B = 90^\circ$ है। (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

इसलिए, $\text{ar (ABC)} = \frac{1}{2} \text{ AB} \times \text{BC} = \frac{1}{2} \times 14 \times 48 \text{ cm}^2 = 336 \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : भुजा 20 m वाले एक वर्गाकार घास लगे लॉन ABCD के एक कोने पर 6m लंबी एक रस्सी से एक बछड़ा बँधा हुआ है। यदि रस्सी की लंबाई 5.5 m बढ़ा ली जाये, तो लॉन के उस क्षेत्रफल में वृद्धि ज्ञात कीजिए, जिसमें बछड़ा घास चर सकता है।

हल : मान लीजिए कि वर्गाकार लॉन के कोने A पर बछड़ा बँधा हुआ है (देखिए आकृति 11.16)।



आकृति 11.16

तब, क्षेत्रफल में वृद्धि = केंद्रीय कोण 90° वाले और त्रिज्याओं 11.5 m (= 6 m + 5.5 m) और 6 m वाले त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों का अंतर, जो आकृति में छायांकित दर्शाया गया है।
अतः, क्षेत्रफल में वाँछित वृद्धि

$$= \left[\frac{90}{360} \times \pi \times 11.5^2 - \frac{90}{360} \pi \times 6^2\right] \text{m}^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \times (11.5 + 6)\ (11.5 - 6)\ \text{m}^2$$

$$= \frac{22}{7 \times 4} \times 17.5 \times 5.5\ \text{m}^2$$

$$= 75.625\ \text{m}^2$$

प्रश्नावली 11.4

1. किसी वृत्ताकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 22176 m^2 है। इस मैदान पर 50 रु प्रति मीटर की दर से बाड़ लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

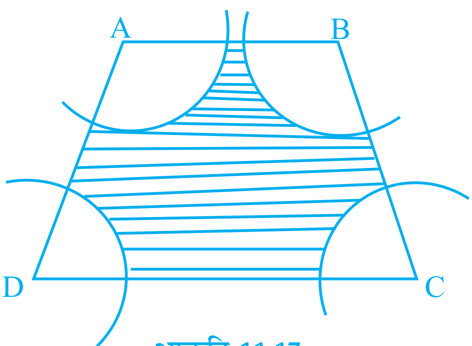
2. किसी ट्रैक्टर के अगले और पिछले पहियों के व्यास क्रमशः 80 cm और 2 m हैं। ज्ञात कीजिए कि पिछले पहिए द्वारा उतनी दूरी तय करने में कितने चक्कर लगाने होंगे, जितनी दूरी अगला पहिया 1400 चक्कर लगाने पर तय करता है।

3. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 15 m, 16 m और 17 m हैं। इस खेत में चरने के लिए, इसके तीनों कोनों से एक गाय, एक भैंस और एक घोड़े को अलग-अलग 7 m लंबी रस्सियों से बाँध दिया गया है। खेत के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें ये तीनों पशु चर नहीं पाएँगे।

4. त्रिज्या 12 cm वाले वृत्त के उस वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके संगत त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण 60° है ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

5. एक वृत्ताकार तालाब का व्यास 17.5 m है। इसके अनुदिश बाहर की ओर 2 m चौड़ा एक पथ बना हुआ है। 25 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इस पथ के निर्माण की लागत ज्ञात कीजिए।

6. आकृति 11.17 में, ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ‖ DC, AB = 18 cm, DC = 32 cm तथा AB और DC के बीच की दूरी = 14 cm है। यदि A, B, C और D को केंद्र मानकर त्रिज्याओं 7 cm के चाप खींचे गये हैं, तो इस आकृति के छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.17

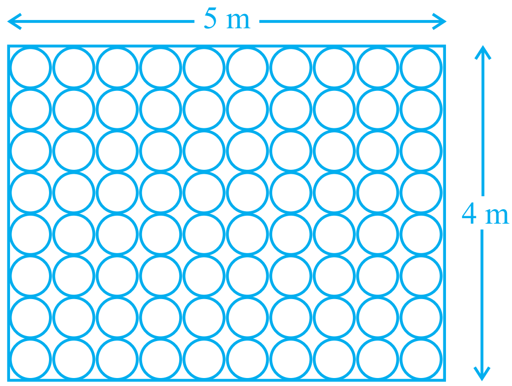
7. बराबर त्रिज्या 3.5 cm वाले तीन वृत्त इस प्रकार खींचे गये हैं कि इनमें से प्रत्येक अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता है। इन वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके संगत चाप की लंबाई 3.5 cm है।

9. बराबर त्रिज्या 7 cm त्रिज्या वाले चार वृत्ताकार गत्ते के टुकड़ों को एक कागज पर इस प्रकार रखा गया है कि प्रत्येक टुकड़ा अन्य दो टुकड़ों को स्पर्श करता है। इन टुकड़ों के बीच में परिबद्ध भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. 784 cm^2 क्षेत्रफल वाले एक वर्गाकार गत्ते की शीट पर, अधिकतम माप की चार सर्वांगसम वृत्ताकार प्लेटें इस प्रकार रखी गयी हैं कि प्रत्येक वृत्ताकार प्लेट अन्य दो प्लेटों को स्पर्श करती है तथा वर्गाकार शीट की प्रत्येक भुजा दो वृत्ताकार प्लेटों को स्पर्श करती है। वर्गाकार शीट के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्ताकार प्लेटों द्वारा ढका नहीं गया है।

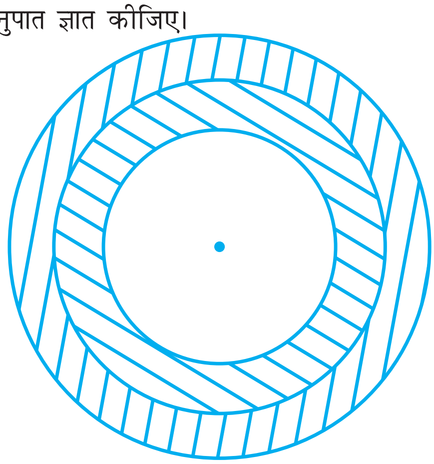
11. किसी कमरे के फर्श की विमाएँ 5 m × 4 m हैं और इस पर वृत्ताकार टाइलें लगायी जाती हैं, जिनमें से प्रत्येक का व्यास 50 cm है, जैसा कि आकृति 11.18 में दर्शाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर टाइल नहीं लगी हैं ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।



आकृति 11.18

12. एक समचतुर्भुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं। इस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त का क्षेत्रफल 1256 cm^2 है ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

13. किसी धनुर्विद्या (या तीरंदाजी) लक्ष्य के तीन क्षेत्र हैं, जो आकृति 11.19 में दर्शाए अनुसार तीन संकेंद्रीय वृत्तों से बने हैं। यदि इन संकेंद्रीय वृत्तों के व्यास 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो इन तीनों क्षेत्रों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



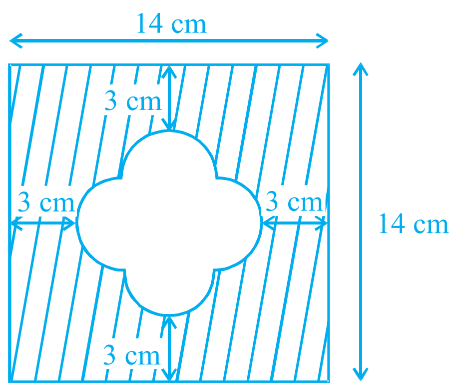
आकृति 11.19

14. एक घड़ी की मिनट वाली सुई की लंबाई 5 cm है। प्रात: 6 : 05 बजे से प्रात: 6 : 40 बजे तक के समय काल में इस सुई द्वारा तय किये गये (या घूमे गये) क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. किसी वृत्त के 200° केंद्रीय कोण वाले एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल 770 cm^2 है। इस त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

16. त्रिज्याओं 7 cm और 21 cm वाले दो वृत्तों के दो त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोण क्रमश: 120° और 40° हैं। इन दोनों त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल तथा साथ ही संगत चापों की लंबाई ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

17. आकृति 11.20 में, दिये छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.20

18. 176 m की दूरी तय करने (घूमने) में, 1.54 m^2 क्षेत्रफल वाले एक वृत्ताकार पहिये द्वारा लगाये जाने वाले चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।

19. वृत्त की उस जीवा द्वारा निर्मित दोनों वृत्तखंडों के क्षेत्रफलों का अंतर ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई 5 cm है और जो केंद्र पर 90° का कोण अंतरित करती है।

20. त्रिज्या 21 cm वाले एक वृत्त के 120° कोण वाले त्रिज्यखंड और उसके संगत दीर्घ त्रिज्यखंड के क्षेत्रफलों का अंतर ज्ञात कीजिए।

अध्याय 12

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- मौलिक ठोसों, अर्थात् घनाभ, शंकु, बेलन, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बनी वस्तु का पृष्ठीय क्षेत्रफल।
- मौलिक ठोसों, अर्थात् घनाभ, शंकु, बेलन, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बनी वस्तु का आयतन।
- शंकु के छिन्नक से संबंधित सूत्र हैं:

  (i) शंकु के छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

  (ii) शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(r_1+r_2)l$

  (iii) ठोस शंकु के छिन्नक का कुल या संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1+r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$, जहाँ

  $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$,

  $h =$ छिन्नक की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई, l = छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई तथा
  r_1 और r_2 छिन्नक के आधारों (सिरों) की त्रिज्याएँ हैं।

- ठोस अर्धगोला : यदि अर्धगोले की त्रिज्या r है, तो वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$,

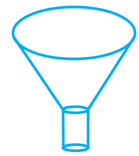
  कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$, तथा आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

- गोलाकार खोल (शेल) का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)$, जहाँ r_1 और r_2 क्रमशः बाहरी और आंतरिक त्रिज्याएँ हैं।

  इस पूरे अध्याय में, जब तक कि अन्यथा न कहा जाये, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :



आकृति 12.1

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक कीप (फनॅल) (आकृति 12.1) निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) शंकु का छिन्नक और एक बेलन

(C) एक अर्धगोला और एक बेलन (D) एक अर्धगोला और एक शंकु

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि पानी से पूरा भरे हुए, त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 6 cm वाले एक बेलनाकार कप में त्रिज्या 2.1 cm का एक कंचा डाला जाये, तो बेलनाकार कप में से कितना पानी बाहर निकल जायेगा?

(A) 38.8 cm^3 (B) 55.4 cm^3 (C) 19.4 cm^3 (D) 471.4 cm^3

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : 22 cm किनारे वाली एक घनाकार आइसक्रीम ब्रिक (ice cream brick) को त्रिज्या 2 cm और ऊँचाई 7 cm वाले आइसक्रीम शंकुओं में पूरी तरह ऊपर तक भर कर, कुछ बच्चों में वितरित किया जाना है। कितने बच्चों को ये आइसक्रीम शंकु प्राप्त हो पाएँगे?

(A) 163 (B) 263 (C) 363 (D) 463

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : ऊँचाई h cm के एक शंकु के छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ r_1 cm और r_2 cm हैं। शंकु के इस छिन्नक का (cm^3 में) आयतन है

(A) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$ (B) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$

(C) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2]$ (D) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2]$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : 4.2 cm किनारे वाले एक घन में से काटे जा सकने वाले सबसे बड़े शंकु का आयतन है

(A) 9.7 cm^3 (B) 77.6 cm^3 (C) 58.2 cm^3 (D) 19.4 cm^3

हल : उत्तर (D)

प्रश्नावली 12.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

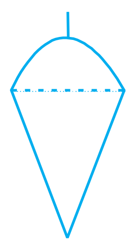
1. एक किनारे पर नुकीली बनायी गयी एक बेलनाकार पेंसिल निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) शंकु का छिन्नक और एक बेलन
(C) एक अर्धगोला और एक बेलन (D) दो बेलन

2. एक सुराही निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक गोला और एक बेलन (B) एक अर्धगोला और एक बेलन
(C) दो अर्धगोले (D) एक बेलन और एक शंकु

3. एक साहुल (देखिए आकृति 12.2) निम्नलिखित का संयोजन है:



आकृति 12.2

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) एक अर्धगोला और एक शंकु
(C) शंकु का छिन्नक और एक बेलन (D) गोला और बेलन

4. एक गिलास (देखिए आकृति 12.3) का आकार प्राय: निम्न रूप का होता है

(A) एक शंकु (B) शंकु का छिन्नक
(C) एक बेलन (D) एक गोला

आकृति 12.3

5. गिल्ली–डंडे के खेल में, गिल्ली का आकार (देखिए आकृति 12.4) निम्नलिखित का संयोजन है

(A) दो बेलन (B) एक शंकु और एक बेलन

(C) दो शंकु और एक बेलन (D) दो बेलन और एक शंकु

आकृति 12.4

6. बैडमिंटन खेलने में प्रयोग की जाने वाली शटलकॉक (चिड़िया) का आकार निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक बेलन और एक गोला (B) एक बेलन और एक अर्धगोला

(C) एक गोला और एक शंकु (D) शंकु का छिन्नक और अर्धगोला

7. एक शंकु को उसके आधार के समांतर एक तल की सहायता से काटा जाता है और फिर तल के एक ओर बने शंकु को हटा दिया जाता है। तल के दूसरी ओर बचा हुआ नया भाग कहलाता है एक

(A) शंकु का छिन्नक (B) शंकु

(C) बेलन (D) गोला

8. एक 22 cm आंतरिक किनारे वाले खोखले घन को 0.5 cm व्यास वाले गोलाकार कंचों से भरा जाता है तथा यह कल्पना की जाती है कि घन का $\frac{1}{8}$ स्थान भरा नहीं जा सकता है। तब घन में समावेशित होने वाले कंचों की संख्या है

(A) 142296 (B) 142396 (C) 142496 (D) 142596

9. क्रमश: आंतरिक और बाहरी व्यास 4 cm और 8 cm वाले एक धातु के गोलाकार खोल को पिघलाकर आधार व्यास 8 cm के एक शंकु के आकार में ढाला जाता है। इस शंकु की ऊँचाई है

(A) 12cm (B) 14cm (C) 15cm (D) 18cm

10. विमाओं $49\text{cm} \times 33\text{cm} \times 24\text{cm}$ के घनाभ के आकार के लोहे के किसी ठोस टुकड़े को पिघलाकर एक ठोस गोले के रूप में ढाला जाता है। गोले की त्रिज्या है

(A) 21cm (B) 23cm (C) 25cm (D) 19cm

11. कोई मिस्त्री ईंटों से विमाओं $270\text{cm} \times 300\text{cm} \times 350\text{cm}$ की एक दीवार बनाता है, जिनमें से प्रत्येक ईंट की माप $22.5\text{cm} \times 11.25\text{cm} \times 8.75\text{cm}$ है। यदि यह मान लिया जाए कि दीवार का

$\frac{1}{8}$ भाग मसाले से भरा जाता है, तो दीवार को बनाने में लगी ईंटों की संख्या है

(A) 11100 (B) 11200 (C) 11000 (D) 11300

12. आधार व्यास 2 cm और ऊँचाई 16 cm वाले धातु के एक ठोस बेलन को पिघला कर समान माप के बारह ठोस गोले बनाये जाते हैं। प्रत्येक गोले का व्यास है

(A) 4 cm (B) 3 cm (C) 2 cm (D) 6 cm

13. तिर्यक ऊँचाई 45 cm वाली एक बाल्टी के ऊपरी और निचले सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 28 cm और 7 cm हैं। इस बाल्टी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(A) 4950 cm^2 (B) 4951 cm^2 (C) 4952 cm^2 (D) 4953 cm^2

14. दवाई का एक कैप्सूल 0.5 cm व्यास वाले एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरों पर दो अर्धगोले लगे हुए हैं। संपूर्ण कैप्सूल की लंबाई 2 cm है। इस कैप्सूल की धारिता है

(A) 0.36 cm^3 (B) 0.35 cm^3 (C) 0.34 cm^3 (D) 0.33 cm^3

15. एक ही आधार त्रिज्या r वाले दो ठोस अर्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। तब नये ठोस का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(A) $4\pi r^2$ (B) $6\pi r^2$ (C) $3\pi r^2$ (D) $8\pi r^2$

16. त्रिज्या r cm और ऊँचाई h cm (h>2r) वाले एक लंब वृत्तीय बेलन में ठीक समावेशित होने वाले गोले का व्यास है

(A) r cm (B) 2r cm (C) h cm (D) 2h cm

17. ठोस को एक आकार से दूसरे आकार में बदलने पर, नये आकार का आयतन

(A) बढ़ जाता है (B) घट जाता है (C) वही रहता है (D) दुगुना हो जाता है

18. एक बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 44 cm और 24 cm हैं तथा बाल्टी की ऊँचाई 35 cm है। इस बाल्टी की धारिता है

(A) 32.7 लीटर (B) 33.7 लीटर (C) 34.7 लीटर (D) 31.7 लीटर

19. एक लंब वृत्तीय शंकु में, उसके आधार के समांतर खींचे गये तल द्वारा काटा गया अनुप्रस्थ-काट होता है एक

(A) वृत्त (B) शंकु का छिन्नक (C) गोला (D) अर्धगोला

20. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 3:4 (B) 4:3 (C) 9:16 (D) 16:9

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक ठोस शंकु को उसी आधार त्रिज्या और ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन के ऊपर रखा जाये, तो इस आकार का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi r\sqrt{h^2+r^2}+2\pi rh$ होगा।

हल : सत्य। क्योंकि इस आकार का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल दोनों ठोसों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : स्टील की एक गोलाकार गेंद को पिघलाकर आठ नयी सर्वसम (अर्थात् एक जैसी) गेंदें बनायी गयी हैं। तब, प्रत्येक नयी गेंद की त्रिज्या प्रारंभिक गेंद की त्रिज्या का $\frac{1}{8}$ होगी।

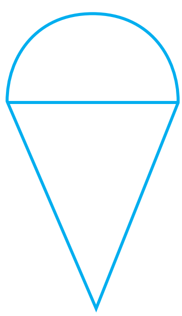
हल : असत्य। मान लीजिए कि स्टील की प्रारंभिक गेंद की त्रिज्या r है तथा r_1 पिघला कर बनायी गयी प्रत्येक नयी गेंद की त्रिज्या है।

अतः, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$, इससे $r_1 = \frac{r}{2}$ प्राप्त होता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : भुजा a वाले दो सर्वसम, अर्थात् एक जैसे घनों को सिरे से सिरा मिलाकर जोड़ दिया गया है। तब, परिणामी घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $12a^2$ है।

हल : असत्य। भुजा a वाले एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होता है। यदि a भुजाओं वाले दो सर्वसम फलकों को मिला कर जोड़ा जाये, तो इस प्रकार बने घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $10a^2$ होगा।

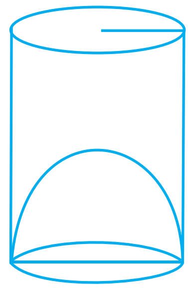
प्रतिदर्श प्रश्न 4 : आकृति 12.5 में दर्शाये गये लट्टू का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर है।



आकृति 12.5

हल : असत्य। लट्टू का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर है।

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : आकृति 12.6 में दर्शाये गये बर्तन की वास्तविक धारिता बेलन के आयतन और अर्धगोले के आयतन के अंतर के बराबर है।



आकृति 12.6

हल : सत्य। बर्तन की वास्तविक धारिता गिलास के अंदर रिक्त स्थान है जिसमें कोई द्रव डालने पर समावेशित हो सके।

प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

1. समान आधार त्रिज्या r वाले दो सर्वसम ठोस अर्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। इस संयोजन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6\pi r^2$ है।

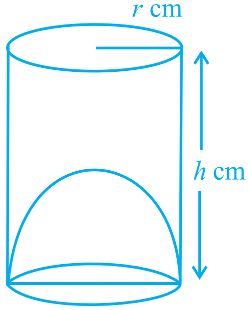
2. त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक बेलन को उसी ऊँचाई और त्रिज्या वाले बेलन के ऊपर रख दिया जाता है। इस प्रकार बने आकार का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi rh + 4\pi r^2$ है।

3. त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक ठोस शंकु को उसी आधार त्रिज्या और ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन के ऊपर रखा जाता है, जो शंकु की हैं। संयोजित ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi r\left[\sqrt{r^2+h^2}+3r+2h\right]$ है।

4. भुजा a वाले एक घनाकार बक्से के अंदर एक ठोस गेंद पूर्णतया ठीक-ठीक रखी जा सकती है। गेंद का आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ है।

5. शंकु के एक छिन्नक का आयतन $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$ होता है, जहाँ h छिन्नक की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है और r_1, r_2 सिरों की त्रिज्याएँ हैं।

6. एक बेलनाकार बर्तन, जिसकी तली में अर्धगोलाकार भाग आकृति 12.7 में दर्शाए अनुसार ऊपर की ओर उठा हुआ है, की धारिता $\frac{\pi r^2}{3}[3h-2r]$ है।



आकृति 12.7

7. शंकु के एक छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi l\,(r_1+r_2)$ होता है, जहाँ $l=\sqrt{h^2+(r_1+r_2)^2}$ है, r_1 और r_2 छिन्नक के दोनों सिरों की त्रिज्याएँ हैं तथा h ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है।

8. धातु की एक खुली बाल्टी इस आकार जैसी है कि उसी धातु की चादर से बने बेलनाकार (खोखला) आधार पर एक शंकु का छिन्नक रखा हुआ है। इसके लिए प्रयुक्त धातु की चादर का पृष्ठीय क्षेत्रफल बराबर है:

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : 14 cm किनारे वाले एक घन में से अधिकतम माप का एक शंकु काट कर निकाल लिया जाता है। इस शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा शंकु को काट कर निकाल लेने के बाद शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : किनारे 14 cm वाले घन में से काटे जा सकने वाले अधिकतम माप के शंकु की आधार त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 14 cm होगी।

इसलिए, शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + \pi r^2$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times\sqrt{7^2+14^2}+\frac{22}{7}(7)^2$$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times\sqrt{245}+154=(154\sqrt{5}+154)\text{cm}^2=154\left(\sqrt{5}+1\right)\text{cm}^2$$

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6 \times (14)^2 = 6 \times 196 = 1176 \text{ cm}^2$

अत:, शंकु को काट कर निकालने के बाद शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \left(1176 - 154 + 154\sqrt{5}\right)\text{cm}^2 = (1022 + 154\sqrt{5}) \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक 10.5 cm त्रिज्या वाले ठोस धातु के गोले को पिघलाकर उसे अनेक छोटे शंकुओं के रूप में ढाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 3 cm है। इस प्रकार बनाये गये शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : धातु के ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(10.5)^3 \text{ cm}^3$

त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 3 cm वाले एक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(3.5)^2 \times 3 \text{ cm}^3$

अत:, इस प्रकार बने कुल शंकुओं की संख्या $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{\frac{1}{3}\pi \times 3.5 \times 3.5} = 126$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : कोई नहर 300 cm चौड़ी और 120 cm गहरी है। इस नहर में पानी 20 km/h की चाल से बह रहा है। वह 20 मिनट में कितने क्षेत्रफल की सिंचाई करेगी, यदि इसके लिए 8 cm खड़े पानी की आवश्यकता होती है?

हल : 1 घंटे में नहर के अंदर बहने वाले पानी का आयतन = नहर की चौड़ाई × नहर की गहराई × नहर के पानी की चाल $= 3 \times 1.2 \times 20 \times 1000\text{m}^3 = 72000\text{m}^3$

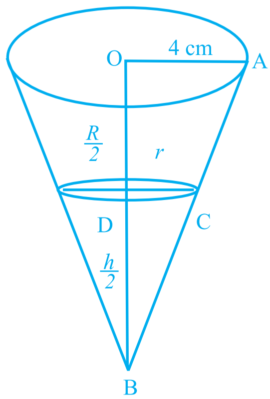
20 मिनट में पानी का आयतन $= \dfrac{72000 \times 20}{60} \text{m}^3 = 24000\text{m}^3$

अत:, 20 मिनट में सींचा गया क्षेत्रफल, यदि 8 cm, अर्थात् 0.08 m खड़े पानी की आवश्यकता है

$= \dfrac{24000}{0.08}\text{m}^2 = 300000\text{m}^2 = 30$ हेक्टेयर।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : एक 4 cm त्रिज्या वाले शंकु को उसके अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर आधार के समांतर समतल द्वारा दो भागों में विभााजित किया गया है। दोनों भागों के आयतनों की तुलना कीजिए।

हल : मान लीजिए कि h दिये हुए शंकु की ऊँचाई है। इस शंकु को अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर आधार के समांतर समतल द्वारा दो भागों में विभाजित करने पर, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है। (देखिए आकृति 12.8)



आकृति 12.8

दो समरूप त्रिभुजों OAB और DCB त्रिभुजों में, हमें प्राप्त है: $\frac{OA}{CD}=\frac{OB}{BD}$ इससे $\frac{4}{r}=\frac{h}{\frac{h}{2}}$ प्राप्त होता है। अर्थात् $r = 2$ है।

$$\text{अत:, } \frac{\text{छोटे शंकु का आयतन}}{\text{शंकु के छिन्नक का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times \frac{h}{2}}{\frac{1}{3}\pi \times \frac{h}{2}[4^2 + 2^2 + 4 \times 2]} = \frac{1}{7}$$

इसलिए, छोटे शंकु के आयतन का शंकु के छिन्नक के आयतन से अनुपात 1:7 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : किसी धातु के तीन घनों, जिनके किनारे 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं, को पिघलाकर एक अकेले घन के रूप में बदला जाता है, जिसका विकर्ण $12\sqrt{3}$ cm है। तीनों घनों के किनारे ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि तीनों घनों के किनारे (cm में) क्रमश: $3x$, $4x$ और $5x$ हैं। अत: पिघलने के बाद, इन घनों का आयतन $= (3x)^3 + (4x)^3 + (5x)^3 = 216x^3$ cm^3
मान लीजिए कि पिघलाने के बाद, बनाये गये नये घन की भुजा a cm है। इसलिए, $a^3 = 216x^3$

अत:, $a = 6x$ है। जिससे विकर्ण $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

परंतु यह दिया है कि नये घन का विकर्ण $12\sqrt{3}$ cm है। अतः $a\sqrt{3}=12\sqrt{3}$, अर्थात् $a = 12$ है। इससे $x = 2$ प्राप्त होता है। अतः, तीनों घनों के किनारे क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. एक 3 cm, 4 cm और 5 cm किनारों वाले धातु के तीन ठोस घनों को पिघलाकर एक अकेला घन बनाया गया है। इस प्रकार बने घन का किनारा ज्ञात कीजिए।

2. विमाओं $9 \text{ cm} \times 11\text{cm} \times 12\text{cm}$ वाले एक सीसे के घनाभाकार ठोस से 3 cm व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनायी जा सकती हैं?

3. कोई बाल्टी एक शंकु के छिन्नक के आकार की है और इसमें 28.490 लीटर पानी आ सकता है। इसके ऊपरी और निचले सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 28 cm और 21 cm हैं। इस बाल्टी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

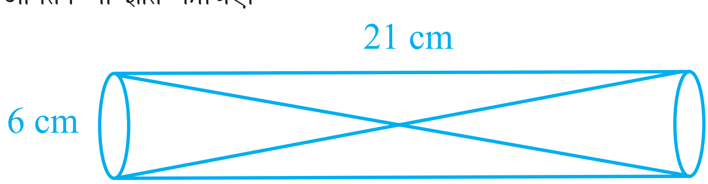
4. त्रिज्या 8 cm और ऊँचाई 12 cm वाले एक शंकु को उसकी अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर जाने वाले और आधार के समांतर तल द्वारा दो भागों में विभाजित किया जाता है। दोनों भागों के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. दो सर्वसम घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, को सिरे से सिरा मिला कर जोड़ा जाता है। इस प्रकार प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

6. भुजा 7 cm वाले एक ठोस घन में 7 cm ऊँचाई और 3 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के आकार का छेद किया गया है। शेष ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

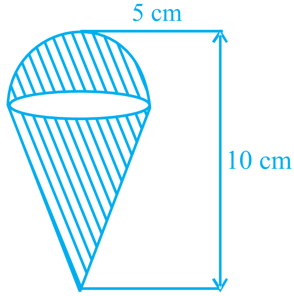
7. समान आधार त्रिज्या 8 cm और समान ऊँचाई 15 cm वाले दो शंकुओं को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ा जाता है। इस प्रकार बने आकार का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. दो ठोस शंकुओं को एक बेलनाकार नली में आकृति 12.9 में दर्शाए अनुसार रखा जाता है। इनकी धारिताओं का अनुपात 2:1 है। इन शंकुओं की ऊँचाइयाँ और धारिताएँ ज्ञात कीजिए। बेलन के शेष भाग का आयतन भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.9

9. आकृति 12.10 में, एक आइसक्रीम शंकु दर्शाया गया है, जिसमें आइसक्रीम भरी हुई है, तथा इसकी त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 10 cm है। आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए, जबकि शंकु का $\frac{1}{6}$ भाग आइसक्रीम से रिक्त रहता है।



आकृति 12.10

10. एक 7 cm व्यास वाले बेलनाकार बीकर, जिसमें कुछ पानी भरा है, में 1.4 cm व्यास वाले कंचे डाले जाते हैं। कंचों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जिनको बीकर में डालने से पानी का स्तर 5.6 cm ऊपर उठ जायेगा।

11. विमाओं 66 cm, 42 cm और 21 cm वाले एक ठोस घनाभाकार सीसे के टुकड़े में से 4.2 cm वाली कितनी सीसे की गोलियाँ प्राप्त की जा सकती हैं?

12. एक 44 cm किनारे वाले सीसे के ठोस घन में से 4 cm व्यास वाली कितनी सीसे की गोलियाँ बनायी जा सकती हैं?

13. 24 m लंबी, 0.4 m मोटी और 6m ऊँची एक दीवार का ईंटों से निर्माण कराया जाता है, जिनमें से प्रत्येक ईंट की विमाएँ 25 cm × 16 cm × 10 cm हैं। यदि दीवार के आयतन का $\frac{1}{10}$ भाग मसाले से भरा जाता है, तो दीवार के निर्माण में लगने वाली ईंटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. आधार व्यास 1.5 cm और ऊँचाई 0.2 cm वाली धातु की वृत्ताकार चकतियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनको पिघलाकर 10 cm ऊँचाई और 4.5 cm व्यास का एक ठोस लंब वृत्तीय बेलन बनाया जा सके।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: कोई बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के रूप की है जिसकी ऊँचाई 30 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 10 cm और 20 cm हैं। इस बाल्टी की धारिता तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बाल्टी को पूरा भर सकने वाले दूध की 25 रु प्रति लीटर की दर से लागत भी ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

हल : बाल्टी की धारिता (या आयतन) $= \frac{\pi h}{3}[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

यहाँ, $h = 30$ cm, $r_1 = 20$ cm और $r_2 = 10$ cm है।

अतः, बाल्टी की धारिता $= \frac{3.14 \times 30}{3}[20^2 + 10^2 + 20 \times 10]$ cm³ = 21.980 लीटर

1 लीटर दूध की लागत = 25 रु

इसलिए, 21.980 लीटर दूध की लागत = 21.980 रु × 25 रु = 549.50 रु

बाल्टी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाल्टी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ निचले सिरे का क्षेत्रफल

$$= \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_2^2, \text{ जहाँ } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

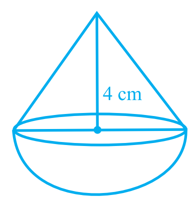
अब $l = \sqrt{900 + 100}$ cm = 31.62 cm

अतः, बाल्टी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3.14 \times 31.62(20 + 10) + 3.14\,(10)^2$

$$= 3.14\,(948.6 + 100)\text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7}[1048.6]\text{ cm}^2 = 3295.6\text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक ठोस खिलौना ऐसे आकार का है जैसे कि एक अर्धगोले पर एक लंब वृत्तीय शंकु रख दिया गया है। शंकु की ऊँचाई 4 cm है और आधार का व्यास 8 cm है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। यदि इस खिलौने के परिगत कोई घन है, तो इस घन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.11

हल : मान लीजिए कि अर्धगोले और शंकु की त्रिज्या r है तथा शंकु की ऊँचाई h है (देखिए आकृति 12.11)।

खिलौने का आयतन = अर्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 4^3+\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 4^2\times 4\right)\text{cm}^3 = \frac{1408}{7}\ \text{cm}^3$$

इस ठोस के परिगत एक घन है। अत:, घन का किनारा 8 cm लंबाई का होना चाहिए।

इसलिए, घन का आयतन $= 8^3\ \text{cm}^3 = 512\ \text{cm}^3$

अत:, घन और खिलौने के आयतनों का अंतर $= \left(512-\frac{1408}{7}\right)\text{cm}^3 = 310.86\ \text{cm}^3$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi rl + 2\pi r^2$, जहाँ $l = \sqrt{h^2+r^2}$ है।

$= \pi r\ (\ l + 2r)$

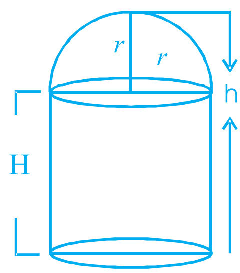
$= \frac{22}{7}\times 4\ \sqrt{4^2+4^2}+2\times 4\ \ \text{cm}^2$

$= \frac{22}{7}\times 4\ \ 4\sqrt{2}+8\ \ \text{cm}^2$

$= =\frac{88\times 4}{7}\ \ \sqrt{2}+2\ \ \text{cm}^2$

$= 171.68\ \text{cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक भवन इस आकार का है जैसे कि एक बेलन के ऊपर अर्धगोलाकार गुंबज बनी हो (देखिए आकृति 12.12)। गुंबज के आधार का व्यास भवन की संपूर्ण ऊँचाई का $\frac{2}{3}$ है। इस भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, यदि इसके अंदर $67\frac{1}{21}$ m^3 वायु है।



आकृति 12.12

हल : मान लीजिए कि अर्धगोलाकार गुंबज की त्रिज्या r मीटर है तथा भवन की संपूर्ण ऊँचाई h मीटर है।

क्योंकि गुंबज का आधार व्यास भवन की संपूर्ण ऊँचाई का $\frac{2}{3}$ है, इसलिए $2r = \frac{2}{3}h$ है।

इससे $r = \frac{h}{3}$ प्राप्त होता है। मान लीजिए कि बेलनाकार भाग की ऊँचाई H मीटर है।

अत:, $H = h - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h$ मीटर।

भवन के अंदर की वायु का आयतन = गुंबज के अंदर की वायु + बेलन के अंदर की वायु

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 H\text{, जहाँ H बेलनाकार भाग की ऊँचाई है।}$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left(\frac{h}{3}\right)^3 + \pi \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{8}{81}\pi h^3 \text{ घन मीटर}$$

भवन के अंदर की वायु का आयतन $67\frac{1}{21}$ m^3 है। अत:, $\frac{8}{81}\pi h^3 = \frac{1408}{21}$ है। इससे $h = 6$ m प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 12.4

1. त्रिज्या 8 cm वाले एक धातु के ठोस अर्धगोले को पिघलाकर आधार त्रिज्या 6 cm वाले एक लंब वृत्तीय शंकु के रूप में ढाला जाता है। शंकु की ऊँचाई निर्धारित कीजिए।

2. आधार 11 m × 6 m वाले एक घनाभाकार पानी की टंकी में 5 m की ऊँचाई तक पानी भरा है। यदि इस पानी को 3.5 m त्रिज्या वाली एक बेलनाकार टंकी में स्थानांतरित कर दिया जाये, तो इस बेलनाकार टंकी में पानी के स्तर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. लोहे का एक खुला संदूक बनाने के लिए कितने घन सेंटीमीटर लोहे की आवश्यकता होगी, यदि इस संदूक की बाहरी विमाएँ 36 cm, 25 cm और 16.5 cm हैं, जबकि लोहे की मोटाई 1.5 cm है। यदि 1 घन सेंटीमीटर लोहे का भार 7.5 g है, तो इस संदूक का भार भी ज्ञात कीजिए।

4. किसी फाउन्टेन पेन की नली, जो बेलन के आकार की है, 7cm लंबी है और इसका व्यास 5 mm है। इस पेन की नली में पूरी भरी स्याही से औसतन 3300 शब्द लिखे जा सकते हैं। स्याही की उस बोतल से कितने शब्द लिखे जा सकते हैं, जिसमें 1 लीटर की $\frac{1}{5}$ भाग स्याही है?

5. व्यास 5 mm वाले एक बेलनाकार पाइप के माध्यम से पानी 10 m प्रति मिनट की दर से बह रहा है। आधार व्यास 40 cm और 24 cm गहरे एक शंकु के आकार के बर्तन को पाइप से भरने के लिए कितना समय लगेगा?

6. चावलों की एक ढेरी 9m व्यास और 3.5m ऊँचाई वाले एक शंकु के आकार की है। इन चावलों का आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को केवल ढकने मात्र के लिए कितने कैनवस कपड़े की आवश्यकता होगी?

7. एक फैक्टरी प्रति दिन 120000 पेंसिल बनाती है। ये पेंसिलें बेलन के आकार की हैं तथा प्रत्येक की लंबाई 25 cm और आधार की परिधि 1.5 cm है। 0.05 रु प्रति dm^2 की दर से एक दिन में निर्मित पेंसिल के वक्र पृष्ठों पर रंग करवाने की लागत निर्धारित कीजिए।

8. एक 14 cm व्यास वाले पाइप के माध्यम से पानी 15 km/h की दर से एक घनाभाकार तालाब में जा रहा है, जो 50m लंबा और 44m चौड़ा है। कितने समय बाद, तालाब में पानी का स्तर 21 cm ऊँचा हो जायेगा?

9. 4.4 m × 2.6 m × 1m वाले लोहे के एक ठोस घनाभाकार टुकड़े को पिघलाकर एक खोखले बेलनाकार पाइप के रूप में ढाला जाता है जिसकी आंतरिक त्रिज्या 30 cm और मोटाई 5 cm है। इस पाइप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10. 80 m लंबे और 50 m चौड़े एक घनाभाकार तालाब में 500 व्यक्ति डुबकी लगा रहे हैं। इस तालाब में पानी का स्तर कितना बढ़ जायेगा, यदि एक व्यक्ति द्वारा औसतन पानी का विस्थापन 0.04 m^3 है?

11. त्रिज्या 2 cm वाले 16 शीशे के गोले एक घनाभाकार पेटी में पैक किये जाते हैं, जिसकी आंतरिक विमाएँ 16 cm × 8cm × 8cm हैं। इसके बाद पेटी में पानी भर दिया जाता है। पेटी में भरे गये पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

12. एक 16 cm ऊँचाई वाला दूध का बर्तन एक धातु की चादर से शंकु के एक छिन्नक के आकार का बना हुआ है। इसके निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 8 cm और 20 cm हैं। इस बर्तन में जितना दूध आ सकता है, उसकी 22 रु प्रति लीटर की दर से लागत ज्ञात कीजिए।

13. एक 32 cm ऊँचाई और 18 cm आधार त्रिज्या वाली बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली कर लिया जाता है जिससे रेत की शंकु के आकार की एक ढेरी बनायी जाती है। यदि शंकु के आकार की इस ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

14. एक रॉकेट का आकार एक लंबा वृत्तीय बेलन के रूप का है जिसका निचला सिरा बंद है। इसके ऊपर बेलन की आधार त्रिज्या के बराबर आधार त्रिज्या वाला का एक शंकु रखा हुआ है। बेलन के व्यास और ऊँचाई क्रमश: 6 cm और 12 cm हैं। यदि शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई 5 cm है, तो रॉकेट का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

15. एक भवन एक बेलन के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोलाकार गुंबज लगा हुआ है तथा इसमें $41\frac{19}{21}$ m^3 वायु है। यदि इस गुंबज का आंतरिक व्यास उसके फर्श से संपूर्ण ऊँचाई के बराबर है, तो इस भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

16. आंतरिक त्रिज्या 9 cm वाला एक अर्धगोलाकार कटोरा किसी द्रव से भरा हुआ है। इस द्रव को बेलनाकार बोतलों में भरा जाता है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 1.5 cm और ऊँचाई 4 cm है। इस कटोरे को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता है?

17. ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक ठोस लंब वृत्तीय शंकु 180 cm ऊँचाई वाले पानी से पूरे भरे एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार रखा जाता है कि यह उसकी तली को स्पर्श करें। बेलन में बचे हुए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या के बराबर है।

18. आंतरिक त्रिज्या 1 cm वाले एक बेलनाकार पाइप के माध्यम से पानी 80 cm/sec की चाल से एक खाली बेलनाकार टंकी में जा रहा है, जिसकी आधार त्रिज्या 40 cm है। आधे घंटे के बाद टंकी में पानी का स्तर कितना बढ़ जायेगा?

19. विमाओं $22\text{m} \times 20\text{m}$ वाली एक छत से वर्षा का पानी एक बेलनाकार बर्तन में जा रहा है, जिसका आधार व्यास 2m और ऊँचाई 3.5m है। यदि छत पर एकत्रित वर्षा के पानी से बेलनाकार बर्तन ठीक पूरा भर जाता है, तो cm में वर्षा ज्ञात कीजिए।

20. एक पेन स्टैंड एक घनाभ के आकार का है तथा लकड़ी का बना हुआ है, जिसमें चार शंकु के आकार के गड्ढे हैं और एक घनाकार गड्ढा है, जिनमें क्रमशः पेन और पिन रखे जा सकते हैं। घनाभ की विमाएँ 10 cm, 5 cm और 4 cm की हैं। शंकु के आकार के प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 2.1 cm है। घनाकार गड्ढे का किनारा 3 cm है। संपूर्ण स्टैंड में प्रयुक्त लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।

अध्याय 13

साँख्यिकी और प्रायिकता

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

साँख्यिकी

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक

(a) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

(i) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, यह कल्पना की जाती है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित होती है।

(ii) **प्रत्यक्ष या सीधी विधि**

माध्य $(\overline{x}) = \dfrac{f_i x_i}{f_i}$, जहाँ x_i (वर्ग चिह्न) i वें वर्ग अंतराल का मध्य-बिंदु है तथा f_i उसकी संगत बारंबारता है।

(iii) **कल्पित माध्य विधि**

माध्य $(\overline{x}) = a + \dfrac{f_i d_i}{f_i}$, जहाँ a कल्पित माध्य है और प्रत्येक i के लिए $d_i = x_i - a$, a से x_i के विचलन हैं।

(iv) **पग विचलन विधि**

माध्य ($\bar{x}$) = $a+h\;\dfrac{f_iu_i}{f_i}$, जहाँ a कल्पित माध्य है, h वर्ग माप है तथा

$u_i=\dfrac{x_i-a}{h}$ है।

(v) यदि वर्ग माप (साइज़) असमान हों, तब भी (iv) में दिया सूत्र प्रयोग किया जा सकता है। इसके लिए, h को सभी d_i का एक उपयुक्त विभाजक लेना होगा।

(b) वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

(i) एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में, बारंबारताओं को केवल देखकर बहुलक को निर्धारित करना संभव नहीं होता। वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए, अधिकतम बारंबारता वाला वर्ग ज्ञात कीजिए। यह वर्ग *बहुलक वर्ग* कहलाता है। आँकड़ों का बहुलक एक ऐसा मान है जो इस बहुलक वर्ग में है।

(ii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए, वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक परिकलित किया जा सकता है:

बहुलक = $l+\;\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\;\times h$,

जहाँ l बहुलक वर्ग की निम्न सीमा है, h वर्ग साइज (या माप) है, f_1 बहुलक वर्ग की बारंबारता है तथा f_0 और f_2 क्रमशः बहुलक वर्ग से पहले और बाद वाले वर्गों की बारंबारताएँ हैं।

(c) वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

(i) संचयी बारंबारता सारणी – वर्गीकृत बारंबारता बंटन की 'से कम प्रकार की' और 'से अधिक प्रकार की'

(ii) यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या n है, तो उस वर्ग को ज्ञात कीजिए जिसकी संचयी बारंबारता $\dfrac{n}{2}$ से बड़ी (और उसके निकटतम) है। यह वर्ग *माध्यक वर्ग* कहलाता है।

(iii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक परिकलित किया जा सकता है :

माध्यक = $l+\left(\dfrac{\dfrac{n}{2}-\text{cf}}{f}\right)h$,

जहाँ l माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, n प्रेक्षणों की संख्या, h वर्ग साइज, cf माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता है तथा f माध्यक वर्ग की बारंबारता है।

(d) संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण (तोरण) – से कम प्रकार और से अधिक प्रकार

(i) वर्गीकृत आँकड़ों के संचयी बारंबारता बंटन (से कम प्रकार) के आलेख से माध्यक ज्ञात करना।

(ii) संचयी बारंबारता बंटनों (से कम प्रकार और से अधिक प्रकार) के आलेखों से, इन आलेखों के प्रतिच्छेद बिंदु के भुज के रूप में माध्यक ज्ञात करना।

प्रायिकता

- यादृच्छिक प्रयोग, किसी प्रयोग के परिणाम, घटनाएँ, प्रारंभिक घटनाएँ।
- समप्रायिक परिणाम
- किसी घटना E की सैद्धांतिक (या चिरप्रतिष्ठित) प्रायिकता [P(E) द्वारा व्यक्त या निरूपित] निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी परिणामों की संख्या}},$$

जहाँ प्रयोग के परिणाम *समप्रायिक* हैं।

- किसी घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में कोई भी संख्या हो सकती है। कुछ विशेष स्थितियों में यह 0 या 1 भी हो सकती है।
- किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की बारंबारताओं का योग 1 होता है।
- किसी घटना $\overline{E}$ के लिए , $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ होता है,

जहाँ $\overline{E}$ का अर्थ 'E नहीं' है। $\overline{E}$, घटना E का पूरक कहलाती है।

- असंभव घटना, निश्चित घटना

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : संचयी बारंबारता सारणी की रचना करना निम्नलिखित में उपयोगी होता है

(A) माध्य (B) माध्यक

(C) बहुलक (D) उपरोक्त सभी तीनों मापक

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : इस सारणी को देखिए :

मासिक आय परिसर	परिवारों की संख्या
10000 रु से अधिक	100
13000 रु से अधिक	85
16000 रु से अधिक	69
19000 रु से अधिक	50
22000 रु से अधिक	33
25000 रु से अधिक	15

उपरोक्त सारणी में, आय परिसर (रु में) 16000 – 19000 के परिवारों की संख्या है

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 19

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी कक्षा के 60 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के निम्नलिखित बारंबारता बंटन पर विचार कीजिए:

ऊँचाई (cm में)	विद्यार्थियों की संख्या
150-155	15
155-160	13
160-165	10
165-170	8
170-175	9
175-180	5

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा और माध्यक वर्ग की उपरि सीमा का योग है

(A) 310 (B) 315 (C) 320 (D) 330

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : निम्नलिखित में से कौन किसी घटना की प्रायिकता हो सकती है?

(A) – 0.04 (B) 1.004 (C) $\frac{18}{23}$ (D) $\frac{8}{7}$

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : अच्छी प्रकार से फेटी गयी 52 ताशों की एक गड्डी में से यादृच्छिक (या यदृच्छ) रूप से एक ताश (या कार्ड या पत्ता) चुना जाता है। इस कार्ड के मुख कार्ड (तस्वीर वाला कार्ड) (face card) होने की क्या प्रायिकता है?

(A) $\frac{3}{13}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{6}{13}$ (D) $\frac{9}{13}$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 6 : एक थैले में 3 लाल गेंद, 5 सफेद गेंद और 7 काली गेंद हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस थैले में यादृच्छिक रूप से निकाली गयी एक गेंद न तो लाल होगी और न ही काली?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{8}{15}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 13.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, सूत्र

$$\bar{x} = a + \frac{f_i d_i}{f_i}$$ में d_i निम्नलिखित के a से विचलन है :

(A) वर्गों की निम्न सीमाएँ (B) वर्गों की उपरि सीमाएँ

(C) वर्गों के मध्य - बिंदु (D) वर्ग चिह्नों की बारंबारताएँ

2. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य अभिकलित करते समय, हम यह कल्पना करते हैं कि बारंबारताएँ

(A) सभी वर्गों में समान रूप से वितरित हैं

(B) वर्गों के वर्ग चिह्नों पर केंद्रित हैं

(C) वर्गों की उपरि सीमाओं पर केंद्रित हैं

(D) वर्गों की निम्न सीमाओं पर केंद्रित हैं

3. यदि x_i वर्गीकृत आँकड़ों के वर्ग अंतरालों के मध्य-बिंदु हैं, f_i इनकी संगत बारंबारताएँ हैं तथा $\bar{x}$ माध्य है, तो $\sum(f_i x_i - \bar{x})$ बराबर है

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 2

4. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, सूत्र $\bar{x} = a + h \dfrac{f_i u_i}{f_i}$ में, u_i =

(A) $\dfrac{x_i + a}{h}$ (B) $h\,(x_i - a)$ (C) $\dfrac{x_i - a}{h}$ (D) $\dfrac{a - x_i}{h}$

5. वर्गीकृत आँकड़ों की 'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार' की संचयी बारंबारता वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु के भुज से आंकड़ों का प्राप्त होना है:

(A) माध्य (B) माध्यक (C) बहुलक (D) उपरोक्त सभी तीनों

6. बंटन

वर्ग	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारंबारता	10	15	12	20	9

के लिए, माध्यक वर्ग और बहुलक वर्ग की निम्न सीमाओं का योग है

(A) 15 (B) 25 (C) 30 (D) 35

7. बंटन

वर्ग	0-5	6-11	12-17	18-23	24-29
बारंबारता	13	10	15	8	11

में, माध्यक वर्ग की उपरि सीमा है

(A) 17 (B) 17.5 (C) 18 (D) 18.5

8. बंटन

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	12
30 से कम	27
40 से कम	57
50 से कम	75
60 से कम	80

के लिए, बहुलक वर्ग है

(A) 10-20 (B) 20-30 (C) 30-40 (D) 50-60

9. बंटन

वर्ग	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
बारंबारता	4	5	13	20	14	7	4

के लिए, माध्यक वर्ग की उपरि सीमा और बहुलक वर्ग की निम्न सीमा का अंतर है

(A) 0 (B) 19 (C) 20 (D) 38

10. 150 धावकों द्वारा 110 m की बाधा दौड़ में लिए गये समय (सेकंड में), नीचे सारणीबद्ध किए गए हैं:

वर्ग (समय)	13.8-14	14-14.2	14.2-14.4	14.4-14.6	14.6-14.8	14.8-15
बारंबारता	2	4	5	71	48	20

14.6 सेकंड से कम में दौड़ समाप्त करने वाले धावकों की संख्या है

(A) 11 (B) 71 (C) 82 (D) 130

11. बंटन

प्राप्तांक	**विद्यार्थियों की संख्या**
0 से अधिक या उसके बराबर	63
10 से अधिक या उसके बराबर	58
20 से अधिक या उसके बराबर	55
30 से अधिक या उसके बराबर	51
40 से अधिक या उसके बराबर	48
50 से अधिक या उसके बराबर	42

के लिए, वर्ग 30–40 की बारंबारता है

(A) 3 (B) 4 (C) 48 (D) 51

12. यदि कोई घटना घटित नहीं हो सकती है, तो उसकी प्रायिकता है

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

13. निम्नलिखित में से कौन किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 0.1 (C) 3% (D) $\frac{17}{16}$

14. किसी घटना का घटित होना बहुत कम संभावित है। इसकी प्रायिकता निम्नलिखित के निकटतम है:

(A) 0.0001 (B) 0.001 (C) 0.01 (D) 0.1

15. यदि किसी घटना की प्रायिकता p है, तो इसकी पूरक घटना की प्रायिकता है

(A) $p-1$ (B) p (C) $1-p$ (D) $1-\frac{1}{p}$

16. किसी विशेष घटना के घटित होने की प्रायिकता प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने पर, निम्नलिखित कभी नहीं हो सकती

(A) 100 से कम (B) 0 से कम

(C) 1 से अधिक (D) एक पूर्ण संख्या के अतिरिक्त सभी कुछ

17. यदि P(A), घटना A की प्रायिकता व्यक्त करता है, तो

(A) $P(A) < 0$ (B) $P(A) > 1$ (C) $0 \leq P(A) \leq 1$ (D) $-1 \leq P(A) \leq 1$

18. 52 ताशों की एक गड्डी में से एक ताश निकाला जाता है। इसके लाल रंग का मुख कार्ड होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{3}{26}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{1}{2}$

19. इसकी प्रायिकता कि यादृच्छिक रूप से चुने गए एक ऐसे वर्ष में, जो अधिवर्ष (leap year) न हो 53 रविवार हों, निम्नलिखित है :

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

20. जब एक पासे को फेंका जाता है, तो 3 से छोटी एक विषम संख्या आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

21. 52 ताशों की एक गड्डी में से एक कार्ड निकाला जाता है। कार्ड का ईंट का इक्का न होना घटना E है। E के अनुकूल परिणामों की संख्या है

(A) 4 (B) 13 (C) 48 (D) 51

22. 400 अंडों के एक संग्रह में से एक खराब अंडा प्राप्त करने की प्रायिकता 0.035 है। इस संग्रह में खराब अंडों की संख्या है

(A) 7 (B) 14 (C) 21 (D) 28

23. कोई लड़की यह परिकलित करती है कि उसके द्वारा एक लॉटरी में प्रथम पुरस्कार जीतने की प्रायिकता 0.08 है। यदि 6000 टिकट बेचे गये हैं, तो उस लड़की ने कितने टिकट खरीदे हैं?

(A) 40 (B) 240 (C) 480 (D) 750

24. किसी थैले में कुछ टिकट हैं, जिन पर 1 से 40 तक संख्याएँ अंकित हैं। इसमें से यादृच्छिक रूप से एक टिकट निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता कि निकाले गये इस टिकट की संख्या 5 का एक गुणज हो, निम्नलिखित है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

25. किसी व्यक्ति से 1 से 100 तक की संख्याओं में से एक संख्या चुनने को कहा जाता है। इस संख्या के अभाज्य संख्या होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

26. किसी स्कूल में पाँच सदन A, B, C, D और E हैं। किसी कक्षा में 23 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 4 सदन A से, 8 सदन B से, 5 सदन C से, 2 सदन D से तथा शेष सदन E से हैं। इनमें से एक विद्यार्थी को कक्षा का मॉनीटर बनाने के लिए चुना जाता है। चुने गये इस विद्यार्थी के सदनों A, B और C से न होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{4}{23}$ (B) $\frac{6}{23}$ (C) $\frac{8}{23}$ (D) $\frac{17}{23}$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य तथा इन आँकड़ों को वर्गीकृत करने के बाद परिकलित किया गया माध्य सदैव बराबर होते हैं। क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : यह कथन सत्य नहीं है। इसका कारण यह है कि जब हम वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य परिकलित करते हैं, तो हम कल्पना करते हैं कि प्रत्येक वर्ग की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित है। इसी कल्पना के कारण, अवर्गीकृत और वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य एक ही होने की संभावना बहुत ही कम है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : क्या यह कहना सही है कि एक तोरण एक बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण है? कारण दीजिए।

हल : किसी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण एक तोरण हो सकता है और नहीं भी हो सकता है। यह एक आयतचित्र भी हो सकता है। तोरण एक संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण होता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी स्थिति में, जब केवल दो संभव परिणाम हों, प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होगी। सत्य है या असत्य? क्यों?

हल : असत्य। प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ तभी होगी जबकि दोनों परिणाम समप्रायिक हों, अन्यथा नहीं।

प्रश्नावली 13.2

1. अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक और इन्हीं आँकड़ों को वर्गीकृत करने के बाद परिकलित माध्यक सदैव बराबर होते हैं। क्या आप सोचते हैं कि यह कथन सत्य है? कारण दीजिए।

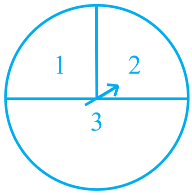
2. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य परिकलित करने के लिए, हम सूत्र $\overline{x} = a + \frac{f_i d_i}{f_i}$ का प्रयोग कर सकते है, जब सभी वर्गों की वर्गमाप बराबर हैं, a कल्पित माध्य है तथा a को वर्गों के मध्य-बिंदुओं में से कोई एक होना चाहिए। क्या अंतिम कथन सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

3. क्या यह कहना सत्य है कि दिये हुए वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक सदैव भिन्न-भिन्न होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. क्या दिये हुए वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्यक वर्ग और बहुलक वर्ग सदैव भिन्न-भिन्न होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. तीन बच्चों वाले एक परिवार में, हो सकता है कोई लड़की न हो, एक लड़की हो, दो लड़कियाँ हों या तीन लड़कियाँ हों। अत:, इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

6. किसी खेल में एक तीर को घुमाया जाता है, जो घूमने के बाद, 1, 2 या 3 क्षेत्रों में से किसी एक की ओर इंगित करता हुआ स्थिर हो जाता है (देखिए आकृति 13.1)। क्या परिणाम 1, 2 और 3 आना समप्रायिक है? कारण दीजिए।



आकृति 13.1

7. अपूर्व दो पासों को फेंकता है तथा इन पासों पर आने वाली संख्याओं का गुणनफल परिकलित करता है। पीहू एक पासे को फेंकती है तथा उस पर आयी संख्या का वर्ग कर देती है। संख्या 36 प्राप्त करने का किसका अधिक अच्छा संयोग है और क्यों?

8. जब हम किसी सिक्के को उछालते हैं, तो दो संभव परिणाम हैं– चित या पट। अत:, इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

9. एक विद्यार्थी कहता है कि यदि आप एक पासे को फेंकेंगे, तो यह या तो 1 दर्शाएगा या 1 नहीं दर्शाएगा। इसलिए, 1 प्राप्त करने और 1 नहीं प्राप्त करने में से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। क्या यह सही है? कारण दीजिए।

10. मैं तीन सिक्कों को एक साथ उछालता हूँ। संभव परिणाम कोई चित नहीं, 1 चित, 2 चित या 3 चित हैं। अत:, मैं कहता हूँ कि कोई चित प्राप्त न करने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इस निष्कर्ष में क्या गलती है?

11. यदि आप किसी सिक्के को 6 बार उछालते हैं और प्रत्येक बार चित आता है तो क्या आप कह सकते हैं कि चित के प्राप्त करने की सैद्धांतिक प्रायिकता 1 है? कारण दीजिए।

12. सुषमा एक सिक्के को तीन बार उछालती है और उसे प्रत्येक बार एक पट प्राप्त होता है। क्या आप सोचते हैं कि अगली उछाल में भी उसे पट प्राप्त होगा? कारण दीजिए।

13. यदि मुझे एक सिक्के को तीन बार उछालने पर प्रत्येक बार चित प्राप्त होता है, क्या चौथी उछाल में मुझे यह आशा रखनी चाहिए कि पट आने का अधिक अच्छा संयोग है?

14. एक थैले में 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखी हुई पर्चियाँ रखी हैं। यदि इसमें से फातिमा एक पर्ची यादृच्छिक रूप से चुनती है, तो या तो यह एक विषम संख्या होगी या एक सम संख्या होगी। क्योंकि इस स्थिति में, केवल दो ही संभव परिणाम हैं, इसलिए इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। औचित्य दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित बंटन के लिए संचयी बारंबारता बंटन की रचना कीजिए :

वर्ग	12.5-17.5	17.5-22.5	22.5-27.5	27.5-32.5	32.5-37.5
बारंबारता	2	22	19	14	13

हल : दिये हुए बंटन का वाँछित संचयी बारंबारता बंटन नीचे दिया गया है :

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
12.5-17.5	2	2
17.5-22.5	22	24
22.5-27.5	19	43
27.5-32.5	14	57
32.5-37.5	13	70

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : किसी सर्वे से प्राप्त 110 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी को नीचे सारणीबद्ध किया गया है :

दैनिक मजदूरी (रु में)	श्रमिकों की संख्या
100-120	10
120-140	15
140-160	20
160-180	22
180-200	18
200-220	12
220-240	13

इन श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी परिकलित कीजिए।

हल : हम पहले प्रत्येक वर्ग का वर्ग चिह्न x_i ज्ञात करते हैं और नीचे दर्शाए अनुसार आगे बढ़ते हैं :

दैनिक मजदूरी (रु में) वर्ग	वर्ग चिह्न (x_i)	श्रमिकों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
100-120	110	10	1100
120-140	130	15	1950
140-160	150	20	3000
160-180	170	22	3740
180-200	190	18	3420
200-220	210	12	2520
220-240	230	13	2990

$f_i = 110,$ $f_i x_i = 18720$

$$\text{अत:, माध्य} = \bar{x} = \frac{f_i x_i}{f_i} = \frac{18720}{110} = 170.20$$

इसलिए, श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी 170.20 रु है।

टिप्पणी: उपरोक्त माध्य दैनिक मजदूरी, कल्पित माध्य विधि या पग विचलन विधि से भी परिकलित की जा सकती है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : किसी परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये गये अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है

प्राप्तांक	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
बारंबारता	14	16	18	23	18	8	3

माध्यक प्रतिशत अंक निर्धारित कीजिए।

हल :

प्राप्तांक (वर्ग)	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता
30-35	14	14
35-40	16	30
40-45	18	48
45-50	23	71 ← माध्यक वर्ग
50-55	18	89
55-60	8	97
60-65	3	100

यहाँ, $n = 100$ है।

अत:, $\frac{n}{2} = 50$ है यह प्रेक्षण वर्ग 45–50 में स्थित है।

l (माध्यक वर्ग की निम्न सीमा) $= 45$

cf (माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता) $= 48$

f (माध्यक वर्ग की बारंबारता) $= 23$

h (वर्ग माप) $= 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right)h$$

$$= 45 + \left(\frac{50-48}{23}\right) \times 5$$

$$= 45 + \frac{10}{23} = 45.4$$

अत:, प्राप्तांकों का माध्यक प्रतिशत 45.4 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : किसी गाँव में कृषि योग्य भूमि – स्वामियों की बारंबारता बंटन सारणी नीचे दी गयी है:

भूमि का क्षेत्रफल (हेक्टेयर में)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
परिवारों की संख्या	20	45	80	55	40	12

इस गाँव का बहुलक भूमि-स्वामित्व ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, अधिकतम बारंबारता 80 है तथा इस बारंबारता के संगत वर्ग 5–7 है।

अतः, बहुलक वर्ग 5–7 है।

l (बहुलक वर्ग की निम्न सीमा) $= 5$

f_1 (बहुलक वर्ग की बारंबारता) $= 80$

f_0 (बहुलक वर्ग के ठीक पहले के वर्ग की बारंबारता) $= 45$

f_2 (बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारंबारता) $= 55$

h (वर्ग माप) $= 2$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$= 5 + \frac{80 - 45}{2(80) - 45 - 55} \times 2$$

$$= 5 + \frac{35}{60} \times 2 = 5 + \frac{35}{30}$$

$$= 5 + 1.2 = 6.2$$

अतः, इस गाँव का बहुलक भूमि-स्वामित्व 6.2 हेक्टेयर है।

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-10
बारंबारता	9	22	27	17

2. एक गणित टेस्ट में 20 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	7	6	1

3. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य परिकलित कीजिए :

वर्ग	4 – 7	8 –11	12– 15	16 –19
बारंबारता	5	4	9	10

4. निम्नलिखित सारणी, सारिका द्वारा स्वयं अपनी पुस्तक को पूर्ण करने के लिए 30 दिन तक लिखे गये पृष्ठों को दर्शाती है :

प्रतिदिन लिखे पृष्ठों की संख्या	16-18	19-21	22-24	25-27	28-30
दिनों की संख्या	1	3	4	9	13

प्रतिदिन लिखे गये माध्य पृष्ठों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. 50 कर्मचारियों के एक प्रतिदर्श की दैनिक आय निम्नलिखित रूप में सारणीबद्ध है :

आय (रु में)	1-200	201-400	401-600	601-800
कर्मचारियों की संख्या	14	15	14	7

कर्मचारियों की माध्य दैनिक आय ज्ञात कीजिए।

6. किसी एयरक्राफ्ट में यात्रियों के लिए 120 सीटें हैं। 100 उड़ानों के दौरान प्रयोग की गयी सीटों की संख्याएं निम्नलिखित सारणी में दी हुई हैं :

सीटों की संख्या	100-104	104-108	108-112	112-116	116-120
बारंबारता	15	20	32	18	15

इन उड़ानों में प्रयोग की गयी सीटों की संख्या का माध्य निर्धारित कीजिए।

7. 50 पहलवानों के भार (kg में) नीचे सारणी में दिये हैं:

भार (kg में)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
पहलवानों की संख्या	4	14	21	8	3

इन पहलवानों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

8. किसी कार निर्माता द्वारा एक ही मॉडल की 50 कारों की माइलेज़ (अर्थात एक लीटर ईंधन में कितने km चलती हैं) की जाँच की, जिसके परिणाम नीचे सारणीबद्ध हैं:

माइलेज (km/L)	10-12	12-14	14-16	16-18
कारों की संख्या	7	12	18	13

माध्य माइलेज ज्ञात कीजिए।

निर्माता यह दावा करता है कि इस मॉडल की माइलेज 16 km/L है। क्या आप इस दावे से सहमत हैं?

9. 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बंटन निम्नलिखित है:

भार (kg में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
व्यक्तियों की संख्या	4	4	13	5	6	5	2	1

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' की एक संचयी बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

10. निम्नलिखित सारणी किसी परीक्षा में 800 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के संचयी बारंबारता बंटन को दर्शाती है :

प्राप्तांक	**विद्यार्थियों की संख्या**
10 से कम	10
20 से कम	50
30 से कम	130
40 से कम	270
50 से कम	440
60 से कम	570
70 से कम	670
80 से कम	740
90 से कम	780
100 से कम	800

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, एक बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

11. निम्नलिखित आँकड़ों से एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

प्राप्तांक (90 में से)	**प्रत्याशियों की संख्या**
80 से अधिक या उसके बराबर	4
70 से अधिक या उसके बराबर	6
60 से अधिक या उसके बराबर	11
50 से अधिक या उसके बराबर	17
40 से अधिक या उसके बराबर	23
30 से अधिक या उसके बराबर	27
20 से अधिक या उसके बराबर	30
10 से अधिक या उसके बराबर	32
0 से अधिक या उसके बराबर	34

12. किसी कक्षा के विद्यार्थियों की ऊँचाइयों (लंबाइयों) के निम्नलिखित बंटन में अज्ञात प्रविष्टियाँ a, b, c, d, e और f ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (cm में)	**बारंबारता**	**संचयी बारंबारता**
150-155	12	a
155-160	b	25
160-165	10	c
165-170	d	43
170-175	e	48
175-180	2	f
कुल	**50**	

13. एक विशिष्ट दिन किसी अस्पताल में इलाज करा रहे 300 रोगियों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित हैं :

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
रोगियों की संख्या	60	42	55	70	53	20

उपरोक्त आँकड़ों के लिए, निम्नलिखित को बनाइए:

(i) 'से कम प्रकार' का संचयी बारंबारता बंटन

(ii) 'से अधिक प्रकार' का संचयी बारंबारता बंटन

14. नीचे किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का एक संचयी बारंबारता बंटन दर्शाया गया है :

प्राप्तांक	20 से कम	40 से कम	60 से कम	80 से कम	100 से कम
विद्यार्थियों की संख्या	17	22	29	37	50

उपरोक्त के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

15. 600 परिवारों की साप्ताहिक आय नीचे सारणीबद्ध है :

साप्ताहिक आय (रु में)	परिवारों की संख्या
0-1000	250
1000-2000	190
2000-3000	100
3000-4000	40
4000-5000	15
5000-6000	5
कुल	**600**

माध्यक आय अभिकलित कीजिए।

16. किसी क्रिकेट कोचिंग केंद्र पर 33 खिलाड़ियों की गेंदबाजी करने की अधिकतम चालें (km प्रति घंटा में) इस प्रकार है:

चाल (km/h)	85-100	100-115	115-130	130-145
खिलाड़ियों की संख्या	11	9	8	5

गेंदबाजी की माध्यक चाल परिकलित कीजिए।

17. 100 परिवारों की मासिक आय नीचे दी हुई हैं:

आय (रु में)	परिवारों की संख्या
0-5000	8
5000-10000	26
10000-15000	41
15000-20000	16
20000-25000	3
25000-30000	3
30000-35000	2
35000-40000	1

बहुलक आय परिकलित कीजिए।

18. 70 पैकेटों में, कॉफी का भार निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है :

भार (g में)	पैकेटों की संख्या
200-201	12
201-202	26
202-203	20
203-204	9
204-205	2
205-206	1

बहुलक भार निर्धारित कीजिए।

19. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। निम्नलिखित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) दोनों पासों पर एक ही संख्या।

(ii) दोनों पासों पर भिन्न-भिन्न संख्याएँ।

20. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का योग

(i) 7 हो? (ii) एक अभाज्य संख्या हो? (iii) 1 हो?

21. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासों पर आयी संख्याओं का गुणनफल

(i) 6 है। (ii) 12 है। (iii) 7 है।

22. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का गुणनफल लिख लिया जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गुणनफल 9 से कम है।

23. दो पासों पर क्रमश: 1, 2, 3, 4, 5, 6 और 1, 1, 2, 2, 3, 3 संख्याएँ लिखी हुई हैं। इनको एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का योग लिख लिया जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अलग-अलग प्रत्येक योग 2 से 9 तक हो।

24. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। अधिकतम एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। संभव परिणामों की एक सूची बनाइए। निम्नलिखित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) सभी चित (ii) न्यूनतम 2 चित

26. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का अंतर 2 है।

27. किसी थैले में 10 लाल, 5 नीली और 7 हरी गेंद हैं। इसमें से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद

(i) लाल है (ii) हरी है (iii) नीली नहीं है

28. 52 ताशों की एक गड्डी में से, चिड़ी के बादशाह, बेगम और गुलाम को हटा दिया जाता है तथा शेष कार्डों को अच्छी तरह से फेट लिया जाता है। इसके बाद, शेष कार्डों में से एक कार्ड यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। कार्ड के निम्नलिखित होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए:

(i) एक पान (ii) एक बादशाह

29. प्रश्न 28 का संदर्भ लीजिए। इसकी क्या प्रायिकता है कि कार्ड

(i) एक चिड़ी का कार्ड है? (ii) पान का 10 (दहला) है?

30. 52 ताशों की एक गड्डी में सभी गुलाम, बेगम और बादशाह हटा दिये जाते हैं। शेष कार्डों को अच्छी प्रकार से फेट लिया जाता है। इसके बाद, इसमें से एक कार्ड यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इक्के को मान 1 देकर, अन्य कार्डों को भी इसी प्रकार के मान दिये जाते हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड का मान है:

(i) 7 (ii) 7 से अधिक (iii) 7 से कम

31. 0 और 100 के बीच एक पूर्णांक चुना जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह

(i) 7 से विभाज्य है? (ii) 7 से विभाज्य नहीं है?

32. कार्ड जिन पर 2 से 101 तक की संख्याएँ लिखी हुई हैं एक बक्स में रख दिये जाते हैं। एक कार्ड यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस कार्ड पर एक

(i) सम संख्या हो (ii) वर्ग संख्या हो

33. अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि यह अक्षर एक व्यंजक है।

34. किसी बक्से में 1000 सील किये हुए लिफाफे हैं। इनमें से 10 ऐसे लिफाफे हैं, जिनमें से प्रत्येक में 100 रु का एक नकद पुरस्कार है, 100 में से प्रत्येक में 50 रु का एक नकद पुरस्कार है और 200 में से प्रत्येक में 10 रु का एक नकद पुरस्कार है तथा शेष में कोई नकद पुरस्कार नहीं है। इनको अच्छी प्रकार से मिलाकर, एक लिफाफा बाहर निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस लिफाफे में कोई नकद पुरस्कार न हो।

35. पेटी A में 25 पर्चियाँ हैं, जिनमें से 19 पर 1 रु अंकित है और शेष पर 5 रु अंकित है। पेटी B में 50 पर्चियाँ हैं, जिनमें से 45 पर 1 रु अंकित है और शेष पर 13 रु अंकित है। दोनों पेटियों की पर्चियों को एक स्थान पर एकत्रित करके एक तीसरी पेटी में रख दिया जाता है और इन्हें अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। इस पेटी में से यादृच्छिक रूप से एक पर्ची निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस पर्ची पर 1 रु के अतिरिक्त कुछ और अंकित होगा?

36. 24 बल्ब वाले एक डिब्बे में 6 खराब बल्ब हैं। इसमें से एक बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा? यदि चुना हुआ बल्ब खराब है और इसे प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है तथा शेष बल्बों में से एक अन्य बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि यह दूसरा बल्ब खराब होगा?

37. बच्चों के एक खेल में, 8 त्रिभुज हैं, जिसमें से 3 नीले और शेष लाल हैं। साथ ही, इस खेल में 10 वर्ग हैं जिसमें से 6 नीले हैं और शेष लाल हैं। इनमें से एक टुकड़ा यादृच्छिक रूप से खो जाता है। इस टुकड़े के निम्नलिखित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) त्रिभुज (ii) वर्ग (iii) नीले रंग का वर्ग

(iv) लाल रंग का त्रिभुज

38. एक खेल में प्रवेश शुल्क 5 रु है। इस खेल में एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। यदि एक या दो चित आते हैं, तो श्वेता को अपना प्रवेश शुल्क वापस मिल जाता है। यदि वह तीन चित प्राप्त करे, तो उसको अपने प्रवेश शुल्क का दुगुना प्राप्त होता है, अन्यथा वह प्रवेश शुल्क की राशि हार जाती है। एक सिक्के को तीन बार फेंकने पर, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह

(i) अपना प्रवेश शुल्क हार जाएगी।

(ii) प्रवेश शुल्क का दुगुना प्राप्त करेगी।

(iii) केवल अपना प्रवेश शुल्क वापस प्राप्त करेगी।

39. एक पासे के छः फलकों पर 0, 1, 1, 1, 6, 6 अंकित हैं। ऐसे दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का योग लिख लिया जाता है।

(i) कितने विभिन्न परिणाम संभव हैं?

(ii) योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

40. एक समूह में 48 मोबाइल फोन हैं, जिसमें से 42 अच्छे हैं, 3 में थोड़ी सी खराबी है तथा 3 में बड़ी खराबी है। वर्निका एक मोबाइल फोन तभी खरीदेगी जब वह अच्छा हो, परंतु व्यापारी केवल तभी मोबाइल खरीदेगा, यदि इसमें कोई बड़ी खराबी न हो। इस समूह में से एक फोन यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता क्या है कि यह फोन

(i) वर्निका को स्वीकार होगा?

(ii) व्यापारी को स्वीकार होगा?

41. एक थैले में 24 गेंद हैं, जिसमें से x लाल, $2x$ सफेद और $3x$ नीली हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गेंद

(i) लाल नहीं हो? (ii) सफेद हो?

42. किसी मेले में, एक पेटी में 1000 कुछ कार्ड रख दिये जाते हैं। जिन पर 1 से 1000 तक संख्याएँ इस प्रकार अंकित हैं कि एक कार्ड पर एक ही संख्या अंकित है। प्रत्येक खिलाड़ी इसमें से यादृच्छिक रूप से एक कार्ड निकालता है तथा कार्ड को प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है। यदि चुने हुए कार्ड पर 500 से बड़ा एक पूर्ण वर्ग आ जाये, तो उस खिलाड़ी को एक पुरस्कार दिया जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) पहले खिलाड़ी को पुरस्कार प्राप्त होगा?

(ii) दूसरे खिलाड़ी को पुरस्कार प्राप्त होगा, यदि पहले को पुरस्कार प्राप्त हो चुका है?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: 1000 व्यक्तियों, जिनमें से प्रत्येक की आयु 20 वर्ष या उससे अधिक है, का संचयी बारंबारता बंटन (से कम प्रकार का) नीचे दिया गया है:

से कम आयु (वर्षों में)	30	40	50	60	70	80
व्यक्तियों की संख्या	100	220	350	750	950	1000

माध्य आयु निर्धारित कीजिए।

हल : पहले हम दिये हुए आँकड़ों का बारंबारता बंटन बनाते हैं और फिर माध्य परिकलित करने के लिए, वर्ग चिह्न (x_i), u_i और $f_i u_i$ अभिकलित करते हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

वर्ग	**बारंबारता** (f_i)	**वर्ग चिह्न** (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i u_i$
20-30	100	25	–2	–200
30-40	120	35	–1	–120
40-50	130	45	0	0
50-60	400	55	1	400
60-70	200	65	2	400
70-80	50	75	3	150
	$f_i = 1000$			$f_i u_i = 630$

यहाँ हमने कल्पित माध्य $(a) = 45$ लिया है। यहाँ, $h =$ वर्ग माप (साइज) $= 10$ है।
सूत्र का प्रयोग करने पर,

माध्य $= \overline{x} = a + h \dfrac{f_i u_i}{f_i}$

$= 45 + 10 \dfrac{630}{1000}$

$= 45 + 6.3 = 51.3$

इस प्रकार माध्य आयु 51.3 वर्ष है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित बंटन का माध्य 18 है। वर्ग अंतराल 19–21 में बारंबारता f लुप्त है। f निर्धारित कीजिए।

वर्ग अंतराल	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बारंबारता	3	6	9	13	f	5	4

हल :

वर्ग अंतराल	**मध्य-बिंदु (x_i)**	**बारंबारता (f_i)**	$u_i = \dfrac{x_i - 18}{2}$	$f_i u_i$
11-13	12	3	–3	–9
13-15	14	6	–2	–12
15-17	16	9	–1	–9
17-19	18	13	0	0
19-21	20	f	1	f
21-23	22	5	2	10
23-25	24	4	3	12
		$f_i = 40 + f$		$f_i u_i = f - 8$

आइए कल्पित माध्य $(a) = 18$ लें। यहाँ $h = 2$ है।

अत:, माध्य $= \overline{x} = a + h \dfrac{f_i u_i}{f_i}$

$$= 18 + 2\left(\frac{f - 8}{40 + f}\right)$$

परंतु $\bar{x} = 18$ (दिया है)

अतः, $$18 = 18 + \frac{2(f - 8)}{40 + f}$$

या $f = 8$

अतः, वर्ग अंतराल 19 – 21 की बारंबारता 8 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : नीचे दिये हुए बंटन का माध्यक 14.4 है। x और y के मान ज्ञात कीजिए, यदि कुल बारंबारता 20 है:

वर्ग अंतराल	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारंबारता	4	x	5	y	1

हल :

वर्ग अंतराल	**बारंबारता**	**संचयी बारंबारता**
0-6	4	4
6-12	x	$4 + x$
12-18	5	$9 + x$
18-24	y	$9 + x + y$
24-30	1	$10 + x + y$

यह दिया है कि $n = 20$ है।

अतः, $10 + x + y = 20$, अर्थात्, $x + y = 10$ ...(1)

यह भी दिया हुआ है कि माध्यक = 14.4 है, जो वर्ग अंतराल 12–18 में स्थित है।

अत:, $l = 12,\ f = 5,\ \text{cf} = 4 + x,\ h = 6$

माध्यक $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right)h$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$14.4 = 12 + \frac{10 - (4 + x)}{5} \times 6$$

या $\qquad x = 4 \qquad\qquad$ ...(2)

अब, (1) और (2) से, हमें $y = 6$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 13.4

1. निम्नलिखित बंटन के लिए, माध्य प्राप्तांक ज्ञात कीजिए:

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 और उससे अधिक	80
10 और उससे अधिक	77
20 और उससे अधिक	72
30 और उससे अधिक	65
40 और उससे अधिक	55
50 और उससे अधिक	43
60 और उससे अधिक	28
70 और उससे अधिक	16
80 और उससे अधिक	10
90 और उससे अधिक	8
100 और उससे अधिक	0

2. निम्नलिखित बंटन का माध्य निर्धारित कीजिए:

प्राप्तांक	**विद्यार्थियों की संख्या**
10 से कम	5
20 से कम	9
30 से कम	17
40 से कम	29
50 से कम	45
60 से कम	60
70 से कम	70
80 से कम	78
90 से कम	83
100 से कम	85

3. निम्नलिखित आँकड़ों से एक शहर के 100 निवासियों की माध्य आयु ज्ञात कीजिए:

आयु बराबर और उससे अधिक (वर्षों में)	0	10	20	30	40	50	60	70
व्यक्तियों की संख्या	100	90	75	50	25	15	5	0

4. 70 पैकेटों में चाय के भार नीचे दी सारणी में दर्शाए गये हैं:

भार (ग्राम में)	**पैकेटों की संख्या**
200-201	13
201-202	27
202-203	18
203-204	10
204-205	1
205-206	1

इन पैकेटों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

5. उपरोक्त प्रश्न 4 का संदर्भ लीजिए। इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' का तोरण खींचिए तथा इसका प्रयोग माध्यक भार ज्ञात करने में कीजिए।

6. उपरोक्त प्रश्न 4 का संदर्भ लीजिए। इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार' के तोरण खींचिए तथा इनका माध्यक भार ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए।

7. नीचे दी सारणी 280 व्यक्तियों के वेतन दर्शाती है:

वेतन (हजार रुपयों में)	**व्यक्तियों की संख्या**
5-10	49
10-15	133
15-20	63
20-25	15
25-30	6
30-35	7
35-40	4
40-45	2
45-50	1

इन आँकड़ों का माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य 50 है, परंतु 20 – 40 और 60 – 80 वर्गों की बारंबारताएँ क्रमश: f_1 और f_2 ज्ञात नहीं हैं। ये बारंबारताएँ ज्ञात कीजिए, यदि सभी बारंबारताओं का योग 120 है।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारंबारता	17	f_1	32	f_2	19

9. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 50 है। यदि सभी बारंबारताओं का योग 90 है, तो p और q के मान ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	**बारंबारता**
20-30	p
30-40	15
40-50	25
50-60	20
60-70	q
70-80	8
80-90	10

10. 96 बच्चों की लंबाइयों (ऊँचाइयों) (cm में) का बंटन नीचे दिया गया है:

लंबाई (cm में)	बच्चों की संख्या
124-128	5
128-132	8
132-136	17
136-140	24
140-144	16
144-148	12
148-152	6
152-156	4
156-160	3
160-164	1

इन आँकड़ों के लिए, 'से कम प्रकार' की संचयी बारंबारता वक्र खींचिए और इसका बच्चों की माध्यक लंबाई ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए।

11. एक सर्वे के द्वारा 200 परिवारों के कृषि योग्य भूमि – स्वामित्व साइज नीचे सारणी में दिये हैं :

कृषि योग्य भूमि स्वामित्व का साइज (ha में)	परिवारों की संख्या
0-5	10
5-10	15
10-15	30
15-20	80
20-25	40
25-30	20
30-35	5

इन भूमि–स्वामित्वों के माध्यक और बहुलक साइज ज्ञात कीजिए।

12. किसी शहर में एक वर्ष के 66 दिन की वर्षा का रिकार्ड नीचे सारणी में दिया गया है :

वर्षा (cm में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
दिनों की संख्या	22	10	8	15	5	6

'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार के' तोरणों का प्रयोग करके माध्यक वर्षा परिकलित कीजिए।

13. किसी मोबाइल फोन पर किये गये कॉलों के समय-काल का बारंबारता बंटन नीचे दिया गया है:

समय काल (सेकंडों में)	**कॉलों की संख्या**
95-125	14
125-155	22
155-185	28
185-215	21
215-245	15

इन कॉलों का औसत समय काल (सेकंडों में) परिकलित कीजिए तथा साथ ही संचयी बारंबारता वक्र से माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

14. एक स्कूल के 50 विद्यार्थियों ने भाला फेंक प्रतियोगिता में भाग लिया। फेंकी गयी दूरियाँ (मीटर में) नीचे दी गई हैं:

दूरी (m में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	6	11	17	12	4

(i) एक संचयी बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

(ii) 'से कम प्रकार की' एक संचयी बारंबारता वक्र खींचिए और इससे फेंकी गयी माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) माध्यक के सूत्र का प्रयोग करते हुए, माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।

(iv) क्या ऊपर (ii) और (iii) में प्राप्त किये गये माध्यक बराबर हैं?

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1.	(C)	**2.**	(D)	**3.**	(C)	**4.**	(B)	**5.**	(A)
6.	(B)	**7.**	(C)	**8.**	(A)	**9.**	(D)	**10.**	(D)

प्रश्नावली 1.2

1. नहीं, क्योंकि एक पूर्णांक को $4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3$ के रूप में लिखा जा सकता है।

2. सत्य, क्योंकि $n\ (n+1)$ सदैव सम है, चूँकि n या $(n+1)$ में से एक सम होना चाहिए।

3. सत्य, क्योंकि $n\ (n+1)\ (n+2)$ सदैव 6 से विभाज्य होगा, चूँकि इन गुणनखंडों में न्यूनतम एक 2 से विभाज्य होगा तथा न्यूनतम एक गुणनखंड 3 से विभाज्य होगा।

4. नहीं। क्योंकि किसी भी पूर्णांक को $3q, 3q+1, 3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है, इसलिए वर्ग $9q^2 = 3m, 9q^2 + 6q + 1 = 3\ (3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1, 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3m + 1$ होगा।

5. नहीं। $(3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3\ (3q^2 + 2q) = 3m + 1$

6. HCF = 75, क्योंकि HCF सबसे बड़ा सार्वगुणनखंड होता है।

7. $3\times5\times7+7 = 7\ (3\times5 + 1) = 7\ (16)$, जिसके दो से अधिक गुणनखंड हैं।

8. नहीं, क्योंकि HCF (18) , LCM (380) को विभाजित नहीं करता है।

9. सांत दशमलव प्रसार, क्योंकि $\frac{987}{10500} = \frac{47}{500}$ और $500 = 5^3 \times 2^2$

$$\left[\frac{987}{10500}=\frac{329}{3500}=\frac{329}{2^2.5^3.7}=\frac{47}{2^2 5^3}=.094\right]$$

10. क्योंकि 327.7081 एक सांत दशमलव संख्या है, इसलिए q का रूप अवश्य ही $2^m.5^n$ होना चाहिए जहाँ m, n प्राकृत संख्याएँ हैं।

प्रश्नावली 1.3

8. 63 **9.** 625 **12.** 2520 cm **13.** $2^3.5^4$; 0.0514

प्रश्नावली 2.1

1. (A) **2.** (C) **3.** (D) **4.** (D) **5.** (B)
6. (A) **7.** (B) **8.** (A) **9.** (C) **10.** (A)
11. (D)

प्रश्नावली 2.2

1. (i) नहीं (ii) 0, $ax^2 + bx + c$ (iii) $deg\ p(x) < deg\ g(x)$

(iv) $\deg g(x) \leq \deg p(x)$ (v) नहीं

2. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य
(vi) असत्य (vii) असत्य

प्रश्नावली 2.3

1. $1, -\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{2}{3}, -2$ **3.** $-1, \frac{-7}{5}$ **4.** 0, –3, 5 **5.** $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}$

6. $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}$ **7.** $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ **8.** $\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$ **9.** $-2\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}$ **10.** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{7}$

प्रश्नावली 2.4

1. (i) $-2, \frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{2}, \frac{1}{8}$ (iii) $-3\sqrt{3}, \sqrt{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{2}$

2. $a = -1$ और $b = 3$ या $a = 5$, $b = -3$; शून्यक हैं : –1, 2, 5

3. $\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

4. $k = -3$

$2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ के शून्यक $1, -3, 2, -\frac{1}{2}$ हैं।

$x^2 + 2x - 3$ के शून्यक $1, -3$ हैं।

5. $\sqrt{5}, \sqrt{5}+\sqrt{2}, \sqrt{5}-\sqrt{2}$

6. $a = -1, b = -2$

1 और 2, $q(x)$ के शून्यक हैं, जो $p(x)$ के शून्यक नहीं हैं।

प्रश्नावली 3.1

1.	(D)	**2.**	(D)	**3.**	(C)	**4.**	(D)	**5.**	(D)
6.	(C)	**7.**	(C)	**8.**	(D)	**9.**	(D)	**10.**	(D)
11.	(C)	**12.**	(D)	**13.**	(C)				

प्रश्नावली 3.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं

2. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) नहीं

3. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) नहीं

4. नहीं **5.** असत्य **6.** सत्य नहीं

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\lambda = -1$ (ii) $\lambda = 1$ (iii) ± 1 के अतिरिक्त λ के सभी वास्तविक मान

2. $k = -6$ **3.** $a = 3, b = 1$

4. (i) 10 के अतिरिक्त p के सभी वास्तविक मान (ii) $p = 1$

(iii) $\frac{9}{10}$ के अतिरिक्त p के सभी वास्तविक मान (iv) -4 के अतिरिक्त p के सभी वास्तविक मान

(v) $p = 4, q = 8$

5. परस्पर नहीं काटते

6. $x - y = -4$

$2x + 3y = 7$; अपरिमित रूप से अनेक युग्म।

7. 31, $\frac{-5}{7}$ **8.** $x = 1, y = 4$

9. (i) $x = 1.2,\ y = 2.1$ (ii) $x = 6,\ y = 8$ (iii) $x = 3, y = 2$

(iv) $x = \frac{1}{6},\ y = \frac{1}{4}$ (v) $x = 1,\ y = -1$ (vi) $x = a^2, y = b^2$

(vii) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{-3}{2}$

10. $x = 340, y = -165;\ \lambda = -\frac{1}{2}$

11. (i) संगत; $x = -1, y = -1$ (ii) असंगत

(iii) संगत। इसका हल $y = 3 - x$ से दिया जाता है जहाँ x का कोई भी मान हो सकता है। अर्थात् यहाँ अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

12. (2,0), (0, 4), (0, –4); 8 वर्ग इकाई **13.** $x = y$; अपरिमित रूप से अनेक रेखाएँ

14. $a = 5, b = 2$ **15.** 55º, 85º

16. सलीम की आयु = 38 वर्ष, पुत्री की आयु = 14 वर्ष

17. 40 वर्ष **18.** 40, 48 **19.** हाल A में 100 विद्यार्थी, हाल B में 80 विद्यार्थी

20. 10 रु, 3 रु **21.** 100

22. $x = 20, y = 30, \angle A = 130°, \angle B = 100°, \angle C = 50°, \angle D = 80°$

प्रश्नावली 3.4

1. $x = 1, y = 4; 4:1$ **2.** (0, 0), (4, 4), (6, 2) **3.** 8 वर्ग इकाई

4. $4x + 4y = 100, 3x = y + 15$, जहाँ x रु और y रु क्रमशः एक पेन और पेंसिल बाक्स के मूल्य हैं; 10 रु, 15 रु

5. (1, 0), (2, 3), (4, 2) **6.** 10 km/h, 40 km/h

7. 2.5 km/h **8.** 10 km/h, 4 km/h **9.** 83

10. 2500 रु, 30 रु **11.** 600 रु, 400 रु

12. 12000 रु योजना A में, 10000 रु योजना B में **13.** 500

प्रश्नावली 4.1

1. (D)	**2.** (C)	**3.** (C)	**4.** (A)	**5.** (B)
6. (D)	**7.** (B)	**8.** (C)	**9.** (B)	**10.** (A)
11. (C)				

प्रश्नावली 4.2

1. (i) नहीं, क्योंकि विविक्तकर $= -7 < 0$ है।

(ii) हाँ, क्योंकि विविक्तकर $= 9 > 0$ है।

(iii) नहीं, क्योंकि विविक्तकर $= 0$ है।

(iv) हाँ, क्योंकि विविक्तकर$= 4 > 0$ है।

(v) नहीं, क्योंकि विविक्तकर $= -64 < 0$ है।

(vi) हाँ, क्योंकि विविक्तकर $= (2+2\sqrt{2})^2 > 0$ है।

(vii) हाँ, क्योंकि विविक्तकर $= 1 > 0$ है।

(viii) नहीं, क्योंकि विविक्तकर $= -7 < 0$ है।

(ix) हाँ, क्योंकि विविक्तकर $= 1 > 0$ है।

(x) हाँ, क्योंकि विविक्तकर $= 8 > 0$ है।

2. (i) असत्य, उदाहरणार्थ : $x^2 = 1$ एक द्विघात समीकरण है, जिसके दो मूल हैं।

(ii) असत्य, उदाहरणार्थ : $x^2 + 1 = 0$ का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

(iii) असत्य, उदाहरणार्थ : $x^2+1 = 0$ एक द्विघात समीकरण है, जिसका कोई वास्तविक मूल नहीं है।

(iv) सत्य, क्योंकि प्रत्येक द्विघात बहुपद के अधिकतम दो शून्यक होते हैं।

(v) सत्य, क्योंकि यदि $ax^2+bx+c = 0$ में a और c के विपरीत चिह्न हों, तो $ac<0$ और इसलिए $b^2-4ac > 0$ है।

(vi) सत्य, क्योंकि यदि $ax^2+bx+c = 0$ में a और c के समान चिह्न हैं तथा $b = 0$ है, तो $b^2-4ac = -4ac < 0$ है।

3. $x^2-3x + 1 = 0$ पूर्णांकीय गुणांकों वाला समीकरण है, परंतु इसके मूल पूर्णांक नहीं हैं।

4. $x^2 - 6x + 7 = 0$, जिसके मूल $3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$ हैं।

5. हाँ, $\sqrt{3}x^2 - 7\sqrt{3}x + 12\sqrt{3} = 0$ जिसके मूल 3, 4 हैं।

6. नहीं **7.** हाँ

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $\frac{5}{2}, -1$ (ii) $-1, -\frac{8}{5}$ (iii) $-\frac{4}{3}, 3$ (iv) 5, 2

(v) $-3\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (vii) $\sqrt{11}+3, \sqrt{11}-3$

2. (i) $-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{1}{2}, 3$ (iii) $\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}, -2\sqrt{5}$

(v) $\frac{1}{21}, \frac{1}{21}$

प्रश्नावली 4.4

1. (i) वास्तविक मूलों का अस्तित्व है; मूल हैं: $\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}$

(ii) वास्तविक मूलों का अस्तित्व है; मूल हैं: $2, -\frac{1}{2}$

(iii) वास्तविक मूलों का अस्तित्व है; मूल हैं: $\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{51}}{5}, \frac{1}{5}-\frac{\sqrt{51}}{5}$

(iv) वास्तविक मूलों का अस्तित्व है; मूल हैं: $4+\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(v) वास्तविक मूलों का अस्तित्व है; मूल हैं: $-7\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$

2. प्राकृत संख्या 12 है।

3. प्राकृत संख्या 8 है।

4. रेलगाड़ी की प्रारंभिक चाल 45 km/h है।

5. अब ज़ेबा की आयु 14 वर्ष है।

6. निशा की आयु 5 वर्ष है और आशा की आयु 27 वर्ष है।

7. तालाब की लंबाई 34 m है और चौड़ाई 24 m है। **8.** 14

प्रश्नावली 5.1

1.	(D)	**2.**	(B)	**3.**	(B)	**4.**	(B)	**5.**	(C)
6.	(B)	**7.**	(B)	**8.**	(B)	**9.**	(C)	**10.**	(A)
11.	(C)	**12.**	(D)	**13.**	(B)	**14.**	(C)	**15.**	(A)
16.	(A)	**17.**	(C)	**18.**	(A)				

प्रश्नावली 5.2

1. (i), (iv) और (vii) AP हैं, क्योंकि प्रत्येक में $a_{k+1} - a_k$, k के विभिन्न मानों के लिए समान है।

2. असत्य, क्योंकि $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$ है।

3. हाँ, $a_{30} - a_{20} = (30-20)d = 10d = -40$

4. ऐसी दो AP के संगत किन्ही दो पदों का अंतर वही होता है जो उनके प्रथम पदों का होता है।

5. नहीं।

6. नहीं, क्योंकि प्रत्येक km के बाद कुल किराया (रु में) 15, 23, 31, 39,... है।

7. (i), (ii) और (iii) से AP बनती है, क्योंकि इससे बनने वाली सूची में प्रत्येक उत्तरोत्तर पद पिछले पद में एक स्थिर संख्या जोड़ कर प्राप्त होता है।

8. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं

प्रश्नावली 5.3

1. $(A_1) \rightarrow (B_4)$

$(A_2) \rightarrow (B_5)$

$(A_3) \rightarrow (B_1)$

$(A_4) \rightarrow (B_2)$

2. (i) $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3$ (iii) $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$

(iv) $(a+2) + (b+1), (a+2) + (b+2), (a+3) + (b+2)$

(v) $5a+4, 6a+5, 7a+6$

3. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ (ii) $-5, -8, -11$ (iii) $\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}$

4. $a = -1, b = 15, c = 31$ **5.** 3, 7, 11, 15, ... **6.** $d = -\frac{1}{5}, n = 27$

7. 1, 6, 11, 16, ... **8.** 126 **10.** हाँ, 17वाँ पद **11.** $k = 0$

12. 67, 69, 71 **13.** 40°, 60°, 80°

14. 16वाँ पद; –21 **15.** –1 **16.** –78 **17.** 12वाँ पद

18. 73 **19.** 3 **20.** $n = 6, d = 10$

21. (i) –9400 (ii) $\frac{7n-1}{2}$ (iii) $\frac{11(11a-6b)}{a+b}$ **22.** 16वाँ पद; –632

23. –780 **24.** 5, 13, 21, ... **25.** $k = 27$ **27.** –510

28. 100 **29.** 330 **30.** 1170 **31.** 504

32. $n = 5, 11$ **33.** 11 **34.** 800 रु **35.** 25 महीने

प्रश्नावली 5.4

1. 970 **2.** (i) 12250 (ii) 12750 (iii) 75250

3. 3 **4.** 3, 7, 11, 15, ... **5.** (i) 1683 (ii) 13167

6. 1:3; 5:49 **8.** 50 **9.** 3900 रु, 44500रु

10. 728 m; 26 m.

प्रश्नावली 6.1

1. (C) **2.** (B) **3.** (C) **4.** (A) **5.** (D)
6. (B) **7.** (B) **8.** (A) **9.** (B) **10.** (C)
11. (A) **12.** (C)

प्रश्नावली 6.2

1. नहीं; $25^2 \neq 5^2 + 24^2$ **2.** नहीं; $\angle D = \angle R$ परंतु $\angle F \neq \angle P$

3. हाँ, क्योंकि $\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{BR}$ है। **4.** हाँ, SAS कसौटी।

5. नहीं; $\Delta QPR \sim \Delta STM$ **6.** नहीं; संगत भुजाएँ समानुपाती भी होनी चाहिए।

7. हाँ, क्योंकि दो संगत भुजाएँ और परिमाप बराबर हैं, इनकी तीसरी भुजाएँ भी बराबर होनी चाहिए।

8. हाँ AAA कसौटी

9. नहीं; अनुपात $\frac{9}{25}$ होगा।

10. नहीं, इसके लिए $\angle P$ को $90°$ होना चाहिए।

11. हाँ; AA कसौटी

12. नहीं, कोणों को समानुपाती भुजाओं के दोनों युग्मों के अंतर्गत कोण होने चाहिए।

प्रश्नावली 6.3

2.	$x = 2$	**4.**	9:1	**6.**	$4\sqrt{3}$ cm	**7.**	18 cm
8.	1:3	**9.**	60 cm	**10.**	108 cm^2	**12.**	12 cm
13.	$\frac{55}{3}$ cm	**14.**	10 m	**15.**	8 m		

प्रश्नावली 6.4

1.	5 cm, 2 cm	**2.**	BC = 6.25 cm, EF = 16.8 cm	**5.**	0.8 m
6.	8 km	**7.**	20.4 m	**8.**	9 m
9.	$2\sqrt{5}$ cm, 6 cm	**10.**	$2\sqrt{5}$ cm, 5 cm, $3\sqrt{5}$ cm	**14.**	8 cm, 12 cm, 16 cm

प्रश्नावली 7.1

1.	(B)	**2.**	(B)	**3.**	(C)	**4.**	(B)	**5.**	(C)
6.	(B)	**7.**	(C)	**8.**	(B)	**9.**	(D)	**10.**	(A)
11.	(B)	**12.**	(D)	**13.**	(B)	**14.**	(A)	**15.**	(A)
16.	(D)	**17.**	(D)	**18.**	(B)	**19.**	(B)	**20.**	(C)

प्रश्नावली 7.2

1. सत्य। क्योंकि दोनों त्रिभुजों की तीनों भुजाएँ समानुपाती हैं।

2. सत्य। तीनों बिंदु रेखा $x = -4$ पर स्थित हैं।

3. असत्य। क्योंकि दो बिंदु y – अक्ष पर स्थित हैं तथा एक बिंदु चतुर्थांश I में स्थित है।

4. असत्य, क्योंकि $PA=\sqrt{2}$ और $PB=\sqrt{10}$, अर्थात् $PA \neq PB$ है।

5. सत्य, क्योंकि ar $(\Delta ABC) = 0$ है।

6. असत्य, क्योंकि विकर्ण परस्पर समद्विभाजित नहीं करते।

7. सत्य, वृत्त की त्रिज्या $= 5$ और $OP > 5$ है।

8. असत्य, क्योंकि $AP \neq AQ$ है।

9. सत्य, क्योंकि P रेखाखंड AB को 1:2 के अनुपात में विभाजित करता है।

10. सत्य, क्योंकि B रेखाखंड AC को 2:7 के अनुपात में विभाजित करता है।

11. असत्य, क्योंकि $PC = \sqrt{26} < 6$, P वृत्त के अंदर स्थित होगा।

12. सत्य। दोनों विकर्णों के मध्य बिंदु एक ही हैं तथा विकर्ण बराबर लंबाइयों के हैं।

प्रश्नावली 7.3

1. विषमबाहु त्रिभुज **2.** (9, 0), (5, 0), 2 बिंदु

3. आयत **4.** $a = -3$

5. AB का मध्य-बिंदु (–3, 5) है। अपरिमित रूप से अनेक बिंदु। वस्तुतः, वे सभी बिंदु जो समीकरण $2x+y+1=0$ के हल हैं।

6. $\frac{-1}{2}, 0$, समद्विबाहु त्रिभुज **7.** $\frac{19}{14}$

8. $y = -3, -5,\ PQ = \sqrt{290},\ 13\sqrt{2}$ **9.** 0

10. 6:7, $\frac{-34}{13}, 0$ **11.** 1:5 **12.** $a = 1 \quad b = -3$

13. $k = 22,\ AB = 2\sqrt{61}$ **14.** $a = 5, 3$ **15.** 19

16. 11 **17.** $a = 2$, क्षेत्रफल $= 6$ वर्ग इकाई

18. $\frac{4}{5}, \frac{21}{5}$ **19.** $2, \frac{1}{2}$ **20.** 8:1, $\frac{8}{3}, \frac{-1}{9}$

प्रश्नावली 7.4

1. $\left(0,\ 3-4\sqrt{3}\right)$ **2.** $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई

3. (i) $\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}$ (ii) $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

(iii) वही जो (ii) में है। (iv) वही जो (ii) में है।

4. $a=-3, h=\frac{12\sqrt{26}}{13}$

5. हाँ, जसपाल को बिंदु (7, 5) पर रखना चाहिए।

6. घर से बैंक = 5 km

बैंक से स्कूल = 10 km

स्कूल से कार्यालय = 12 km

कुल तय की गई दूरी = 27 km

घर से कार्यालय की दूरी = 24.6 km

अतिरिक्त दूरी = 2.4 km

प्रश्नावली 8.1

1.	(B)	**2.**	(A)	**3.**	(B)	**4.**	(C)	**5.**	(B)
6.	(B)	**7.**	(C)	**8.**	(A)	**9.**	(A)	**10.**	(D)
11.	(B)	**12.**	(C)	**13.**	(C)	**14.**	(B)	**15.**	(A)

प्रश्नावली 8.2

1. सत्य **2.** असत्य **3.** असत्य [sin 80° – sin 10° = धनात्मक : जैसे जैसे θ बढ़ता है, sin θ का मान बढ़ता जाता है।]

4.	सत्य	**5.**	सत्य	**6.**	असत्य	**7.**	असत्य	**8.**	असत्य
9.	असत्य	**10.**	असत्य	**11.**	असत्य	**12.**	सत्य		

प्रश्नावली 8.3

8. 30° **9.** $\frac{-1}{2}$ **10.** $\frac{15}{2}$ m **11.** 1 **12.** 90° **14.** 45°

प्रश्नावली 8.4

3. $10\left(\sqrt{3}+1\right)$ m **7.** $25\sqrt{3}$ m **13.** $10\sqrt{3}$ m; 10 m **14.** h (cot α – cot β)

16. $5\left(\sqrt{3}+3\right)$ m **18.** 8 m

प्रश्नावली 9.1

1. (B) **2.** (D) **3.** (C) **4.** (A) **5.** (D)

6. (C) **7.** (A) **8.** (A) **9.** (D) **10.** (B)

प्रश्नावली 9.2

1. असत्य **2.** असत्य **3.** सत्य **4.** सत्य **5.** सत्य

6. असत्य **7.** सत्य **8.** असत्य **9.** सत्य **10.** सत्य

प्रश्नावली 9.3

1. 3 cm

प्रश्नावली 9.4

3. 20 cm **5.** 4.8 cm **7.** 30° **11.** $\frac{20}{3}$ cm

12. 70° **13.** $8\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ **14.** 24 cm

प्रश्नावली 10.1

1. (D) **2.** (B) **3.** (A) **4.** (C) **5.** (B)

6. (D)

प्रश्नावली 10.2

1. सत्य	**2.** असत्य	**3.** असत्य	**4.** सत्य

प्रश्नावली 10.3

2. हाँ

प्रश्नावली 10.4

1. 3.25 cm	**2.** हाँ, हाँ	**3.** 4 cm	**6.** 8 cm	**7.** नहीं

प्रश्नावली 11.1

1. (B)	**2.** (A)	**3.** (B)	**4.** (A)	**5.** (B)
6. (A)	**7.** (D)	**8.** (B)	**9.** (C)	**10.** (D)

प्रश्नावली 11.2

1. नहीं, वृत्त की त्रिज्या $\frac{a}{2}$ है।

2. हाँ, वर्ग की भुजा $2a$ cm है।

3. नहीं, बाहरी वर्ग की भुजा = आंतरिक वर्ग का विकर्ण

4. नहीं, यह केवल लघु वृत्तखंड के लिए सत्य है।

5. नहीं यह πd है।

6. हाँ, एक चक्कर में तय की गई दूरी = $2\pi r$ है।

7. नहीं, यह त्रिज्या के मान पर निर्भर होगा।

8. हाँ, यह एक ही वृत्त की चापों के लिए सत्य होगा।

9. नहीं, यह एक ही वृत्त की चापों के लिए सत्य होगा।

10. नहीं, यह एक ही वृत्त की चापों के लिए सत्य होगा।

11. हाँ, वृत्त की त्रिज्या आयत की चौड़ाई है।

12. हाँ, इनकी त्रिज्याएँ बराबर हैं।

13. हाँ, इनकी त्रिज्याएँ बराबर हैं।

14. नहीं, वर्ग का विकर्ण p cm है।

प्रश्नावली 11.3

1. 33 cm **2.** $(16\pi - 32)$ cm^2 **3.** 308 cm^2

4. 500 **5.** 154 m^2 **6.** $(380 + 25\pi)cm^2$

7. 54.5 cm^2 **8.** $(32 + 2\pi)m^2$ **9.** $(248 - 4\pi)m^2$

10. $\frac{308}{3} - 49\sqrt{3}\ cm^2$ **11.** 30.96 cm^2 **12.** 39.25 cm^2

13. 308 cm^2 **14.** 15246 m^2 **15.** 1386 cm^2 **16.** $\frac{60}{\pi}cm$

प्रश्नावली 11.4

1. 26400 रु **2.** 560 **3.** $\left(24\sqrt{21} - 77\right)m^2$

4. $\left(75.36 - 36\sqrt{3}\right)cm^2$ **5.** 3061.50 रु **6.** 196 cm^2

7. 1.967 cm^2 (लगभग) **8.** 8.7 cm^2 **9.** 42 cm^2

10. 168 cm^2 **11.** 4.3 m^2 **12.** 800 cm^2 **13.** 1 : 3 : 5

14. $45\frac{5}{6}cm^2$ **15.** $73\frac{1}{3}cm$, क्षेत्रफल: $\frac{154}{3}cm^2$, 154 cm^2; चॉप लंबाइयाँ: $\frac{44}{3}cm$;

दो भिन्न वृत्तों के दो त्रिज्यखंडों के चॉपों की लंबाइयाँ बराबर हो सकती हैं, परंतु इनके क्षेत्रफल बराबर होना आवश्यक नहीं हैं।

17. $(180 - 8\pi)\ cm^2$ **18.** 40 **19.** $\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\ cm^2$ **20.** 462 cm^2

प्रश्नावली 12.1

1. (A)	**2.** (A)	**3.** (B)	**4.** (B)	**5.** (C)
6. (D)	**7.** (A)	**8.** (A)	**9.** (B)	**10.** (A)
11. (B)	**12.** (C)	**13.** (A)	**14.** (A)	**15.** (A)
16. (B)	**17.** (C)	**18.** (A)	**19.** (A)	**20.** (D)

प्रश्नावली 12.2

1. असत्य	**2.** असत्य	**3.** असत्य	**4.** असत्य	**5.** असत्य
6. सत्य	**7.** असत्य	**8.** सत्य		

प्रश्नावली 12.3

1. 6 cm **2.** 84 **3.** 15 cm **4.** 7:1 **5.** 160 cm^2

6. 277 cm^3 **7.** 855 cm^2 (लगभग)

8. 14 cm, 7 cm; 132 cm^3, 66 cm^3; 396 cm^3 **9.** 327.4 cm^3

10. 150 **11.** 1500 **12.** 2541 **13.** 12960 **14.** 450

प्रश्नावली 12.4

1. 28.44 cm **2.** 8.6 m **3.** 3960 cm^3, 29.7 kg **4.** 480000 शब्द

5. 51 मिनट 12 सेकंड **6.** 74.25m^3,80.61 m^2 **7.** 2250 रु

8. 2 घंटे **9.** 112 m **10.** 0.5 cm **11.** 487.6 cm^3

12. 230.12 रु **13.** 36 cm, 43.27 cm **14.** 301.44 cm^2, 377.1 cm^3

15. 4 m **16.** 54 **17.** 1.584 m^3

18. 90 cm **19.** 2.5 cm **20.** 170.8 cm^3

प्रश्नावली 13.1

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (A)	**4.** (C)	**5.** (B)
6. (B)	**7.** (B)	**8.** (C)	**9.** (C)	**10.** (C)
11. (A)	**12.** (D)	**13.** (D)	**14.** (A)	**15.** (C)
16. (B)	**17.** (C)	**18.** (A)	**19.** (A)	**20.** (A)
21. (D)	**22.** (B)	**23.** (C)	**24.** (A)	**25.** (C)
26. (B)				

प्रश्नावली 13.2

1. सदैव नहीं, क्योंकि वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक परिकलित करते समय, यह कल्पना की जाती है कि वर्गों में प्रेक्षण एकरूपता से वितरित होते हैं (अर्थात् समदूरस्थ हैं)।

2. आवश्यक नहीं। आँकड़ों का माध्य a (कल्पित माध्य) के चुनाव पर निर्भर नहीं करता।

3. नहीं, यह सदैव नहीं होता है। इन तीनों के मापक समान हो सकते हैं, परंतु यह आँकड़ों पर निर्भर करता है।

4. सदैव नहीं। यह आँकड़ों पर निर्भर करता है।

5. नहीं, परिणाम समप्रायिक नहीं हैं। उदाहरणार्थ, परिणाम 'एक लड़की' का अर्थ *gbb, bgb, bbg* है, 'तीन लड़कियों का अर्थ' *ggg* है, इत्यादि।

6. नहीं। परिणाम समप्रायिक नहीं है। अन्य की तुलना में 3 के आने की अधिक संभावना है।

7. पीहू। अपूर्व द्वारा 36 प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{36}$, जबकि पीहू द्वारा 36 प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$ है।

8. हाँ, प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, क्योंकि दोनों परिणाम समप्रायिक है।

9. नहीं, परिणाम '1' और '1 नहीं' समप्रायिक नहीं हैं। $p(1)=\frac{1}{6}, p(1\text{नहीं})=\frac{5}{6}$ है।

10. नहीं, परिणाम समप्रायिक नहीं हैं। परिणाम 'कोई चित नहीं' का अर्थ 'TTT' है; परिणाम 'एक चित' का अर्थ THT, HTT, TTH है, इत्यादि। P (TTT) = $\frac{1}{8}$, P (एक चित) = $\frac{3}{8}$ इत्यादि।

11. नहीं, परिणाम 'चित' और 'पट' प्रत्येक बार समप्रायिक है,चाहे आप कुछ उछालों में कुछ भी प्राप्त करें।

12. यह चित या पट कुछ भी हो सकता है, क्योंकि प्रत्येक उछाल में ये परिणाम समप्रायिक हैं।

13. नहीं, चित और पट समप्रायिक हैं। इसलिए, चौथी उछाल में चित के आने की अधिक संभावना होने का प्रश्न ही नहीं उठता।

14. हाँ। विचार की गई स्थिति में, परिणाम 'विषम संख्या' और 'सम संख्या' समप्रायिक हैं।

प्रश्नावली 13.3

1. 5.5 **2.** 35 **3.** 12.93 **4.** 26 **5.** 356.5 रु

6. 109. 92 **7.** 123.4 kg **8.** 14.48 km/L; नहीं, निर्माता औसत माइलेज से 1.52 km/h अधिक माइलेज का दावा कर रहा है।

9.

भार (kg में)	व्यक्तियों की संख्या
45 से कम	4
50 से कम	8
55 से कम	21
60 से कम	26
65 से कम	32
70 से कम	37
75 से कम	39
80 से कम	40

10.

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10
10-20	40
20-30	80
30-40	140
40-50	170
50-60	130
60-70	100
70-80	70
80-90	40
90-100	20

11.

प्राप्तांक	प्रत्याशियों की संख्या
0-10	2
10-20	2
20-30	3
30-40	4
40-50	6
50-60	6
60-70	5
70-80	2
80-90	4

12. $a = 12, b = 13, c = 35, d = 8, e = 5, f = 50$

13.

(i) से कम प्रकार		(ii) से अधिक प्रकार	
आयु (वर्षों में)	विद्यार्थियों की संख्या	आयु (वर्षों में)	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	0	10 से अधिक या उसके बराबर	300
20 से कम	60	20 से अधिक या उसके बराबर	240
30 से कम	102	30 से अधिक या उसके बराबर	198
40 से कम	157	40 से अधिक या उसके बराबर	143
50 से कम	227	50 से अधिक या उसके बराबर	73
60 से कम	280	60 से अधिक या उसके बराबर	60
70 से कम	300		

14.

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0-20	17
20-40	5
40-60	7
60-80	8
80-100	13

15. 1263.15 रु **16.** 109.17 km/h **17.** 11875 रु

18. 201.7 kg **19.** (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ **20.** (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) 0

21. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) 0 **22.** $\frac{4}{9}$

23. $P(2)=\frac{1}{18}$, $P(3)=\frac{1}{9}$, $P(4)=\frac{1}{6}$, $P(5)=\frac{1}{6}$, $P(6)=\frac{1}{6}$, $P(7)=\frac{1}{6}$, $P(8)=\frac{1}{9}$, $P(9)=\frac{1}{18}$

24. $\frac{3}{4}$ **25.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ **26.** $\frac{2}{9}$

27. (i) $\frac{5}{11}$ (ii) $\frac{7}{22}$ (iii) $\frac{17}{22}$

28. (i) $\frac{13}{49}$ (ii) $\frac{3}{49}$ **29.** (i) $\frac{10}{49}$ (ii) $\frac{1}{49}$

30. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{3}{10}$ (iii) $\frac{3}{5}$

31. (i) $\frac{14}{99}$ (ii) $\frac{85}{99}$ **32.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{9}{100}$

33. $\frac{21}{26}$ **34.** 0.69 **35.** $\frac{11}{75}$

36. P (खराब नहीं) = $\frac{3}{4}$, P (दूसरा बल्ब खराब) = $\frac{5}{23}$

37. (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{18}$

38. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{3}{4}$

39. (i) छः प्राप्तांक (0, 1, 2, 6, 7, 12) (ii) $\frac{1}{3}$

40. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{15}{16}$ **41.** (i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{1}{3}$

42. (i) 0.009 (ii) $\frac{8}{999}$

[**संकेत : (ii)** जब प्रथम खिलाड़ी पुरस्कार जीत लेता है, तो 500 से अधिक पूर्ण वर्गों की संख्या 1 कम हो जाती है।]

प्रश्नावली 13.4

1. 51.75 **2.** 48.41 **3.** 31 वर्ष **4.** 201.96 g

7. माध्यक वेतन = 13420 रु , बहुलक वेतन = 12730 रु

8. $f_1 = 28, f_2 = 24$ **9.** $p = 5, q = 7$

11. माध्यक = 17.81 हेक्टेयर, बहुलक = 17.76 हेक्टेयर

12. माध्यक वर्षा = 21.25 cm

13. औसत = 170.3 sec.

14. (i)

दूरी (m में)	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
0-20	6	6
20-40	11	17
40-60	17	34
60-80	12	46
80-100	4	50

(iii) 49.41 m.

सेट-I

प्रश्न-पत्र का प्रारूप
गणित
कक्षा 10

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

प्रश्नों की विभिन्न विमाओं पर भार और अंकों का बंटन निम्नलिखित प्रकार से होगा:

(A) विषयवस्तु/विषय इकाई पर भार

क्र.सं.	विषय इकाई	अंक
1.	संख्या पद्धतियाँ	04
2.	बीजगणित	20
3.	त्रिकोणमिति	12
4.	निर्देशांक ज्यामिति	08
5.	ज्यामिति	16
6.	मेंसुरेशन	10
7.	साँख्यिकी और प्रायिकता	10
	योग :	80

(B) प्रश्नों के प्रकारों पर भार

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक
1.	MCQ	01	10	10
2.	SAR	02	05	10
3.	SA	03	10	30
4.	LA	06	05	30
		योग	**30**	**80**

(C) विकल्पों की योजना

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, अर्थात् व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। परंतु इसमें 2 अंकों का एक प्रश्न, तीन-तीन अंकों वाले तीन प्रश्न और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प प्रदान किए गए हैं।

(D) प्रश्नों के कठिनाई स्तर पर भार

क्र.सं.	प्रश्नों के अनुमानित कठिनाई स्तर	अंकों का प्रतिशत
1.	सरल	20
2.	औसत	60
3.	कठिन	20

टिप्पणी : किसी प्रश्न का कठिनाई स्तर व्यक्ति दर व्यक्ति बदल सकता है। इसी रूप में, प्रत्येक प्रश्न के संदर्भ में मूल्यांकन, परीक्षा देने वाले संपूर्ण समूहों से व्यापक प्रत्याशा के आधार पर पेपर-सेटर/शिक्षक द्वारा किया जाएगा। यह व्यवस्था केवल प्रश्न पत्र को उसके भारों के संदर्भ में संतुलित बनाने के लिए है, न कि किसी स्तर पर अंकन का प्रतिरूप निर्धारित करने के लिए।

ब्लू प्रिंट

गणित

कक्षा 10

प्रश्न का प्रकार → / इकाइयाँ ↓	MCQ	SAR	SA	LA	योग
संख्या पद्धतियाँ	2(2)	2(1)	-	-	4(3)
बीजगणित बहुपद, दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म, द्विघात समीकरण, समांतर श्रेढ़ियाँ	3(3)	2(1)	9(3)	6(1)	20(8)
त्रिकोणमिति त्रिकोणमिति का परिचय त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	1(1)	2(1)	3(1)	6(1)	12(4)
निर्देशांक ज्यामिति	1(1)	4(2)	3(1)	-	8(4)
ज्यामिति त्रिभुज, वृत्त, रचनाएँ	1(1)	-	9(3)	6(1)	16(5)
मेंसुरेशन वृत्त से संबंधित क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	1(1)	-	3(1)	6(1)	10(3)
साँख्यिकी और प्रायिकता	1(1)	-	3(1)	6(1)	10(3)
योग	**10(10)**	**10(5)**	**30(10)**	**30(5)**	**80(30)**

सारांश

बहु विकल्पीय प्रश्न (MCQ)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 10
तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SAR)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 10
संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SA)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 30
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 30
योग	**30**	**80**

गणित

कक्षा 10

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

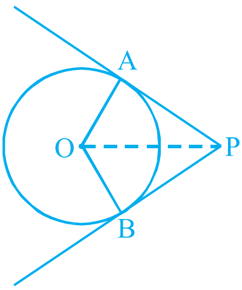
सामान्य निर्देश

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. प्रश्न पत्र में 30 प्रश्न हैं, जो चार खंडों A, B, C और D में विभाजित हैं। खंड A में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है, खंड B में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 2 अंक का है, खंड C में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 3 अंक का है तथा खंड D में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 6 अंक का है।
3. व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। परंतु 2 अंकों का एक प्रश्न, 3 अंकों वाले तीन प्रश्न तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।
4. रचनाओं के प्रश्नों में, रचनाएँ स्वच्छ तथा ठीक दिए हुए मापनों के अनुसार होनी चाहिए।
5. कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड A

1. संख्या $\frac{47}{2^3 5^2}$ के दशमलव प्रसार का कितने दशमलव स्थानों के बाद अंत होगा?
   (A) 5 (B) 2 (C) 3 (D) 1
2. यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका कहती है कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, दो अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है, ताकि $a = bq + r$ है, जहाँ
   (A) $0 \le r \le a$ (B) $0 < r < b$ (C) $0 \le r \le b$ (D) $0 \le r < b$
3. बहुपद $p(x) = (x-2)^2 + 4$ के शून्यकों की संख्या है
   (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3
4. रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का युग्म असंगत कहलाता है, यदि
   (A) $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$ (B) $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (C) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ne \frac{c_1}{c_2}$ (D) $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{c_1}{c_2}$
5. k का सबसे छोटा मान, जिसके लिए समीकरण $x^2 + 6x + 9 = 0$ के मूल वास्तविक होंगे, है:
   (A) – 6 (B) 6 (C) 36 (D) –3
6. बिंदु P और Q के निर्देशांक क्रमश: (4, –3) और (–1, 7) हैं। तब, रेखाखंड PQ पर स्थित उस बिंदु R के निर्देशांक का भुज, जबकि $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{5}$ हो, निम्नलिखित है

(A) $\frac{18}{5}$ (B) $\frac{17}{5}$ (C) $\frac{17}{8}$ (D) 1



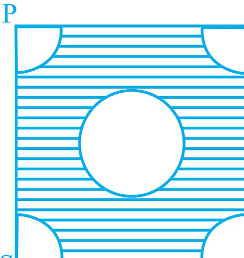
7. संलग्न आकृति में, PA और PB केंद्र O वाले वृत्त पर बिंदु P से दो स्पर्श रेखाएँ हैं। तब, चतुर्भुज OAPB होना चाहिए

(A) वर्ग (B) समचतुर्भुज

(C) चक्रीय चतुर्भुज (D) समांतर चतुर्भुज

8. यदि किसी कोण θ के लिए, $\cot 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो $\sin 3\theta$, जहाँ $2\theta \le 90°$ हो, का मान होगा

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



9. 4 cm की भुजा वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से त्रिज्या 1 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश काटा गया है तथा साथ ही व्यास 2 cm वाला एक वृत्त भी आकृति में दर्शाए अनुसार काटा गया है। शेष (छायांकित) भाग का क्षेत्रफल है

(A) $(16 - 2\pi)\ cm^2$ (B) $(16 - 5\pi)\ cm^2$

(C) $2\pi\ cm^2$ (D) $5\pi\ cm^2$

10. अंग्रेजी वर्णमाला का एक अक्षर यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस अक्षर के शब्द 'MATHEMATICS' का एक अक्षर होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{11}{26}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{9}{26}$ (D) $\frac{4}{13}$

खंड B

11. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या n है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होती है? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

12. nवें पद के सूत्र का प्रयोग किए बिना, ज्ञात कीजिए कि AP : 5, 17, 29, 41, ... का कौन सा पद इसके 15वें पद से 120 अधिक है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

अथवा

क्या AP : 3, 7, 11, ... का कोई पद 144 है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

13. बिंदु P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः (3, 4), (3, –4) और (–3, 4) हैं। क्या त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

14. किसी रेखाखंड की लंबाई 10 इकाई है। यदि इसका एक सिरा (2, –3) है तथा दूसरे सिरे का भुज 10 है, तो इसकी कोटि या तो 3 है या –9 है। अपने इन दो उत्तरों के लिए औचित्य दीजिए।

15. $\frac{3}{\operatorname{cosec}\theta}$ का अधिकतम मान क्या है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

खंड C

16. बहुपद $p(x) = 4\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यापित कीजिए।

अथवा

किसी बहुपद $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ क्रमशः $x - 3$ और $-3x + 5$ हैं। बहुपद $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

17. समीकरणों $5x - y = 5$ और $3x - y = 3$ को आलेखीय रूप से हल कीजिए।

18. यदि किसी AP के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इस AP का 10वाँ पद तथा n वाँ पद क्या है?

अथवा

AP : 9, 17, 25, ... में योग 636 प्राप्त करने के लिए कितने पदों को लेना चाहिए?

19. यदि (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5) इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

20. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB, BC और माध्यिका AD क्रमशः ΔPQR की भुजाओं PQ, QR और माध्यिका PM के समानुपाती हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔABC ~ ΔPQR है।

21. त्रिज्या 4cm वाले वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि स्पर्श बिंदु D भुजा BC को दो भागों BD और DC में विभाजित करता है, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 7 cm हैं। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।

22. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 6 cm और शीर्षलंब 5 cm हैं तथा फिर ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ हैं।

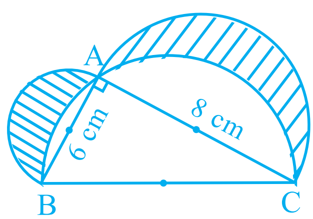
23. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}$ है।

अथवा

मान निकालिए :

$${\frac{3\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}}^{2} - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ}$$

24. आकृति में, ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। AB, AC और BC को व्यास मान कर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



25. एक थैले में केवल सफेद, काली और लाल गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। एक सफेद गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{10}$ है तथा काली गेंद की $\frac{2}{5}$ है। लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। यदि थैले में 20 काली गेंदें हैं, तो थैले में गेंदों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

खंड D

26. यदि एक पुस्तक का मूल्य 5 रु कम कर दिया जाए, तो एक व्यक्ति 300 रु में 5 पुस्तकें अधिक खरीद सकता है। पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य ज्ञात कीजिए।

अथवा

दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पहले, उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था। क्या यह स्थिति संभव है? यदि ऐसा है, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

27. सिद्ध कीजिए कि एक बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

इस प्रमेय का प्रयोग करते हए, सिद्ध कीजिए कि

यदि एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के परिगत हो, तो $AB + CD = AD + BC$ होता है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

उपरोक्त प्रमेय का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित कीजिए :

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण B समकोण है। भुजाओं AC और AB पर क्रमशः दो समबाहु त्रिभुज ACD और ABE की रचना की जाती है। Δ ABE और Δ ACD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

28. 50 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर और आधार को एक मीनार की चोटी से देखने पर उनके अवनमन कोण क्रमशः $30°$ और $60°$ हैं। मीनार की ऊँचाई तथा साथ ही भवन और मीनार के बीच की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

29. व्यास 3 m और गहराई 14 m का एक कुँआ खोदा जाता है। इस प्रकार खोद कर निकाली गई मिट्टी को एकसमान रूप से 4 m चौड़े एक वृत्तीय वलय के रूप में फैला दिया गया है, जिससे वह एक चबूतरे का रूप धारण कर ले। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

30. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक माह में भर्ती किए गए रोगियों की आयु को दर्शाती है:

आयु (वर्षों में)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए।

अंकदेय योजना

खंड A

अंक

1. (C)	**2.** (D)	**3.** (C)	**4.** (C)	**5.** (A)	
6. (D)	**7.** (C)	**8.** (B)	**9.** (A)	**10.** (D)	**(1 × 10 = 10)**

खंड B

11. नहीं $(\frac{1}{2})$

$4^n = 2^{2n}$

अतः, इसके अभाज्य गुणखंडन में केवल 2 ही अभाज्य संख्या है। अतः, यह 0 पर अंत नहीं हो सकती। $(1\frac{1}{2})$

12. 25वाँ पद $(\frac{1}{2})$

120 को 10 पदों में जोड़ा जाएगा (क्योंकि $d = 12$)

अतः, $15 + 10 = 25$ $(1\frac{1}{2})$

अथवा

नहीं $(\frac{1}{2})$

यहाँ, $a = 3$ (विषम), $d = 4$ (सम)

विषम और सम का योग = विषम, परंतु 144 सम संख्या है। $(1\frac{1}{2})$

13. हाँ $(\frac{1}{2})$

यहाँ, PQ = 8 है।

PR = 6, अतः क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ वर्ग इकाई $(1\frac{1}{2})$

14. मान लीजिए कि बिंदु की कोटि y है। तब, $(10 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10^2$, अर्थात्

$y + 3 = \pm 6$, अर्थात् $y = 3$ या -9 (1 + 1)

15. अधिकतम मान = 3 $(\frac{1}{2})$

क्योंकि $\frac{3}{\text{cosec}\ \theta} = 3\sin\theta$ और $\sin\theta \le 1$ है, अत: $3\sin\theta \le 3$ $(1\frac{1}{2})$

खंड C

16. $p(x) = 4\sqrt{3}\,x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ (2x^2 - x - 1)$

$= 2\sqrt{3}\,(2x + 1)\,(x - 1)$

अत:, दो शून्यक $-\frac{1}{2}, 1$ हैं। (1)

यहाँ $a = 4\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}, c = -2\sqrt{3}$

अत:, $\alpha + \beta = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2},\quad -\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, अर्थात् $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (1)

$\alpha\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)1 = -\frac{1}{2},\quad \frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, अर्थात् $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (1)

अथवा

$f(x) = g(x)\ q(x) + r(x)$

अत:, $x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = g(x)\,(x - 3) + (-3x + 5)$ (1)

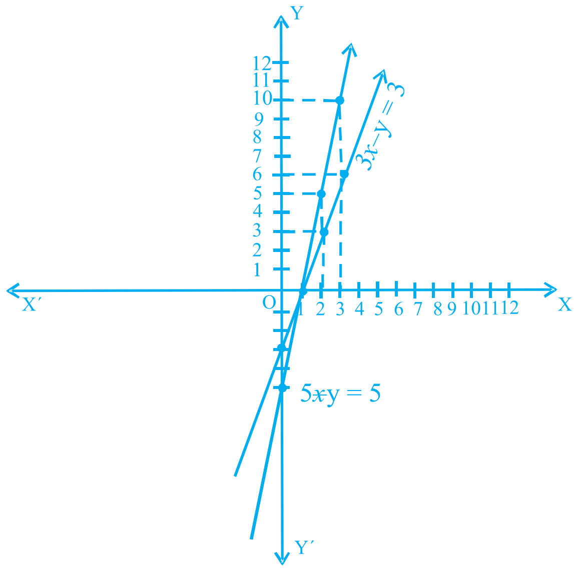
अत:, $g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 4 + 3x - 5}{x - 3} = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 4}{x - 3}$ (1)

$= x^2 - 2x + 3$ (1)

17. $5x - y = 5$ $\qquad$ $3x - y = 3$

x	1	2	3
y	0	5	10

x	1	2	3
y	0	3	6



सही आलेख के लिए (2)

हल : $x = 1, y = 0$ है। (1)

18. $S_n = 4n - n^2$. अतः $t_{10} = S_{10} - S_9 = (40 - 100) - (36 - 81)$ $(\frac{1}{2})$

$= -60 + 45 = -15$ (1)

$t_n = S_n - S_{n-1} = (4n - n^2) - [4(n-1) - (n-1)^2]$ $(\frac{1}{2})$

$= 4n - n^2 - 4n + 4 + n^2 + 1 - 2n = 5 - 2n$ (1)

अथवा

$a = 9, d = 8, S_n = 636$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$636 = \frac{n}{2}[18 + (n-1)8]$ $(1\frac{1}{2})$

हल करने पर $n = 12$ प्राप्त होता है। $(1\frac{1}{2})$

19. मान लीजिए कि A (1, 2), B (4, y), C (x, 6) और D (3, 5) शीर्ष हैं।

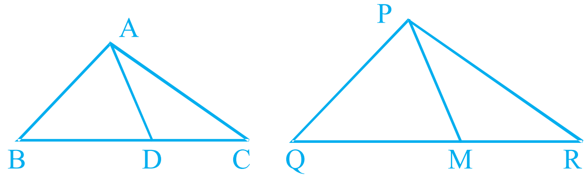
AC का मध्य-बिंदु $\left(\frac{x+1}{2}, 4\right)$ है। $(\frac{1}{2})$

तथा BD का मध्य-बिंदु $\left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$ है। $(\frac{1}{2})$

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। अतः, $\frac{x+1}{2} = \frac{7}{2}$,अर्थात् $x = 6$ (1)

$\frac{y+5}{2} = 4$,अर्थात् $y = 3$ (1)

20.

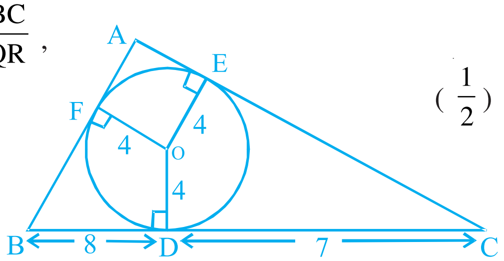


दिया है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$

अतः, Δ ABD ~ Δ PQM [SSS] $(1\frac{1}{2})$

अतः, $\angle B = \angle Q$ है। साथ ही, क्योंकि $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$,

Δ ABC ~ Δ PQR [SAS] $(1\frac{1}{2})$



$(\frac{1}{2})$

21. मान लीजिए कि AE (=AF) = x cm

क्षेत्रफल Δ ABC = $\frac{1}{2} \times 4 \times (AB + BC + AC)$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

अर्थात्, $4\,s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $(\frac{1}{2})$

$16\,s = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)$ $(\frac{1}{2})$

अर्थात्, $16\,(15+x) = x \times 8 \times 7$, अर्थात $x = 6$ (1)

अत: AB = 14 cm और AC = 13 cm $(\frac{1}{2})$

22. आधार 6 cm और शीर्षलंब 5 cm वाले समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करना (1)

स्केल गुणक $\frac{7}{5}$ के साथ समरूप त्रिभुज की रचना करना। (2)

23. बायाँ पक्ष $= \frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\cot\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta}{1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$

अथवा

$$\frac{3\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}^{2} - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ}$$

$$= \left[\frac{3\cos 43^\circ}{\cos 43^\circ}\right]^2 - \frac{\cos 37^\circ . \sec 37^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ (1) \cot 25^\circ \cot 5^\circ} \quad (2)$$

$$= (3)^2 - \frac{1}{1} = 9 - 1 = 8 \quad (1)$$

24.

वाँछित क्षेत्रफल = { व्यास AB वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल +
व्यास AC वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल +
समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल +
व्यास BC वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल (1)

वाँछित क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi\,(3)^2 + \frac{1}{2}\pi(4)^2 + \frac{1}{2}\times 6 \times 8 - \frac{1}{2}\pi(5)^2$ वर्ग इकाई (1)

$= 24 + \frac{1}{2}\pi\,(9 + 16 - 25) = 24$ वर्ग इकाई (1)

25. P(लाल गेंद) = 1 – {P(सफेद गेंद) + P(काली गेंद)} (1)

$= 1 - \left\{\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{10}$ $(\frac{1}{2})$

मान लीजिए गेंदों की सख्या y है

अत:, $\frac{20}{y} = \frac{2}{5}$, अर्थात् $y = 50$ $(1\frac{1}{2})$

खंड D

26. मान लीजिए कि पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य x रु है

अत:, 300 रु में पुस्तकों की संख्या $= \frac{300}{x}$ $(\frac{1}{2})$

मूल्य $(x - 5)$ होने पर पुस्तकों की संख्या $= \frac{300}{x-5}$ $(\frac{1}{2})$

अत:, $\frac{300}{x-5} - \frac{300}{x} = 5$ (2)

$300\,(x - x + 5) = 5x\,(x - 5)$

$300 = x\,(x - 5)$, अर्थात् $x^2 - 5x - 300 = 0$ (1)

अर्थात्, $x = 20$, $x = -15$ (अस्वीकार) (1)

अत:, पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य = 20 रु है। (1)

अथवा

मान लीजिए कि इनमें से एक की वर्तमान आयु x वर्ष है, जिससे दूसरे की आयु $(20 - x)$ वर्ष होगी।

अत:, 4 वर्ष पहले उनकी आयु $= x - 4,\ 16 - x$ वर्ष (1)

अत:, $(x - 4)\,(16 - x) = 48$ $(1\frac{1}{2})$

अर्थात्, $-x^2 + 16x + 4x - 64 - 48 = 0$

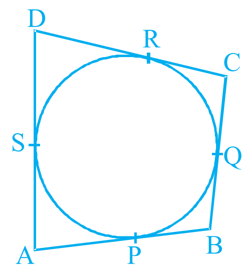
$x^2 - 20x + 112x = 0$ (1)

यहाँ, $b^2 - 4\,ac = \sqrt{(20)^2 - 4(112)} = \sqrt{-48}$ $(\frac{1}{2})$

इस प्रकार, इस समीकरण का कोई वास्तविक हल नहीं है। (1)
अतः, यह स्थिति संभव नहीं है। (1)

27. सही दिया हुआ, सिद्ध करना, रचना और आकृति के लिए (2)
सही उपपत्ति के लिए (2)

$\left.\begin{array}{l} AP = AS \\ BP = BQ \\ DR = DS \\ CR = CQ \end{array}\right\}$ (बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं)



(1)

जोड़ने पर प्राप्त होता है: (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)
अर्थात् AB + CD = AD + BC (1)

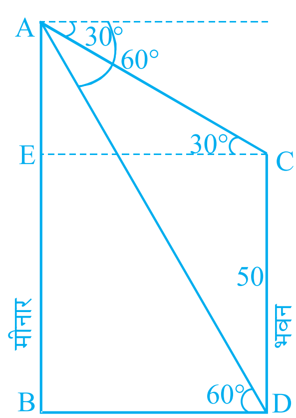
अथवा

सही दिया हुआ, सिद्ध करना, रचना और आकृति के लिए (2)
सही उपपत्ति के लिए (2)

मान लीजिए कि AB = BC = a, अर्थात् AC = $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$ $(\frac{1}{2})$

$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta ACD} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$ $(1\frac{1}{2})$

28. सही आकृति के लिए (1)



Δ ABD में, $\frac{AB}{BD} = \tan 60° = \sqrt{3}$ (1)

अतः, AB = $\sqrt{3}$ BD (I)

Δ ACE में, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1)

अर्थात् $\frac{(AB - 50)}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, अर्थात् $\sqrt{3}$ (AB – 50) = BD (1)

अत:, (I) से $AB = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\ (AB - 50)$, अर्थात् $AB = 3AB - 150$,
अर्थात् AB = 75 m

$BD = \sqrt{3}\ (75 - 50) = 25\sqrt{3}$ m (1)

29. निकाली गई मिट्टी का आयतन $= \pi r^2 h = \pi\ (1.5)^2 \times 14 = 31.5\ \pi\ m^3$ (2)

वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल $= \pi[R^2 - r^2] = \pi[(5.5)^2 - (1.5)^2]$ (1)

$= \pi(7)\ (4) = 28\pi\ m^2$ (1)

मान लीजिए कि चबूतरे की ऊँचाई h मीटर है।

अत:, $28\pi \times h = 31.5\ \pi$ (1)

$h = \frac{31.5}{28} = 1.125$ m (1)

30.

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35- 45	45-55	55-65	योग	
रोगियों की संख्या (f_1)	6	11	21	23	14	5	80	
वर्ग चिन्ह (x_i)	10	20	30	40	50	60		($\frac{1}{2}$)
$f_i x_i$	60	220	630	920	700	300	2830	(1)

माध्य $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2830}{80} = 35.375$ वर्ष (1)

बहुलक वर्ग (35 – 45) है। ($\frac{1}{2}$)

अत:, बहुलक $= l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$ (1)

$l = 35, f_1 = 23, f_0 = 21, f_2 = 14$ और $h = 10$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है: (1)

बहुलक $= 35 + \frac{2}{11} \times 10 = 36.81$ वर्ष (1)

टिप्पणी : वैकल्पिक सही हल के लिए, पूर्ण अंक दिए जाएँ।

सेट-I

प्रश्न-पत्र का प्रारूप
गणित
कक्षा 10

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

प्रश्नों की विभिन्न विमाओं पर भार और अंकों का बंटन निम्नलिखित प्रकार से होगा:

(A) विषयवस्तु/विषय इकाई पर भार

क्र.सं.	विषय इकाई	अंक
1.	संख्या पद्धतियाँ	04
2.	बीजगणित	20
3.	त्रिकोणमिति	12
4.	निर्देशांक ज्यामिति	08
5.	ज्यामिति	16
6.	मेंसुरेशन	10
7.	साँख्यिकी और प्रायिकता	10
	योग :	80

(B) प्रश्नों के प्रकारों पर भार

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक
1.	MCQ	01	10	10
2.	SAR	02	05	10
3.	SA	03	10	30
4.	LA	06	05	30
		योग	**30**	**80**

(C) विकल्पों की योजना

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, अर्थात् व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। परंतु इसमें 2 अंकों का एक प्रश्न, तीन-तीन अंकों वाले तीन प्रश्न और छः-छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प प्रदान किए गए हैं।

(D) प्रश्नों के कठिनाई स्तर पर भार

क्र.सं.	प्रश्नों के अनुमानित कठिनाई स्तर	अंकों का प्रतिशत
1.	सरल	20
2.	औसत	60
3.	कठिन	20

टिप्पणी : किसी प्रश्न का कठिनाई स्तर व्यक्ति दर व्यक्ति बदल सकता है। इसी रूप में, प्रत्येक प्रश्न के संदर्भ में मूल्यांकन, परीक्षा देने वाले संपूर्ण समूहों से व्यापक प्रत्याशा के आधार पर पेपर-सेटर/शिक्षक द्वारा किया जाएगा। यह व्यवस्था केवल प्रश्न पत्र को उसके भारों के संदर्भ में संतुलित बनाने के लिए है, न कि किसी स्तर पर अंकन का प्रतिरूप निर्धारित करने के लिए।

ब्लू प्रिंट
गणित
कक्षा 10

प्रश्न का प्रकार → / इकाइयाँ ↓	MCQ	SAR	SA	LA	योग
संख्या पद्धतियाँ	2(2)	2(1)	-	-	4(3)
बीजगणित बहुपद, दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म, द्विघात समीकरण, समांतर श्रेढ़ियाँ	3(3)	2(1)	9(3)	6(1)	20(8)
त्रिकोणमिति त्रिकोणमिति का परिचय त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	1(1)	2(1)	3(1)	6(1)	12(4)
निर्देशांक ज्यामिति	1(1)	4(2)	3(1)	-	8(4)
ज्यामिति त्रिभुज, वृत्त, रचनाएँ	1(1)	-	9(3)	6(1)	16(5)
मेंसुरेशन वृत्त से संबंधित क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	1(1)	-	3(1)	6(1)	10(3)
साँख्यिकी और प्रायिकता	1(1)	-	3(1)	6(1)	10(3)
योग	**10(10)**	**10(5)**	**30(10)**	**30(5)**	**80(30)**

सारांश

बहु विकल्पीय प्रश्न (MCQ)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 10
तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SAR)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 10
संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (SA)	प्रश्नों की संख्या : 10	अंक : 30
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)	प्रश्नों की संख्या : 05	अंक : 30
योग	**30**	**80**

गणित

कक्षा 10

समय : 3 घंटे **अधिकतम अंक : 80**

सामान्य निर्देश

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. प्रश्न पत्र में 30 प्रश्न हैं, जो चार खंडों A, B, C और D में विभाजित हैं। खंड A में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है, खंड B में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 2 अंक का है, खंड C में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक 3 अंक का है तथा खंड D में 5 प्रश्न हैं और प्रत्येक 6 अंक का है।
3. व्यापक तौर पर कोई विकल्प नहीं है। परंतु 2 अंकों का एक प्रश्न, 3 अंकों वाले तीन प्रश्न तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।
4. रचनाओं के प्रश्नों में, रचनाएँ स्वच्छ तथा ठीक दिए हुए मापनों के अनुसार होनी चाहिए।
5. कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड A

1. संख्या $\frac{47}{2^3 5^2}$ के दशमलव प्रसार का कितने दशमलव स्थानों के बाद अंत होगा?

(A) 5 (B) 2 (C) 3 (D) 1

2. यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका कहती है कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, दो अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है, ताकि $a = bq + r$ है, जहाँ

(A) $0 \le r \le a$ (B) $0 < r < b$ (C) $0 \le r \le b$ (D) $0 \le r < b$

3. बहुपद $p(x) = (x-2)^2 + 4$ के शून्यकों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3

4. रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का युग्म असंगत कहलाता है, यदि

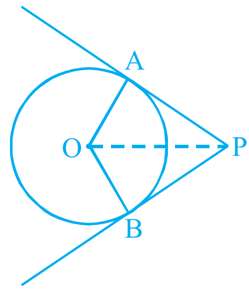
(A) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (B) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (C) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (D) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

5. k का सबसे छोटा मान, जिसके लिए समीकरण $x^2 + 6x + 9 = 0$ के मूल वास्तविक होंगे, है:

(A) – 6 (B) 6 (C) 36 (D) –3

6. बिंदु P और Q के निर्देशांक क्रमश: (4, –3) और (–1, 7) हैं। तब, रेखाखंड PQ पर स्थित उस बिंदु R के निर्देशांक का भुज, जबकि $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{5}$ हो, निम्नलिखित है

(A) $\frac{18}{5}$ (B) $\frac{17}{5}$ (C) $\frac{17}{8}$ (D) 1

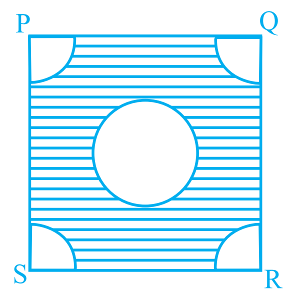


7. संलग्न आकृति में, PA और PB केंद्र O वाले वृत्त पर बिंदु P से दो स्पर्श रेखाएँ हैं। तब, चतुर्भुज OAPB होना चाहिए

(A) वर्ग (B) समचतुर्भुज
(C) चक्रीय चतुर्भुज (D) समांतर चतुर्भुज

8. यदि किसी कोण θ के लिए, $\cot 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो sin3θ, जहाँ $2\theta \leq 90°$ हो, का मान होगा

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



9. 4 cm की भुजा वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से त्रिज्या 1 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश काटा गया है तथा साथ ही व्यास 2 cm वाला एक वृत्त भी आकृति में दर्शाए अनुसार काटा गया है। शेष (छायांकित) भाग का क्षेत्रफल है

(A) $(16 - 2\pi)$ cm² (B) $(16 - 5\pi)$ cm²
(C) 2π cm² (D) 5π cm²

10. अंग्रेजी वर्णमाला का एक अक्षर यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस अक्षर के शब्द 'MATHEMATICS' का एक अक्षर होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{11}{26}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{9}{26}$ (D) $\frac{4}{13}$

खंड B

11. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या n है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होती है? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

12. nवें पद के सूत्र का प्रयोग किए बिना, ज्ञात कीजिए कि AP : 5, 17, 29, 41, ... का कौन सा पद इसके 15वें पद से 120 अधिक है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

अथवा

क्या AP : 3, 7, 11, ... का कोई पद 144 है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

13. बिंदु P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः (3, 4), (3, –4) और (–3, 4) हैं। क्या त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

14. किसी रेखाखंड की लंबाई 10 इकाई है। यदि इसका एक सिरा (2, –3) है तथा दूसरे सिरे का भुज 10 है, तो इसकी कोटि या तो 3 है या –9 है। अपने इन दो उत्तरों के लिए औचित्य दीजिए।

15. $\frac{3}{\operatorname{cosec}\theta}$ का अधिकतम मान क्या है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

खंड C

16. बहुपद $p(x) = 4\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यापित कीजिए।

अथवा

किसी बहुपद $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ क्रमशः $x - 3$ और $-3x + 5$ हैं। बहुपद $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

17. समीकरणों $5x - y = 5$ और $3x - y = 3$ को आलेखीय रूप से हल कीजिए।

18. यदि किसी AP के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इस AP का 10वाँ पद तथा n वाँ पद क्या है?

अथवा

AP : 9, 17, 25, ... में योग 636 प्राप्त करने के लिए कितने पदों को लेना चाहिए?

19. यदि (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5) इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

20. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB, BC और माध्यिका AD क्रमशः ΔPQR की भुजाओं PQ, QR और माध्यिका PM के समानुपाती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

21. त्रिज्या 4cm वाले वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि स्पर्श बिंदु D भुजा BC को दो भागों BD और DC में विभाजित करता है, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 7 cm हैं। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।

22. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 6 cm और शीर्षलंब 5 cm हैं तथा फिर ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ हैं।

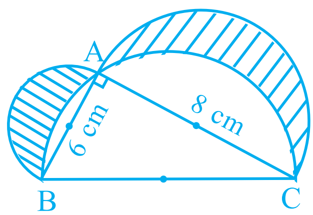
23. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}$ है।

अथवा

मान निकालिए :

$${\frac{3\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}}^{2} - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ}$$

24. आकृति में, ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। AB, AC और BC को व्यास मान कर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



25. एक थैले में केवल सफेद, काली और लाल गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। एक सफेद गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{10}$ है तथा काली गेंद की $\frac{2}{5}$ है। लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। यदि थैले में 20 काली गेंदें हैं, तो थैले में गेंदों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

खंड D

26. यदि एक पुस्तक का मूल्य 5 रु कम कर दिया जाए, तो एक व्यक्ति 300 रु में 5 पुस्तकें अधिक खरीद सकता है। पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य ज्ञात कीजिए।

अथवा

दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पहले, उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था। क्या यह स्थिति संभव है? यदि ऐसा है, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

27. सिद्ध कीजिए कि एक बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

इस प्रमेय का प्रयोग करते हए, सिद्ध कीजिए कि

यदि एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के परिगत हो, तो $AB + CD = AD + BC$ होता है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

उपरोक्त प्रमेय का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित कीजिए :

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण B समकोण है। भुजाओं AC और AB पर क्रमशः दो समबाहु त्रिभुज ACD और ABE की रचना की जाती है। Δ ABE और Δ ACD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

28. 50 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर और आधार को एक मीनार की चोटी से देखने पर उनके अवनमन कोण क्रमशः $30°$ और $60°$ हैं। मीनार की ऊँचाई तथा साथ ही भवन और मीनार के बीच की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

29. व्यास 3 m और गहराई 14 m का एक कुँआ खोदा जाता है। इस प्रकार खोद कर निकाली गई मिट्टी को एकसमान रूप से 4 m चौड़े एक वृत्तीय वलय के रूप में फैला दिया गया है, जिससे वह एक चबूतरे का रूप धारण कर ले। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

30. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक माह में भर्ती किए गए रोगियों की आयु को दर्शाती है:

आयु (वर्षों में)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए।

अंकदेय योजना

खंड A

अंक

1. (C) **2.** (D) **3.** (C) **4.** (C) **5.** (A)

6. (D) **7.** (C) **8.** (B) **9.** (A) **10.** (D) **(1 × 10 = 10)**

खंड B

11. नहीं $(\frac{1}{2})$

$4^n = 2^{2n}$

अत:, इसके अभाज्य गुणखंडन में केवल 2 ही अभाज्य संख्या है। अत:, यह 0 पर अंत नहीं हो सकती। $(1\frac{1}{2})$

12. 25वाँ पद $(\frac{1}{2})$

120 को 10 पदों में जोड़ा जाएगा (क्योंकि $d = 12$)

अत:, $15 + 10 = 25$ $(1\frac{1}{2})$

अथवा

नहीं $(\frac{1}{2})$

यहाँ, $a = 3$ (विषम), $d = 4$ (सम)

विषम और सम का योग = विषम, परंतु 144 सम संख्या है। $(1\frac{1}{2})$

13. हाँ $(\frac{1}{2})$

यहाँ, PQ = 8 है।

PR = 6, अत: क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ वर्ग इकाई $(1\frac{1}{2})$

14. मान लीजिए कि बिंदु की कोटि y है। तब, $(10 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10^2$, अर्थात्

$y + 3 = \pm 6$, अर्थात् $y = 3$ या -9 (1 + 1)

15. अधिकतम मान = 3 $(\frac{1}{2})$

क्योंकि $\frac{3}{\text{cosec }\theta} = 3 \sin\theta$ और $\sin\theta \le 1$ है, अत: $3 \sin\theta \le 3$ $(1\frac{1}{2})$

खंड C

16. $p(x) = 4\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ (2x^2 - x - 1)$

$= 2\sqrt{3}\,(2x + 1)\,(x - 1)$

अत:, दो शून्यक $-\frac{1}{2}, 1$ हैं। (1)

यहाँ $a = 4\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}, c = -2\sqrt{3}$

अत:, $\alpha + \beta = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \quad -\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, अर्थात् $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (1)

$\alpha\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)1 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, अर्थात् $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (1)

अथवा

$f(x) = g(x)\ q(x) + r(x)$

अत:, $x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = g(x)\,(x - 3) + (-3x + 5)$ (1)

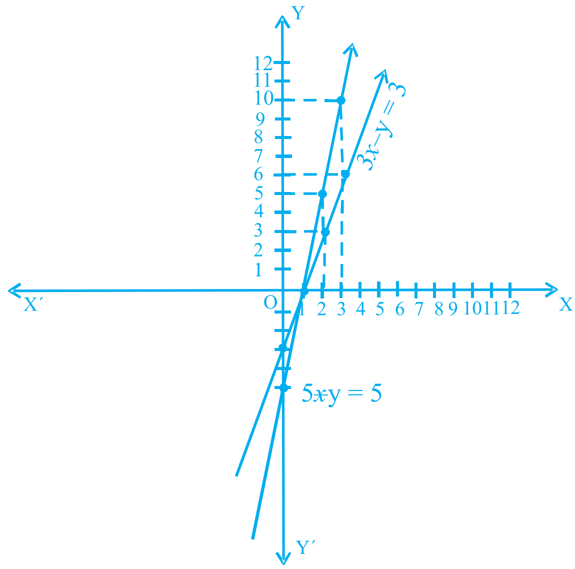
अत:, $g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 4 + 3x - 5}{x - 3} = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 4}{x - 3}$ (1)

$= x^2 - 2x + 3$ (1)

17. $5x - y = 5$ $\qquad$ $3x - y = 3$

x	1	2	3
y	0	5	10

x	1	2	3
y	0	3	6



सही आलेख के लिए (2)

हल : $x = 1, y = 0$ है। (1)

18. $S_n = 4n - n^2$. अत: $t_{10} = S_{10} - S_9 = (40 - 100) - (36 - 81)$ $(\frac{1}{2})$

$= -60 + 45 = -15$ (1)

$t_n = S_n - S_{n-1} = (4n - n^2) - [4(n-1) - (n-1)^2]$ $(\frac{1}{2})$

$= 4n - n^2 - 4n + 4 + n^2 + 1 - 2n = 5 - 2n$ (1)

अथवा

$a = 9, d = 8, S_n = 636$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$636 = \frac{n}{2}[18 + (n-1)8]$ $(1\frac{1}{2})$

हल करने पर $n = 12$ प्राप्त होता है। $(1\frac{1}{2})$

19. मान लीजिए कि A (1, 2), B (4, y), C (x, 6) और D (3, 5) शीर्ष हैं।

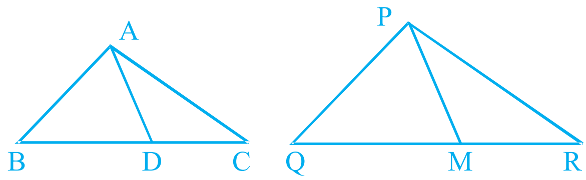
AC का मध्य-बिंदु $\left(\frac{x+1}{2}, 4\right)$ है। $(\frac{1}{2})$

तथा BD का मध्य-बिंदु $\left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$ है। $(\frac{1}{2})$

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। अत:, $\frac{x+1}{2} = \frac{7}{2}$,अर्थात् $x = 6$ (1)

$\frac{y+5}{2} = 4$,अर्थात् $y = 3$ (1)

20.

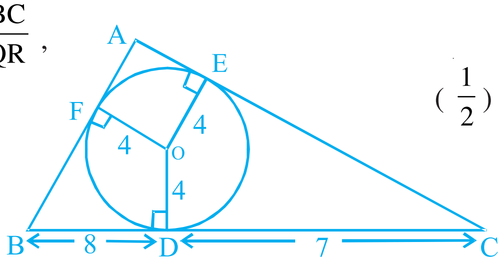


दिया है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$

अत:, Δ ABD ~ Δ PQM [SSS] $(1\frac{1}{2})$

अत:, $\angle B = \angle Q$ है। साथ ही, क्योंकि $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$,

Δ ABC ~ Δ PQR [SAS] $(1\frac{1}{2})$



$(\frac{1}{2})$

21. मान लीजिए कि AE (=AF) = x cm

क्षेत्रफल Δ ABC = $\frac{1}{2} \times 4 \times (AB + BC + AC)$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

अर्थात्, $4\,s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $(\frac{1}{2})$

$16\,s = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)$ $(\frac{1}{2})$

अर्थात्, $16\,(15 + x) = x \times 8 \times 7$, अर्थात $x = 6$ (1)

अत: AB = 14 cm और AC = 13 cm $(\frac{1}{2})$

22. आधार 6 cm और शीर्षलंब 5 cm वाले समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करना (1)

स्केल गुणक $\frac{7}{5}$ के साथ समरूप त्रिभुज की रचना करना। (2)

23. बायाँ पक्ष $= \frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\cot\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta}{1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$

अथवा

$$\frac{3\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}^{2} - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ}$$

$$= \left[\frac{3\cos 43^\circ}{\cos 43^\circ}\right]^2 - \frac{\cos 37^\circ . \sec 37^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ (1) \cot 25^\circ \cot 5^\circ} \quad (2)$$

$$= (3)^2 - \frac{1}{1} = 9 - 1 = 8 \quad (1)$$

24.

वाँछित क्षेत्रफल = { व्यास AB वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल +
व्यास AC वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल +
समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल +
व्यास BC वाले अर्धवृत का क्षेत्रफल (1)

वाँछित क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi\,(3)^2 + \frac{1}{2}\pi(4)^2 + \frac{1}{2}\times 6 \times 8 - \frac{1}{2}\pi(5)^2$ वर्ग इकाई (1)

$= 24 + \frac{1}{2}\pi\,(9 + 16 - 25) = 24$ वर्ग इकाई (1)

25. P(लाल गेंद) = 1 – {P(सफेद गेंद) + P(काली गेंद)} (1)

$$= 1 - \left\{\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{10}$$ $(\frac{1}{2})$

मान लीजिए गेंदों की सख्या y है

अत:, $\frac{20}{y}=\frac{2}{5}$, अर्थात् $y = 50$ $(1\frac{1}{2})$

खंड D

26. मान लीजिए कि पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य x रु है

अत:, 300 रु में पुस्तकों की संख्या $= \frac{300}{x}$ $(\frac{1}{2})$

मूल्य $(x – 5)$ होने पर पुस्तकों की संख्या $= \frac{300}{x-5}$ $(\frac{1}{2})$

अत:, $\frac{300}{x-5} - \frac{300}{x} = 5$ (2)

$300 (x – x + 5) = 5x (x – 5)$

$300 = x (x – 5)$, अर्थात् $x^2 – 5x – 300 = 0$ (1)

अर्थात्, $x = 20$, $x = –15$ (अस्वीकार) (1)

अत:, पुस्तक का प्रारंभिक मूल्य = 20 रु है। (1)

अथवा

मान लीजिए कि इनमें से एक की वर्तमान आयु x वर्ष है, जिससे दूसरे की आयु $(20 – x)$ वर्ष होगी।

अत:, 4 वर्ष पहले उनकी आयु $= x – 4, 16 – x$ वर्ष (1)

अत:, $(x – 4) (16 – x) = 48$ $(1\frac{1}{2})$

अर्थात्, $– x^2 + 16 x + 4x – 64 – 48 = 0$

$x^2 - 20x + 112x = 0$ (1)

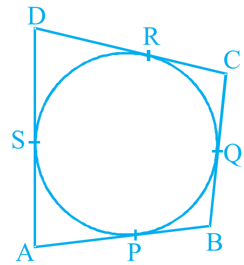
यहाँ, $b^2 - 4\,ac = \sqrt{(20)^2 - 4(112)} = \sqrt{-48}$ $(\frac{1}{2})$

इस प्रकार, इस समीकरण का कोई वास्तविक हल नहीं है। (1)

अत:, यह स्थिति संभव नहीं है। (1)

27. सही दिया हुआ, सिद्ध करना, रचना और आकृति के लिए (2)

सही उपपत्ति के लिए (2)



$\left.\begin{array}{l} AP = AS \\ BP = BQ \\ DR = DS \\ CR = CQ \end{array}\right\}$ (बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं) (1)

जोड़ने पर प्राप्त होता है: (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)

अर्थात् AB + CD = AD + BC (1)

अथवा

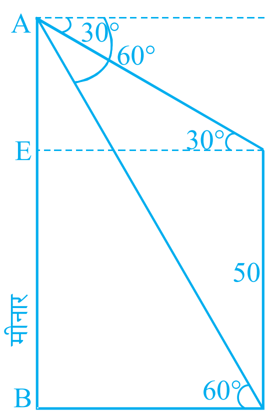
सही दिया हुआ, सिद्ध करना, रचना और आकृति के लिए (2)

सही उपपत्ति के लिए (2)

मान लीजिए कि AB = BC = a, अर्थात् AC = $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$ $(\frac{1}{2})$

$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta ACD} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$ $(1\frac{1}{2})$

28. सही आकृति के लिए (1)



Δ ABD में, $\frac{AB}{BD} = \tan 60° = \sqrt{3}$ (1)

अत:, AB = $\sqrt{3}$ BD (I)

Δ ACE में, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1)

अर्थात् $\frac{(AB - 50)}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, अर्थात् $\sqrt{3}$ (AB – 50) = BD (1)

अतः, (I) से AB = $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ (AB – 50), अर्थात् AB = 3AB – 150,
अर्थात् AB = 75 m

BD = $\sqrt{3}$ (75 – 50) = $25\sqrt{3}$ m (1)

29. निकाली गई मिट्टी का आयतन $= \pi r^2 h = \pi\,(1.5)^2 \times 14 = 31.5\,\pi\ \text{m}^3$ (2)

वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल $= \pi[R^2 - r^2] = \pi[(5.5)^2 - (1.5)^2]$ (1)

$= \pi(7)\,(4) = 28\pi\ \text{m}^2$ (1)

मान लीजिए कि चबूतरे की ऊँचाई h मीटर है।

अतः, $28\pi \times h = 31.5\,\pi$ (1)

$h = \dfrac{31.5}{28} = 1.125$ m (1)

30.

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35- 45	45-55	55-65	योग	
रोगियों की संख्या (f_1)	6	11	21	23	14	5	80	
वर्ग चिन्ह (x_i)	10	20	30	40	50	60		($\frac{1}{2}$)
$f_i x_i$	60	220	630	920	700	300	2830	(1)

माध्य $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{2830}{80} = 35.375$ वर्ष (1)

बहुलक वर्ग (35 – 45) है। ($\frac{1}{2}$)

अतः, बहुलक $= l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$ (1)

$l = 35, f_1 = 23, f_0 = 21, f_2 = 14$ और $h = 10$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है: (1)

बहुलक $= 35 + \dfrac{2}{11} \times 10 = 36.81$ वर्ष (1)

टिप्पणी : वैकल्पिक सही हल के लिए, पूर्ण अंक दिए जाएँ।