प्रश्नपत्र का प्रारूप (Design)

गणित कक्षा XI

समय : 3 घंटा
पूर्णांक :100

प्रश्नपत्र के विभिन्न आयामों के लिए अंकों का भारण (Weightage) निम्नलिखित है:

1. प्रश्नों के प्रकार (Type) **अंकों का भारण**

(i) वस्तुनिष्ठ प्रश्न	:	(10)	$10 \times 1 =$	10
(ii) लघुउत्तरीय	:	(12)	$12 \times 4 =$	48
(iii) दीर्घउत्तरीय	:	(7)	$7 \times 6 =$	42
कुल प्रश्न	:	(29)		100

2. विभिन्न विषयों (topics) का भारण

क्रमांक	विषय (topics)	वस्तुनिष्ठ प्रश्न (M.C.Q.)	लघुउत्तरीय (S.A)	दीर्घउत्तरीय (L.A)	योग
1.	समुच्चय	-	1(4)	-	1(4)
2.	संबंध एवं फलन	-	-	1(6)	1(6)
3.	त्रिकोणमितीय फलन	2(2)	1(4)	1(6)	4(12)
4.	गणितीय आगमन का सिद्धांत	-	1(4)	-	1(4)
5.	समिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण	2(2)	1(4)	-	3(6)
6.	रैखिक असमिकाएँ	1(1)	1(4)	-	2(5)
7.	क्रमचय और संचय	-	1(4)	-	1(4)
8.	द्विपद प्रमेय	-	-	1(6)	1(6)
9.	अनुक्रम तथा श्रेणी	-	1(4)	-	1(4)
10.	सरल रेखाएँ	2(2)	1(4)	1(6)	4(12)
11.	शंकु परिच्छेद	-	-	1(6)	1(6)
12.	त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय	-	1(4)	-	1(4)
13.	सीमा और अवकलज	1(1)	1(4)	-	2(5)
14.	गणितीय विवेचन	1(1)	1(4)	-	2(5)
15.	सांख्यिकी	-	1(4)	1(6)	2(10)
16.	प्रायिकता	1(1)	-	1(6)	2(7)
	योग	**10(10)**	**12(48)**	**7(42)**	**29(100)**

प्रतिदर्श (Sample) प्रश्नपत्र

गणित कक्षा XI

सामान्य अनुदेश

(i) प्रश्नपत्र में तीन भाग A, B तथा C हैं। प्रत्येक भाग का प्रत्येक प्रश्न अनिवार्य है।

(ii) भाग A (वस्तुनिष्ठ प्रश्न) में 1 अंक वाले 10 प्रश्न हैं।

(iii) भाग B (लघुउत्तरीय) में 4 अंक वाले 12 प्रश्न हैं।

(iv) भाग (दीर्घउत्तरीय) में 6 अंक वाले 7 प्रश्न हैं।

भाग - A

1. यदि $\tan\theta = \frac{1}{2}$ तथा $\tan\phi = \frac{1}{3}$, तो $(\theta + \phi)$ का मान क्या है?

2. समिश्र संख्या z के लिए कोणांक z + कोणांक $\bar{z}$, $z \neq 0$ का मान क्या है?

3. तीन सर्वसम पासे फेंके जाते हैं। उनमें से प्रत्येक पर एक ही संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

प्रश्न संख्या 4 और 5 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

4. रेखा $2x + 3y - 6 = 0$ का x-अक्ष पर अंत:खण्ड .... है।

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ का मान .... के बराबर है।

प्रश्न संख्या 6 और 7 में बताइए कि प्रदत्त कथन सत्य है या असत्य है:

6. $x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad \forall\, x > 0$

7. रेखाएँ $3x + 4y + 7 = 0$ और $4x + 3y + 5 = 0$ एक दूसरे पर लम्ब हैं।

प्रश्न संख्या 8 तथा 9 में दिए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए:

8. समीकरण $\cos^2\theta + \sin\theta + 1 = 0$, का हल निम्नलिखित में से किस अंतराल में स्थित है:

(A) $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

9. यदि $z = 2 + \sqrt{3}i$, तो $z \cdot \bar{z}$ का मान

(A) 7 (B) 8 (C) $2 - \sqrt{3}i$ (D) 1

10. कथन "यदि कोई संख्या 6 से भाज्य है, तो वह 3 से भाज्य है।" का प्रतिधनात्मक कथन क्या है?

भाग - B

11. यदि $A' \cup B = U$, तो समुच्चयों के बीजगणित के प्रयोग से (द्वारा) सिद्ध कीजिए कि $A \subset B$, जहाँ प्रतीक A' समुच्चय A के पूरक को तथा U सार्वत्रिक समुच्चय को निर्दिष्ट करते हैं।

12. यदि $\cos x = \frac{1}{7}$ तथा $\cos y = \frac{13}{14}$, जहाँ x, y न्यून कोण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $x - y = 60°$.

13. गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2^{3n} - 1$, 7 से भाज्य है।

14. $z = -4 + i\, 4\sqrt{3}$ को ध्रुवीय रूप (polar form) में लिखिए।

15. रैखिक असमिका निकाय $3x - 7 > 2(x - 6)$ और $6 - x > 11 - 2x$ को हल कीजिए तथा हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

16. यदि $a + b + c \neq 0$ और $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ समांतर श्रेणी (A.P.) में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ भी समांतर श्रेणी में हैं।

17. गणित के किसी प्रश्नपत्र में 10 प्रश्न हैं, जो दो भागों, भाग I तथा भाग II में विभाजित हैं। इन भागों में से प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न है। किसी विद्यार्थी को प्रत्येक भाग में से कम से कम दो प्रश्न चुनकर कुल 6 प्रश्न हल करने हैं। एक विद्यार्थी प्रश्नों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है?

18. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(-3, -2)$ से होकर जाती है तथा x–अक्ष एवं y-अक्ष पर 4 : 3 के अनुपात में अंतः खण्ड काटती है।

19. P(0, 0, 0) और Q(4, –1, –2) को मिलाने वाले रेखाखंड 1: 2 के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और सत्यापित (verify) कीजिए कि बिंदु P रेखा खण्ड RQ का मध्य बिंदु है।

20. $f(x) = \frac{3 - x}{3 + 4x}$ का x के सापेक्ष, प्रथम सिद्धांत से अवकलन कीजिए।

21. विरोधोक्ति विधि से सत्यापित कीजिए कि $p = \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

भाग C

23. मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = \sqrt{x}$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में परिभाषित, दो फलन है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $(f + g)\ (4)$ (ii) $(f - g)\ (9)$ (iii) $(fg)\ (4)$ (iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(9)$

24. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

25. $\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में प्रारम्भ से चौथा पद तथा अंत से पाँचवा पद ज्ञात कीजिए।

26. एक रेखा इस प्रकार है कि, रेखाओं $5x - y + 4 = 0$ तथा $3x + 4y - 4 = 0$ के मध्य स्थित इसका अंत:खंड, बिन्दु (1, 5) पर समद्विभाजित होता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

27. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ के दीर्घ एवं लघु अक्षों की लम्बाइयाँ, नाभियों के निर्देशांक, शीर्ष, उत्केन्द्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

28. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग-अंतराल	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

29. इस बात की प्रायिकता क्या है कि:

(i) किसी सामान्य वर्ष (लीप वर्ष के अतिरिक्त) में 53 रविवार हैं।

(ii) किसी लीप वर्ष में 53 शुक्रवार हैं।

(iii) किसी लीप वर्ष में 53 रविवार और 53 सोमवार हैं।

अंकदेय योजना (स्कीम)

गणित कक्षा XI

भाग - A

प्र. सं.	उत्तर	अंक
1.	$\frac{\pi}{4}$	1
2.	शून्य	1
3.	$\frac{1}{36}$	1
4.	3	1
5.	$\frac{1}{2}$	1
6.	सत्य	1
7.	असत्य	1
8.	D	1
9.	A	1
10.	यदि कोई संख्या 3 से भाज्य नहीं है, तो वह 6 से भाज्य नहीं है।	1

भाग - B

11. $B = B \cup \phi = B \cup (A \cap A')$ 1

$= (B \cup A) \cap (B \cup A')$

$= (B \cup A) \cap (A' \cup B) = (B \cup A) \cap U$ (प्रदत्त है) 1

$= B \cup A$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A \subset B.$ $\frac{1}{2}$

12. $\cos x = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ 1

$\cos y = \dfrac{13}{14} \Rightarrow \sin y = \sqrt{1-\dfrac{169}{196}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ 1

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\dfrac{1}{2}$

$= \left(\dfrac{1}{7}\right)\left(\dfrac{13}{14}\right) + \dfrac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{1}{2}$ 1

$\Rightarrow x - y = \dfrac{\pi}{3}$ $\dfrac{1}{2}$

13. मान लीजिए कि, $P(n)$: “$2^{3n} - 1$ संख्या 7 से भाज्य है” $\dfrac{1}{2}$

$P(1) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$, जो 7 से भाज्य है $\Rightarrow P(1)$ सत्य है $\dfrac{1}{2}$

मान लीजिए कि, $P(k)$ सत्य है, अर्थात् “$2^{3k} - 1$, 7 से भाज्य है,” $\therefore 2^{3k} - 1 = 7a, a \in \mathbf{Z}$ 1

ज्ञात है कि $2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \cdot 2^3 - 1$ 1

$= (2^{3k} - 1)\, 8 + 7 = 7a \cdot 8 + 7 = 7(8a + 1)$ $\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P(k+1)$ सत्य है, अत: $P(n)$ सत्य है $\forall_n \in \mathbf{N}$ $\dfrac{1}{2}$

14. मान लीजिए कि $-4 + i\, 4\sqrt{3} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ $\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow r\cos\theta = -4,\ r\sin\theta = 4\sqrt{3} \Rightarrow r^2 = 16 + 48 = 64 \Rightarrow r = 8.$ $1\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ $1\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad z = -4 + i4\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $\frac{1}{2}$

15. प्रदत्त (दी हुई) असमिकाएँ निम्नलिखित हैं:

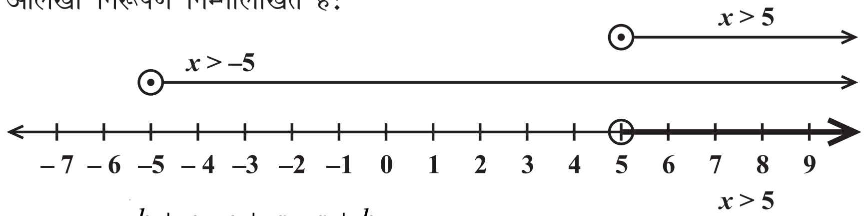
$3x - 7 > 2(x - 6)$ ... (i) और $6 - x > 11 - 2x$ ... (ii)

(i) $\Rightarrow 3x - 2x > -12 + 7$ या $x > -5$ ... (A) 1

(ii) $\Rightarrow -x + 2x > 11 - 6$ या $x > 5$ ... (B) 1

(A) तथा (B) से प्रदत्त निकाय का हल $x > 5$ है। 1

आलेखी निरूपण निम्नलिखित है:



1

16. दिया है कि $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ समांतर श्रेणी (A.P.) में है।

$\therefore 1+\frac{b+c}{a}, 1+\frac{c+a}{b}, 1+\frac{a+b}{c}$ भी समांतर श्रेणी में हैं। $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ समांतर श्रेणी में हैं।

1

क्योंकि, $a + b + c \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ भी समांतर श्रेणी में है। $1\frac{1}{2}$

17. संभावित चयन निम्नलिखित हैं:

चयन	भाग I	भाग II
(i)	2	4
(ii)	3	3
(iii)	4	2

1

$\therefore$ प्रश्नों के चयन के कुल प्रकार

$= \left({}^5C_2 \times {}^5C_4 + {}^5C_3 \times {}^5C_3 + {}^5C_4 \times {}^5C_2\right)$ $1\frac{1}{2}$

$=10 \times 5 + 10 \times 10 + 5 \times 10 = 200$ $\quad 1\frac{1}{2}$

18. मान लीजिए कि x-अक्ष तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड क्रमश: $4a$ तथा $3a$ हैं। $\quad \frac{1}{2}$

$\therefore$ रेखा का समीकरण $\dfrac{x}{4a} + \dfrac{y}{3a} = 1$ है $\quad 1\frac{1}{2}$

या $3x + 4y = 12a$

बिंदु $(-3, -2)$, इस रेखा पर स्थित है $\Rightarrow 12a = -17$ $\quad 1\frac{1}{2}$

अत: रेखा का समीकरण $3x + 4y + 17 = 0$ है। $\quad \frac{1}{2}$

19. मान लीजिए कि R के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

$\therefore x = \dfrac{1(4) - 2(0)}{1-2} = -4$ $\quad 1$

$y = \dfrac{1(-1) - 2(0)}{1-2} = 1$ $\quad 1$

$z = \dfrac{1(-2) - 2(0)}{1-2} = 2$ $\quad \therefore$ R के निर्देशांक $(-4, 1, 2)$ हैं। $\quad 1$

पुन: QR का मध्य बिंदु $\left(\dfrac{-4+4}{2}, \dfrac{1-1}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right)$ है, अर्थात् $(0, 0, 0)$ है $\quad 1$

अत: सत्यापित हो गया।

20. $f(x) = \dfrac{3-x}{3+4x}$ इसलिए $f(x+\Delta x) = \dfrac{3-(x+\Delta x)}{3+4(x+\Delta x)}$ $\quad \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3-x-\Delta x}{3+4x+4\Delta x} - \dfrac{3-x}{3+4x}}{\Delta x} \quad 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3-x-\Delta x)(3+4x) - (3+4x+4\Delta x)(3-x)}{(\Delta x)(3+4x+4\Delta x)(3+4x)} \quad \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{9+12x-3x-4x^2-3\Delta x-4x\,\Delta x-9+3x-12x+4x^2-12\Delta x+4x\Delta x}{(\Delta x)\,(3+4x+4\Delta x)\,(3+4x)}$$ 1

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{-15\Delta x}{(\Delta x)\,(3+4x+4\Delta x)\,(3+4x)} = \frac{-15}{(3+4x)^2}$$ 1

21. मान लीजिए कि p असत्य है, अर्थात् $\sim p$ सत्य है, अर्थात्, $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। $\frac{1}{2}$

$\therefore$ ऐसे दो धन पूर्णांकों a तथा b का अस्तित्व है कि,

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, जहाँ a और b असहभाज्य (coprime) संख्याएँ हैं $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3,\ a^2$ को विभाजित करता है $\Rightarrow 3,\ a$ को विभाजित करता है 1

$\therefore a = 3c$ जहाँ c एक धन पूर्णांक है,

$\therefore 9c^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3c^2 \Rightarrow 3,\ b$ को भी विभाजित करता है 1

$\therefore 3,\ a$ तथा b का एक समापवर्तक (common factor) है, जो एक विरोधोक्ति है क्योंकि a, b असहभाज्य संख्याएँ हैं। 1

अत: "$p : \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है" सत्य है।

22.

x_i:	10	30	50	70	90		
f_i:	4	24	28	16	8	$\therefore \sum f_i = 80$	$\frac{1}{2}$
$f_i x_i$:	40	720	1400	1120	720	$\therefore \sum f_i x_i = 4000$	1
$\lvert d_i \rvert = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$:	40	20	0	20	40	$\therefore$ माध्य $= 50$	$\frac{1}{2}$
$f_i \lvert d_i \rvert$:	160	480	0	320	320	$\therefore \sum f_i \lvert d_i \rvert = 1280$	1

$\therefore$ माध्य विचलन $= \frac{1280}{80} = 16$ 1

भाग - C

23. $(f+g)\,(4) = f(4) + g(4) = (4)^2 + \sqrt{4} = 16 + 2 = 18$ $1\frac{1}{2}$

$(f-g)\,(9) = f(9) - g(9) = (9)^2 - \sqrt{9} = 81 - 3 = 78$ $1\frac{1}{2}$

$(f\,.\,g)\,(4) = f(4)\,.\,g(4) = (4)^2 \cdot \sqrt{(4)} = (16)\,(2) = 32$ $1\frac{1}{2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(9) = \frac{f(9)}{g(9)} = \frac{(9)^2}{\sqrt{9}} = \frac{81}{3} = 27$ $1\frac{1}{2}$

24. $\sin 7x + \sin 5x = 2 \sin 6x \cos x$ 1

$\sin 9x + \sin 3x = 2 \sin 6x \cos 3x$ 1

$\cos 7x + \cos 5x = 2 \cos 6x \cos x$ 1

$\cos 9x + \cos 3x = 2 \cos 6x \cos 3x$ 1

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \frac{2\sin 6x \cos x + 2\sin 6x \cos 3x}{2\cos 6x \cos x + 2\cos 6x \cos 3x}$ $\frac{1}{2}$

$= \frac{\sin 6x\,(\cos 3x + \cos x)}{\cos 6x\,(\cos 3x + \cos x)} = \frac{\sin 6x}{\cos 6x}$ 1

$= \tan 6x$ $\frac{1}{2}$

25. $T_{r+1} = {}^{n}C_r\, x^{n-r} \cdot y^r$ का प्रयोग करने पर 1

$T_4 = {}^{10}C_3 \left(\frac{x^3}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right)^3$ 1

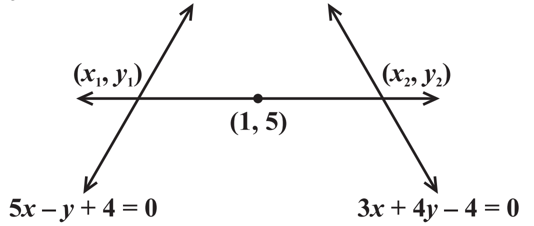
$= -\frac{10.9.8}{3.2.1} \cdot \frac{1}{3^4} \cdot x^{15} = -\frac{40}{27} x^{15}$ 1

अंतिम पद से 5वाँ पद = (11 – 5 + 1) = प्रारम्भ से 7वाँ पद 1

$\therefore \quad T_7 = {}^{10}C_6 \left(\frac{x^3}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^6$ 1

$= \quad \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} \cdot \frac{3^2}{1} = 1890$ 1

26. मान लीजिए कि अभीष्ट, रेखा $5x - y + 4 = 0$ को (x_1, y_1) पर तथा रेखा $3x + 4y - 4 = 0$ को (x_2, y_2) पर प्रतिच्छेद करती है।



$\therefore \quad 5x_1 - y_1 + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 5x_1 + 4$

$3x_2 + 4y_2 - 4 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{4 - 3x_2}{4}$

$\therefore \quad (x_1, 5x_1 + 4)$ तथा $\left(x_2, \frac{4 - 3x_2}{4}\right)$ प्रतिच्छेद बिंदु है $\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ तथा $\frac{\frac{4 - 3x_2}{4} + 5x_1 + 4}{2} = 5$ 1

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 2$ तथा $20x_1 - 3x_2 = 20$ $\frac{1}{2}$

हल करने पर, $x_1 = \frac{26}{23}, x_2 = \frac{20}{23}$ 1

$\therefore \quad y_1 = \frac{222}{23}, \quad y_2 = \frac{8}{23}$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा का समीकरण $y - 5 = \frac{\frac{222}{23} - 5}{\frac{26}{23} - 1}(x - 1)$ है 1

या $\quad 107x - 3y - 92 = 0$ है $\frac{1}{2}$

27. यहाँ $a^2 = 169$ तथा $b^2 = 144 \Rightarrow a = 13, b = 12$ 1

$\therefore$ दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 26$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 24$

क्योंकि $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \therefore e = \frac{5}{13}$ 1

नाभियाँ $(\pm ae, 0)$ हैं $= \left(\pm 13 \cdot \frac{5}{13}, 0\right) = (\pm 5, 0)$ 1

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ हैं $= (\pm 13, 0)$ 1

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(144)}{13} = \frac{288}{13}$ 1

28. **वर्ग :**

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100		
f:	3	7	12	15	8	3	2	$\therefore \sum f = 50$	$\frac{1}{2}$
x_i:	35	45	55	65	75	85	95		
$d_i = \frac{x_i - 65}{10}$	–3	–2	–1	0	1	2	3		
$f_i d_i$:	–9	–14	–12	0	8	6	6	$\sum f_i d_i = -15$	1
$f_i d_i^2$:	+27	28	12	0	8	12	18,	$\sum f_i d_i^2 = 105$	1

माध्य $\overline{x} = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 65 - 3 = 62$ 1

प्रसरण $\sigma^2 = \left[\frac{105}{50} - \left(\frac{-15}{50}\right)^2\right] \cdot 10^2 = 201$ $1\frac{1}{2}$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{201} = 14.17$ 1

29. (i) किसी सामान्य वर्ष में दिनों की कुल संख्या = 365

= 52 सप्ताह + 1 दिन 1

$\therefore$ P(53 रविवार) $= \frac{1}{7}$ 1

(ii) किसी लीप वर्ष में दिनों की कुल संख्या = 366

= 52 सप्ताह + 2 दिन 1

$\therefore$ यह दो दिन, सोमवार एवं मंगलवार, मंगलवार एवं बुधवार, बुधवार एवं शनिवार, शनिवार एवं रविवार या रविवार एवं सोमवार हो सकते हैं।

$\therefore$ P(53 रविवार) $= \frac{2}{7}$ $\frac{1}{2}$

(iii) P(53 रविवार और 53 सोमवार) $= \frac{1}{7}$ (ii से) $1\frac{1}{2}$

टिप्पणी

अध्याय **1**

समुच्चय

1.1 समग्र अवलोकन (Overview)

1.1.1 *समुच्चय और उनका निरूपण (Sets and their representations)*: समुच्चय वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह है। किसी समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं:

(i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप (Roster or Tabular form)

(ii) समुच्चय निर्माण रूप (Set builder form)

1.1.2 *रिक्त समुच्चय (The empty set)*: जिस समुच्चय में एक भी अवयव नहीं होता है उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहते हैं तथा प्रतीक { } या ϕ से प्रदर्शित करते हैं।

1.1.3 *परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and infinite sets)*: वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा समुच्चय अपरिमित कहलाता है।

1.1.4 *उप-समुच्चय (Sub-sets)*: यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उप-समुच्चय कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \subset B$, यदि $a \in A \Rightarrow a \in B$.

हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को **R**
प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को **N**
पूर्णांकों के समुच्चय को **Z**
परिमेय संख्याओं के समुच्चय को **Q**
अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय को **T** द्वारा निरूपित करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$
$$\mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{Q} \not\subset \mathbf{T}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$$

1.1.5 *समान समुच्चय (Equal sets)*: दिये गये दो समुच्चय A और B में यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं। दो समान समुच्चयों में तथ्यत: समान अवयव होते हैं।

1.1.6 *अंतराल R के उप-समुच्चय के रूप में (Intervals as sub-sets of R)* मान लीजिए कि $a, b \in$ R और $a < b$ तब

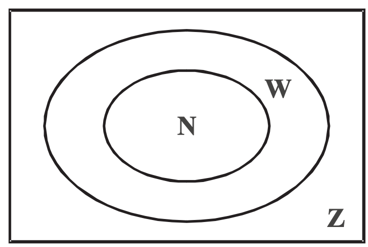
(a) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a < x < b\}$ एक विवृत अंतराल (Open interval) कहलाता है और प्रतीक (a, b) द्वारा निरूपित होता है।

(b) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a \le x \le b\}$ एक संवृत अंतराल (Closed interval) कहलाता है और प्रतीक $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है।

(c) एक अंत्य बिंदु पर बंद तथा दूसरे पर खुले अंतराल निम्नलिखित द्वारा निरूपित होते है:
$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$
$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$

1.1.7 *घात समुच्चय (Power set) :* समुच्चय A के उप-समुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। इसको प्रतीक P(A) से निरूपित करते हैं। यदि A में अवयवों की संख्या = n अर्थात् n(A) = n, तो P(A) में अवयवों की संख्या = 2^n

1.1.8 *सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set):* किसी विशेष संदर्भ में यह एक आधारभूत समुच्चय होता है, जिसके अवयव तथा उप-समुच्चय उस विशेष संदर्भ में प्रासंगिक होते हैं। उदाहरण के लिए अंग्रेजी भाषा के वर्णमाला (Alphabet) में स्वर वर्णों (Vowels) के समुच्चय हेतु, अंग्रेजी भाषा के समस्त वर्णमाला का समुच्चय, एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। सार्वत्रिक समुच्चय को प्रतीक U से निरूपित करते हैं।



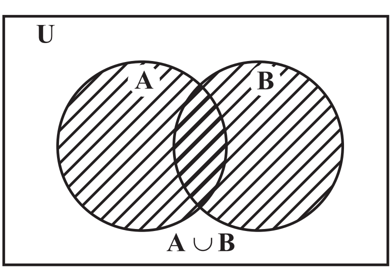
आकृति 1.1

1.1.9 *वेन आरेख (Venn diagrams):* समुच्चयों के बीच संबंधों को निरूपित करने वाले आरेखों को वेन आरेख कहते हैं। उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय पूर्ण संख्याओं के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है, जो स्वयं पूर्णांकों के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है। हम इन संबंधों को आकृति 1.1 में दर्शाए गये वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

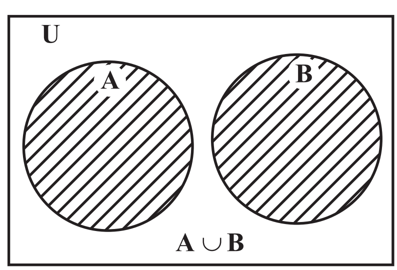
1.1.10 *समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on sets)*

समुच्चयों का सम्मिलन : (Union of Sets): दो दिये हुए समुच्चय A और B का सम्मिलन समुच्चय C है, जिसमें वे सभी अवयव हैं जो या तो A में या B में हैं। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि

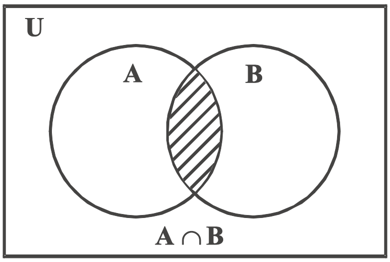
$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$$



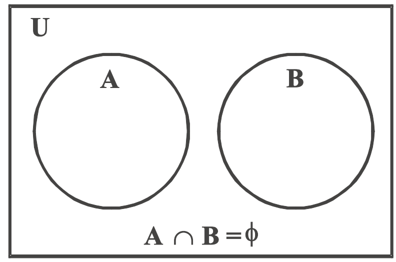
आकृति 1.2 (a)



आकृति 1.2 (b)



आकृति 1.3 (a)



आकृति 1.3 (b)

सम्मिलिन की संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (iii) $A \cup \phi = A$

(iv) $A \cup A = A$ (v) $U \cup A = U$

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets) दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवययों का समुच्चय है जो A और B दोनों में हों। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cap B = \{x : x \in$ A और $x \in B\}$.

यदि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय (Disjoint sets) कहलाते हैं।

सर्वनिष्ठ संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $\phi \cap A = \phi$; $U \cap A = A$ (iv) $A \cap A = A$

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

समुच्चयों का अंतर (Difference of sets) प्रतीक A – B द्वारा निरूपित समुच्चयों A और B का अंतर, उन अवयवों का समुच्चय है, जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं:

$A - B = \{x : x \in$ A और $x \notin B\}$

साथ ही $B - A = \{x : x \in$ B और $x \notin A\}$

समुच्चय का पूरक (Complement of a set) मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का एक उप-समुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय, U के उन अवयवों का समुच्चय है जो A के अवयव नहीं है। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि –

$A' = \{x : x \in$ U और $x \notin A\}$. साथ ही $A' = U - A$

पूरक समुच्चयों के कुछ गुणधर्म (Some properties of complement of sets)

(i) पूरक नियम (Law of complements)

(a) $A \cup A' = U$ (b) $A \cap A' = \phi$

(ii) डि-मॉर्गेन का नियम (De Morgan's law):

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $(A')' = A$

(iv) $U' = \phi$ तथा $\phi' = U$

1.1.11 दो समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ पर आधारित व्यावहारिक प्रश्नों को सरल करने के सूत्र (*Formulae to solve practical problems on union and intersection of two sets*)

यदि A, B और C कोई परिमित समुच्चय हों, तब

(a) $n (A \cup B) = n (A) + n (B) - n (A \cap B)$

(b) यदि $(A \cap B) = \phi$, तो $n (A \cup B) = n (A) + n (B)$

(c) $n (A \cup B \cup C) = n (A) + n (B) + n (C) - n (A \cap B) - n (A \cap C) - n (B \cap C) + n (A \cap B \cap C)$

1.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer)

उदाहरण 1 निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए।

(i) $A = \{x \mid x;$ 10 से छोटा एक धन पूर्णांक है और $2^x - 1$ एक विषम संख्या है$\}$

(ii) $C = \{x : x^2 + 7x - 8 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

हल

(i) x के समस्त धन पूर्णांक मानों के लिए $2^x - 1$ सदैव एक विषम संख्या होगी। विशेष रूप से $x = 1, 2, ...9$ के लिए $2^x - 1$ एक विषम संख्या है। अतः $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ii) $x^2 + 7x - 8 = 0$ या $(x + 8)(x - 1) = 0$ जिससे $x = -8$ या $x = 1$

अतः $C = \{-8, 1\}$

उदाहरण 2 बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य और कौन से असत्य है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $37 \notin \{x \mid x$ के तथ्यतः (exactly) दो धन गुणनखंड हैं$\}$

(ii) $28 \in \{y \mid y$ के समस्त धन गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

(iii) 7,747 संख्या $\in \{t \mid t$, 37 का गुणज (multiple) है $\}$

हल

(i) असत्य

क्योंकि, 37 के तथ्यतः दो घन गुणनखण्ड 1 और 37 है, अतः 37 दिये समुच्चय में है।

(ii) सत्य

क्योंकि, 28 के धन गुणनखण्डों का योगफल

$$= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$$
$$= 56 = 2 \times 28$$

(iii) असत्य

7,747, संख्या 37 का गुणज नहीं है।

उदाहरण 3 यदि X और Y सार्वजनिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $Y \subset X \cup Y$ (ii) $X \cap Y \subset X$ (iii) $X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X$

हल

(i) $X \cup Y = \{x \mid x \in X$ या $x \in Y\}$

इस प्रकार $x \in Y \Rightarrow x \in X \cup Y$

अतः $Y \subset X \cup Y$

(ii) $X \cap Y = \{x \mid x \in X$ और $x \in Y\}$

इस प्रकार $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$

अतः $X \cap Y \subset X$

(iii) ध्यान दीजिए कि

$x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$

इस प्रकार $X \cap Y \subset X$

साथ ही साथ, क्योंकि $X \subset Y$,

अतएव $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in X \cap Y$

अतः $X \subset X \cap Y$

इस प्रकार परिणाम $X = X \cap Y$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 दिया हुआ है कि $N = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, तो

(i) N का वह उप-समुच्चय A लिखिए, जिसके अवयव विषम संख्याएं हैं।

(ii) N का वह उप-समुच्चय B लिखिए, जिसके अवयव $x + 2$ द्वारा निरूपित होते हैं, जहाँ $x \in N$ है।

हल

(i) $A = \{x \mid x \in N$ और x विषम संख्या है$\} = \{1, 3, 5, 7, ..., 99\}$

(ii) $B = \{y \mid y = x + 2, x \in N\}$

अतएव $1 \in N$ के लिए $y = 1 + 2 = 3$

$2 \in N$ के लिए $y = 2 + 2 = 4$ इत्यादि

अतः, $B = \{3, 4, 5, 6, ... , 100\}$

उदाहरण 5 दिया है कि, $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. यदि n, E के किसी सदस्य (अवयव) को निरूपित करता है, तो निम्नलिखित द्वारा निरूपित सभी संख्याओं वाले समुच्चय लिखिए:

(i) $n + 1$ (ii) n^2

हल: दिया है $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(i) मान लीजिए कि, $A = \{x \mid x = n + 1, n \in E\}$

इस प्रकार $2 \in E$ के लिए $x = 3$

$4 \in E$ के लिए $x = 5$ इत्यादि

इसलिए $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

(ii) मान लीजिए $B = \{x \mid x = n^2, n \in E\}$

अतएव, $2 \in E$ के लिए $x = (2)^2 = 4$

$4 \in E$ के लिए $x = (4)^2 = 16$

$6 \in E$ के लिए $x = (6)^2 = 36$ इत्यादि।

इसलिए $B = \{4, 16, 36, 64, 100\}$

उदाहरण 6 मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ यदि n, X के किसी सदस्य को निरूपित करता है, तो निम्नलिखित को समुच्चय रूप में व्यक्त कीजिए

(i) $n \in X$, परंतु $2n \notin X$ (ii) $n + 5 = 8$ (iii) n, 4 से अधिक है

हल

(i) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ यह दिया है कि $n \in X$, परंतु $2n \notin X$

मान लीजिए कि, $A = \{x \mid x \in X$ और $2x \notin X\}$

अब	$1 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 1 = 2 \in X$
	$2 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 2 = 4 \in X$
	$3 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 3 = 6 \in X$
किंतु	$4 \in A$	क्योंकि	$2 \times 4 = 8 \notin X$
	$5 \in A$	क्योंकि	$2 \times 5 = 10 \notin X$
	$6 \in A$	क्योंकि	$2 \times 6 = 12 \notin X$

अत: $A = \{4, 5, 6\}$

(ii) मान लीजिए कि, $B = \{x \mid x \in X$ और $x + 5 = 8\}$

यहाँ $B = \{3\}$ जैसा $x = 3 \in X$ और $3 + 5 = 8$ और X में अन्य कोई ऐसा अवयव x नहीं है, जिसके लिए $x + 5 = 8$.

(iii) मान लीजिए कि $C = \{x \mid x \in X, x > 4\}$

अत: $C = \{5, 6\}$

उदाहरण 7 समुच्चय E, M और U के बीच निम्नलिखित संबंधों को स्पष्ट करने वाले वेन आरेख खींचिए, जहाँ E, किसी विद्यालय में अंग्रेजी पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है, M इसी विद्यालय में गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है तथा U उस विद्यालय में पढ़ने वाले समस्त विद्यार्थियों का समुच्चय है।

(i) गणित पढ़ने वाले सभी विद्यार्थी अंग्रेजी भी पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाले कुछ ऐसे विद्यार्थी हैं जो गणित नहीं पढ़ते हैं।

(ii) ऐसा कोई विद्यार्थी नहीं हैं जो गणित तथा अंग्रेजी दोनों विषय पढ़ता है।

(iii) कुछ विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी नहीं पढ़ते हैं, कुछ अंग्रेजी पढ़ते हैं परंतु गणित नहीं पढ़ते हैं और कुछ दोनों विषय पढ़ते हैं।

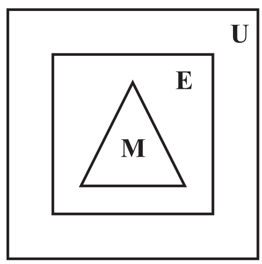
(iv) सभी विद्यार्थी गणित नहीं पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाला प्रत्येक विद्यार्थी गणित भी पढ़ता है।

हल

(i) क्योंकि गणित पढ़ने वाले सभी विद्यार्थी अंग्रेजी भी पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाले कुछ ऐसे विद्यार्थी हैं, जो गणित नहीं पढ़ते हैं।

अतएव, $M \subset E \subset U$

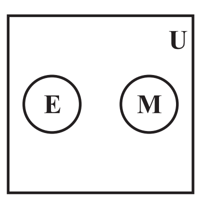
इसका वेन आरेख आकृति 1.4 में दर्शाया गया है।



आकृति 1.4

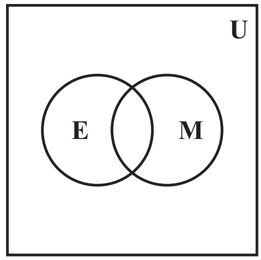
(ii) क्योंकि ऐसा कोई विद्यार्थी नहीं है, जो अंग्रेजी तथा गणित दोनों विषय पढ़ता हो

अत: $E \cap M = \phi$.



आकृति 1.5

(iii) क्योंकि कुछ विद्यार्थी अंग्रेजी तथा गणित दोनों विषय पढ़ते हैं, कुछ केवल अंग्रेजी और कुछ केवल गणित पढ़ते हैं।



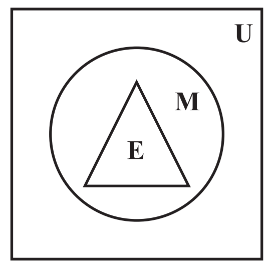
आकृति 1.6

इसका वेन आरेख आकृति 1.6 में दर्शाया गया है।

(iv) क्योंकि अंग्रेजी पढ़ने वाला प्रत्येक विद्यार्थी गणित भी पढ़ता है,

अतः $$E \subset M \subset U$$

आकृति 1.7 का वेन आरेख इसे प्रदर्शित करता है।



आकृति 1.7

उदाहरण 8 सभी समुच्चयों A, B और C के लिए

क्या $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ है? अपने कथन (उत्तर) का औचित्य भी बताइए।

हल नहीं। नीचे लिखे A, B और C समुच्चयों पर विचार कीजिए:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 5\}$$
$$C = \{4, 5, 6\}$$

अब $$(A \cap B) \cup C = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\}) \cup \{4, 5, 6\}$$
$$= \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}$$
$$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

और $$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap [\{2, 3, 5\} \cup \{4, 5, 6\}$$
$$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$= \{2, 3\}$$

अतः $$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$$

उदाहरण 9 समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी समुच्चयों A तथा B के लिए

$$A - (A \cap B) = A - B$$

हल $$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' \quad (\text{क्योंकि } A - B = A \cap B')$$
$$= A \cap (A' \cup B') \text{ (De Morgan's के नियम द्वारा)}$$
$$= (A \cap A') \cup (A \cap B') \quad (\text{वितरण नियम द्वारा})$$

$$= \phi \cup (A \cap B')$$
$$= A \cap B' = A - B$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

उदारहण 10 सभी समुच्चयों A, B तथा C के लिए क्या $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$ है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल हाँ।

मान लीजिए कि $x \in (A - B) \cap (C - B)$

$\Rightarrow \quad x \in A - B$ और $x \in C - B$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ और $x \notin B)$ और $(x \in C$ और $x \notin B)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ और $x \in C)$ और $x \notin B$

$\Rightarrow \quad (x \in A \cap C)$ और $x \notin B$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap C) - B$

अतएव $\quad (A - B) \cap (C - B) \subset (A \cap C) - B \quad \ldots (1)$

विलोमत: (Conversely),

मान लीजिए कि $y \in (A \cap C) - B$

$\Rightarrow \quad y \in (A \cap C)$ और $y \notin B$

$\Rightarrow \quad (y \in A$ और $y \in C)$ और $y \notin B$

$\Rightarrow \quad (y \in A$ और $y \notin B)$ और $(y \in C$ और $y \notin B)$

$\Rightarrow \quad y \in (A - B)$ और $y \in (C - B)$

$\Rightarrow \quad y \in (A - B) \cap (C - B)$

अतएव $\quad (A \cap C) - B \subset (A - B) \cap (C - B) \quad \ldots (2)$

(1) तथा (2) द्वारा $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$

उदाहरण 11 मान लीजिए कि A, B और C समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

हल हम पहले सिद्ध करेंगे कि $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

मान लीजिए कि $x \in A \cup (B \cap C)$, तो

$\quad x \in A \quad$ या $\quad x \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in A \quad$ या $\quad (x \in B$ और $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ या $x \in B)$ और $(x \in A$ या $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A \cup B)$ और $(x \in A \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

अत: $\quad A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \ldots (1)$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (A \cup C)$

मान लीजिए कि $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup B$ और $x \in A \cup C$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ या $x \in B)$ और $(x \in A$ या $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ या $(x \in B$ और $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ या $(x \in B \cap C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup (B \cap C)$

अतः $\quad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ ... (2)

अतएव (1) तथा (2) से

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

उदाहरण 12 मान लीजिए कि P अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और $S = \{t \mid 2^t - 1$एक अभाज्य संख्या है। सिद्ध कीजिए कि $S \subset P$.

उदाहरण अब कथन $x \in S \Rightarrow x \in P$ का समतुल्य (equivalent) प्रतिधनात्मक (Contrapositive) कथन $x \notin P \Rightarrow x \notin S$ है।

अब हम उपर्युक्त प्रतिधनात्मक कथन को विरोधोक्ति (contradiction) द्वारा सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए कि $x \notin P$

$\Rightarrow \quad x$ एक संयुक्त संख्या (composite number) है।

अब मान लीजिए कि $x \in S$

$\Rightarrow \quad 2^x - 1 = m \quad$ (जहाँ m एक अभाज्य संख्या है)

$\Rightarrow \quad 2^x = m + 1$

जो सभी संयुक्त संख्याओं के लिए सत्य नहीं है, उदाहरणार्थ $x = 4$ क्योंकि $2^4 = 16$, जो किसी अभाज्य संख्या m तथा 1 का योगफल नहीं हो सकता है।

अतः हमें एक विरोधोक्ति प्राप्त होती है।

अतएव, $\quad$ जब $x \notin P$, तो हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $x \notin S$

अतः $\quad S \subset P$

उदारहण 13 गणित, भौतिक विज्ञान तथा रसायन विज्ञान में परीक्षा देने वाले 50 विद्यार्थियों में से प्रत्येक कम से कम एक विषय में उत्तीर्ण होता है। 37 गणित में, 24 भौतिक विज्ञान में तथा 43 रसायन विज्ञान में उत्तीर्ण होते हैं। यदि गणित और भौतिक विज्ञान में अधिकतम 19, गणित और रसायन विज्ञान में अधिकतम 29 तथा भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान में अधिकतम 20 उत्तीर्ण होते हैं, तो तीनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की अधिकतम संभव संख्या कितनी है?

हल $\quad$ मान लीजिए कि,

M गणित में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है,

P भौतिक विज्ञान में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है और

C रसायन विज्ञान में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है

अब $n(\mathrm{M} \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{C}) = 50, n(\mathrm{M}) = 37, n(\mathrm{P}) = 24, n(\mathrm{C}) = 43$

$n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) \leq 19, n(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) \leq 29,$ तथा $n(\mathrm{P} \cap \mathrm{C}) \leq 20$ (दिया है)

ज्ञात है कि,

$$n(\mathrm{M} \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{C}) = n(\mathrm{M}) + n(\mathrm{P}) + n(\mathrm{C}) - n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) - n(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) - n(\mathrm{P} \cap \mathrm{C}) + n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) \leq 50$$

$\Rightarrow \quad 37 + 24 + 43 - 19 - 29 - 20 + n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) \leq 50$

$\Rightarrow \quad n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) \leq 50 - 36$

$\Rightarrow \quad n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) \leq 14$

अतः तीनों विषयों में उत्तीर्ण होने वालों की अधिकतम संभव संख्या 14 है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

उदाहरण 14 से 16 में दिये गये चार विकल्पों में से सही विकल्प का चयन कीजिए: (M.C.Q.)

उदाहरण 14 प्रत्येक समुच्चय X_r में 5 अवयव हैं तथा प्रत्येक समुच्चय Y_r में 2 अवयव हैं और $\bigcup_{r=1}^{20} \mathrm{X}_r = \mathrm{S} = \bigcup_{r=1}^{n} \mathrm{Y}_r$. यदि S का प्रत्येक अवयव X_r के तथ्यतः (exactly) 10 समुच्चयों और Y_r प्रकार के तथ्यतः 4 समुच्चयों में है, तो n का मान

(A) 10 (B) 20 (C) 100 (D) 50

हल सही उत्तर (B) है।

क्योंकि, $n(\mathrm{X}_r) = 5, \bigcup_{r=1}^{20} \mathrm{X}_r = \mathrm{S}$, अतएव $n(\mathrm{S}) = 100$

परंतु S का प्रत्येक अवयव X_r प्रकार के तथ्यतः (ठीक-ठीक) 10 समुच्चयों में है, अतएव $\frac{100}{10} = 10$ सुस्पष्ट (distinct) अवयव S में हैं। साथ ही साथ (Also) S का प्रत्येक अवयव Y_r प्रकार के तथ्यतः 4 समुच्चयों में है और प्रत्येक Y_r में 2 अवयव हैं। इस प्रकार यदि Y_r प्रकार के n समुच्चय S में हैं, तो

$$\frac{2n}{4} = 10$$

अतएव $n = 20$

उदाहरण 15 दो परिमित (Finite) समुच्चयों में क्रमशः m और n अवयव हैं। पहले समुच्चय के उप-समुच्चयों की कुल संख्या दूसरे समुच्चय के उप-समुच्चयों की कुल संख्या से 56 अधिक है। m और n के मान क्रमशः

(A) 7, 6 (B) 5, 1 (C) 6, 3 (D) 8, 7

हल सही उत्तर (C) है।

मान लीजिए कि A तथा B ऐसे समुच्चय हैं कि $n(A) = m$, $n(B) = n$

इस प्रकार $n(P(A)) = 2^m$, $n(P(B)) = 2^n$

अतएव $n(P(A)) - n(P(B)) = 56$, अर्थात् $2^m - 2^n = 56$

$\Rightarrow \quad 2^n (2^{m-n} - 1) = 2^3 7$

$\Rightarrow \quad n = 3$, $2^{m-n} - 1 = 7$

$\Rightarrow \quad m = 6$

उदाहरण 16 समुच्चय $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$ समान है

(A) $B \cap C'$ (B) $A \cap C$ (C) $B \cup C'$ (D) $A \cap C'$

हल: सही उत्तर (A) है,

क्योंकि, $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$

$$= (A \cup (B \cup C)) \cap (A' \cup (B \cup C)) \cap C'$$
$$= (A \cap A') \cup (B \cup C) \cap C'$$
$$= \phi \cup (B \cup C) \cap C'$$
$$= B \cap C' \cup \phi = B \cap C'$$

उदाहरण 17 और 18 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

उदारहण 17 यदि A और B दो परिमित समुच्चय हैं, तो $n(A) + n(B)$ __________ के बराबर होता है।

हल: क्योंकि $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

अब $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

उदाहरण 18 यदि A एक परिमित समुच्चय है, जिसमें n अवयव हैं, तो A के उप-समुच्चयों की संख्या __________ होती है।

हल 2^n

बताइए कि उदाहरण 19 और 20 में दिये निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि R और S निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित समुच्चय हैं:

$$R = \{x \in \mathbf{Z} \mid x, 2 \text{ से भाज्य है}\}$$
$$S = \{y \in \mathbf{Z} \mid y, 3 \text{ उसे भाज्य है}\},$$

तो $R \cap S = \phi$

हल असत्य। क्योंकि 6, 3 ओर 2 दोनों से भाज्य है।

अतः $\quad R \cap S \neq \phi$

उदाहरण 20 $Q \cap R = Q$, जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

हल: सत्य क्योंकि $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, इसलिए $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$

1.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $A = \{x : x \in \mathbf{R}, 2x + 11 = 15\}$ (ii) $B = \{x \mid x^2 = x, x \in \mathbf{R}\}$

(iii) $C = \{x \mid x$ अभाज्य संख्या p का एक धनात्मक गुणनखंड है$\}$

2. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $D = \{t \mid t^3 = t, t \in R\}$ (ii) $E = \{w \mid \dfrac{w-2}{w+3} = 3, w \in \mathbf{R}\}$

(iii) $F = \{x \mid x^4 - 5x^2 + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

3. यदि $Y = \{x \mid x$ संख्या $2^{p-1}(2^p - 1)$ का एक धनात्मक गुणनखंड है, जहाँ $2^p - 1$ एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो Y को रोस्टर रूप में लिखिए।

4. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन सत्य और कौन असत्य है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $35 \in \{x \mid x$ के तथ्यतः चार धनात्मक गुणनखंड हैं$\}$

(ii) $128 \in \{y \mid y$ के समस्त धनात्मक गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

(iii) $3 \notin \{x \mid x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 112x + 6 = 0\}$

(iv) $496 \notin \{y \mid y$ के समस्त धनात्मक गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

5. दिया है कि $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6\}$ और $N = \{1, 3, 5\}$, तो सत्यापित (Verify) कीजिए कि $L - (M \cup N) = (L - M) \cap (L - N)$

6. यदि A और B सार्वत्रिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि,

(i) $A \subset A \cup B$ (ii) $A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B = B)$

(iii) $(A \cap B) \subset A$

7. दिया है कि, $N = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, तो निम्नलिखित को लिखिए:

(i) N का वह उप-समुच्चय, जिसके अवयव सम संख्याएँ हैं।

(ii) N का वह उप-समुच्चय, जिसके अवयव पूर्ण वर्ग (Perfect square) संख्याएँ हैं।

8. दिया है कि $X = \{1, 2, 3\}$, यदि n समुच्चय X के किसी सदस्य को निरूपित करता है, तो

निम्नलिखित द्वारा निरूपित समस्त संख्याओं को अंतर्विष्ट (Contain) करने वाले समुच्चयों को लिखिए:

(i) $4n$ (ii) $n + 6$ (iii) $\frac{n}{2}$ (iv) $n - 1$

9. यदि $Y = \{1, 2, 3, ... 10\}$, तथा a समुच्चय Y के किसी अवयव को निरूपित करता है, तो उन समुच्चयों को लिखिए जिनके अंतर्विष्ट समस्त अवयव निम्नलिखित प्रतिबंधों (Conditions) को संतुष्ट करते हैं:

(i) $a \in Y$ परंतु $a^2 \notin Y$ (ii) $a + 1 = 6, a \in Y$

(iii) a, 6 से कम है और $a \in Y$

10. A, B तथा C सार्वत्रिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं। यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$ $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $C = \{5, 10, 15, 20\}$ और U सभी पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है, तो U, A, B और C के परस्पर संबंधों को दर्शाने वाला वेन आरेख खींचिए।

11. मान लीजिए कि U किसी विद्यालय के समस्त लड़के और लड़कियों का समुच्चय है, G उस विद्यालय के समस्त लड़कियों का समुच्चय है, B उस विद्यालय के समस्त लड़कों का समुच्चय है और S उस विद्यालय के उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो तैरना सीखते हैं। उस विद्यालय के केवल कुछ विद्यार्थी तैरना सीखते हैं। U, G, B और S समुच्चयों के बीच संभव परस्पर संबंधों में से किसी एक संबंध को प्रदर्शित करने वाला एक वेन आरेख खींचिए।

12. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए सिद्ध कीजिए कि, $(A - B) \cap (C - B) = A - (B \cup C)$

निर्धारित कीजिए कि प्रश्न संख्या 13 से 17 तक में दिये गये कथन सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

13. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

14. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, $A - (B - C) = (A - B) - C$

15. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset B$, तो $A \cap C \subset B \cap C$

16. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset B$, तो $A \cup C \subset B \cup C$

17. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset C$ और $B \subset C$, तो $A \cup B \subset C$

समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न संख्या 18 से 21 में दिये कथनों को सिद्ध कीजिए:

18. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A \cup (B - A) = A \cup B$

19. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A - (A - B) = A \cap B$

20. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A - (A \cap B) = A - B$

21. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $(A \cup B) - B = A - B$

22. मान लीजिए कि $T = \left\{ x \mid \frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x} \right\}$ क्या T एक रिक्त समुच्चय है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

23. मान लीजिए कि A, B और C कोई समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

24. 100 विद्यार्थियों में से 15 अंग्रेजी, 12 गणित और 8 विज्ञान में उत्तीर्ण हुए। 6 अंग्रेजी और गणित, 7 गणित और विज्ञान, 4, अंग्रेजी और विज्ञान तथा 4 तीनों विषयों में उत्तीर्ण हुए। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए:–

(i) अंग्रेजी और गणित परंतु विज्ञान में नहीं
(ii) गणित और विज्ञान परंतु अंग्रेजी में नहीं
(iii) केवल गणित में
(iv) केवल एक से अधिक विषयों में

25. 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 25 विद्यार्थी क्रिकेट और 20 विद्यार्थी टेनिस खेलते हैं तथा 10 विद्यार्थी दोनों ही खेल खेलते हैं। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो इन दोनों में से कोई भी खेल नहीं खेलते हैं।

26. किसी विद्यालय के 200 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण (Survey) से ज्ञात हुआ कि 120 विद्यार्थी गणित, 90 भौतिक विज्ञान तथा 70 रसायन विज्ञान पढ़ते हैं। 40 गणित और भौतिक विज्ञान, 30 भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान, 50 रसायन विज्ञान और गणित पढ़ते हैं तथा 20 इन विषयों में से कोई भी विषय नहीं पढ़ते हैं। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए, जो इन तीनों ही विषयों को पढ़ते हैं।

27. किसी शहर के 10,000 परिवारों के बारे में ज्ञात होता है कि 40% समाचार पत्र A, 20% समाचार पत्र B, 10% समाचार पत्र C, 5% समाचार पत्र A और B, 3% समाचार पत्र B और C तथा 4% समाचार पत्र A और C खरीदते हैं। यदि 2% परिवार तीनों ही समाचार पत्र खरीदते हैं, तो उन परिवारों की संख्या ज्ञात कीजिए जो

(a) केवल समाचार पत्र A खरीदते हैं।
(b) A, B तथा C में से कोई भी समाचार पत्र नहीं खरीदते हैं।

28. 50 विद्यार्थियों के एक समूह में फ्रांसीसी, अंग्रेजी और संस्कृत विषयों का अध्ययन करने वालों की संख्या निम्नलिखित प्रकार है: फ्रांसीसी = 17, अंग्रेजी = 13, संस्कृत = 15, फ्रांसीसी और अंग्रेजी = 09, अंग्रेजी और संस्कृत = 04, फ्रांसीसी और संस्कृत = 05, अंग्रेजी, फ्रांसीसी और संस्कृत = 03 उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो,

(i) केवल फ्रांसीसी पढ़ते हैं।
(ii) केवल अंग्रेजी पढ़ते हैं।
(iii) केवल संस्कृत पढ़ते हैं।
(iv) अंग्रेजी और संस्कृत पढ़ते हैं परंतु, फ्रांसीसी नहीं पढ़ते हैं।
(v) फ्रांसीसी और संस्कृत पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी नहीं पढ़ते हैं।
(vi) फ्रांसीसी और अंग्रेजी पढ़ते हैं परंतु संस्कृत नहीं पढ़ते हैं।
(vii) तीनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा पढ़ते हैं।
(viii) तीनों भाषाओं में से एक भी भाषा नहीं पढ़ते हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न संख्या 29 से 43 में प्रत्येक में दिये गये चार विकल्पों में सही विकल्प का चयन कीजिए (M.C.Q.):

29. मान लीजिए कि तीस समुच्चय $A_1, A_2, A_3, ..., A_{30}$ में से प्रत्येक में 5 अवयव तथा n समुच्चय $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ में से प्रत्येक में 3 अवयव है। मान लीजिए कि $\bigcup_{i=1}^{30} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = S$ यदि S का प्रत्येक अवयव A_i प्रकार के तथ्यत: 10 और B_j, प्रकार के तथ्यत: 9 समुच्चयों में है, तो n का मान

(A) 15 (B) 3 (C) 45 (D) 35

30. दो परिमित समुच्चयों में क्रमश: m और n अवयव हैं। पहले समुच्चय के उप-समुच्चयों की संख्या दूसरे समुच्चय के उप-समुच्चयों के उप-समुच्चयों की संख्या से 112 अधिक है। m और n के मान क्रमश:

(A) 4, 7 (B) 7, 4 (C) 4, 4 (D) 7, 7

31. समुच्चय $(A \cap B')' \cup (B \cap C)$ निम्नलिखित में से किस समुच्चय के समान है:

(A) $A' \cup B \cup C$ (B) $A' \cup B$ (C) $A' \cup C'$ (D) $A' \cap B$

32. मान लीजिए कि F_1 समांतर चतुर्भुज, F_2 आयत, F_3 समचतुर्भुज, F_4 वर्ग तथा F_5 समलंब चतुर्भुज के समुच्चय हैं, तो F_1 निम्नलिखित में से किसके समान है?

(A) $F_2 \cap F_3$ (B) $F_3 \cap F_4$

(C) $F_2 \cup F_5$ (D) $F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_1$

33. मान लीजिए कि S = किसी वर्ग के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय, T = किसी त्रिभुज के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय, C = किसी वृत्त के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय। यदि त्रिभुज और वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं (काटते हैं) और वर्ग में अंतर्विष्ट हैं, तो

(A) $S \cap T \cap C = \phi$ (B) $S \cup T \cup C = C$

(C) $S \cup T \cup C = S$ (D) $S \cup T = S \cap C$

34. मान लीजिए कि R, भुजा a और b $(a, b > 1)$ वाले एक ऐसे आयत के भीतरी बिंदुओं का समुच्चय है, जिसकी भुजाएँ क्रमश: x-अक्ष तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के अनुदिश (along) हैं, तो

(A) $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$

(B) $R = \{(x, y) : 0 \le x < a, 0 \le y \le b\}$

(C) $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 < y < b\}$

(D) $R = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$

35. 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 25 विद्यार्थी क्रिकेट, 20 विद्यार्थी टेनिस और 10 विद्यार्थी दोनों ही खेल खेलते हैं, तो दोनों में से कोई भी खेल नहीं खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या

(A) 0 (B) 25 (C) 35 (D) 45 है।

36. यदि 840 व्यक्तियों वाले किसी नगर में 450 व्यक्ति हिंदी, 300 व्यक्ति अंग्रेजी और 200 व्यक्ति दोनों ही विषय पढ़ते हैं, तो दोनों में से कोई भी विषय नहीं पढ़ने वाले व्यक्तियों की संख्या

(A) 210 (B) 290 (C) 180 (D) 260 है।

37. यदि $X = \{8^n - 7n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ और $Y = \{49n - 49 \mid n \in \mathbf{N}\}$, तो

(A) $X \subset Y$ (B) $Y \subset X$ (C) $X = Y$ (D) $X \cap Y = \phi$

38. एक सर्वेक्षण प्रदर्शित करता है कि 63% लोग किसी समाचार चैनल (News Channel) को देखते हैं जबकि 76% लोग किसी अन्य चैनल को देखते हैं। यदि x% लोग दोनों चैनल देखते हैं, तो

(A) $x = 35$ (B) $x = 63$ (C) $39 \le x \le 63$ (D) $x = 39$

39. यदि समुच्चय A और B निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं,

$A = \{(x, y) \mid y = \dfrac{1}{x}, 0 \ne x \in \mathbf{R}\}$ $B = \{(x; y) \mid y = -x, x \in \mathbf{R}\}$, तो

(A) $A \cap B = A$ (B) $A \cap B = B$ (C) $A \cap B = \phi$ (D) $A \cup B = A$

40. यदि A और B दो समुच्चय हैं, तो $A \cap (A \cup B)$ समान है:

(A) A (B) B (C) ϕ (D) $A \cap B$

41. यदि $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ $B = \{2, 4, ..., 18\}$ तथा N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय है, तो $A' \cup (A \cup B) \cap B')$ समान है:

(A) ϕ (B) **N** (C) A (D) B

42. मान लीजिए कि $S = \{x \mid x$ 100 से छोटा 3 का एक धनात्मक गुणज है$\}$,
$P = \{x \mid x$, 20 से छोटी एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो $n(S) + n(P) =$

(A) 34 (B) 31 (C) 33 (D) 30 है।

43. यदि X तथा Y दो समुच्चय हैं और X′ X के पूरक समुच्चय को निरूपित करता है, तो $X \cap (X \cup Y)$ समान है:

(A) X (B) Y (C) ϕ (D) $X \cap Y$

प्रश्न संख्या 44 से 51 में से प्रत्येक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

44. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R} : 1 \le x < 2\}$ को ______________ प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

45. जब $A = \phi$, तो P(A) में अवयवों की संख्या ______________ है।

46. यदि A तथा B इस प्रकार के परिमित समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $n(A \cup B) =$ ______________.

47. यदि A तथा B कोई भी दो समुच्चय हैं, तो A – B ______________ के समान है।

48. समुच्चय A = {1, 2} का घात समुच्चय _______________ है।

49. दिया हुआ है कि A = {1, 3, 5}. B = {2, 4, 6} तथा C = {0, 2, 4, 6, 8}, तो समुच्चयों A, B तथा C का एक सार्वत्रिक समुच्चय _______________ है।

50. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 2, 3, 5}, B = {2, 4, 6, 7} तथा C = {2, 3, 4, 8}, तो

(i) $(B \cup C)'$ _______________ है। (ii) $(C - A)'$ _______________ है।

51. किसी भी समुच्चय A तथा B के लिए, $A - (A \cap B)$ ______________ के समान है।

52. सभी समुच्चयों A, B तथा C के लिए निम्नलिखित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए:

(i) $((A' \cup B') - A)'$	(a) $A - B$
(ii) $[B' \cup (B' - A)]'$	(b) A
(iii) $(A - B) - (B - C)$	(c) B
(iv) $(A - B) \cap (C - B)$	(d) $(A \times B) \cap (A \times C)$
(v) $A \times (B \cap C)$	(e) $(A \times B) \cup (A \times C)$
(vi) $A \times (B \cup C)$	(f) $(A \cap C) - B$

प्रश्न संख्या 53 से 58 में से प्रत्येक में दिये हुए निम्नलिखित कथनों को सत्य या असत्य में व्यक्त कीजिए:

53. यदि A कोई समुच्चय है, तो $A \subset A$

54. दिया हुआ है कि M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} और यदि B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, तो $B \not\subset M$

55. समुच्चय {1, 2, 3, 4} तथा {3, 4, 5, 6} समान हैं।

56. $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Q}$, जहाँ **Q** परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और **Z** पूर्णांकों का समुच्चय है।

57. मान लीजिए कि समुच्चय R और T निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं,

R = {$x \in \mathbf{Z}$ | x, संख्या 2 से भाज्य है}

T = {$x \in \mathbf{Z}$ | x, संख्या 6 भाज्य है}, तो $T \subset R$

58. दिया हुआ है कि A = {0, 1, 2}, B = {$x \in \mathbf{R}$ | $0 \le x \le 2$}, तो सिद्ध कीजिए कि A = B.

अध्याय 2

संबंध एवं फलन

2.1 समग्र अवलोकन (Overview)

इस अध्याय में दो समुच्चयों के अवयवों के युग्म (pair) के बारे में विचार किया गया है और फिर युग्म के घटकों (elements) के बीच संबंध का परिचय कराया गया है। व्यावहारिक रूप से अपने जीवन में प्रतिदिन हम दो समुच्चयों के सदस्यों का युग्म बनाते रहते हैं। उदाहरणार्थ, दिन के प्रत्येक घंटे को दूरदर्शन के मौसम विज्ञानी द्वारा पठित स्थानीय तापमान के साथ युग्मित किया जाता है। एक अध्यापक, यह जानने के लिए कि कक्षा ने किसी पाठ को कितनी अच्छी तरह समझा है, बहुधा प्राप्तांकों और उन प्राप्तांकों को पाने वाले विद्यार्थियों की संख्याओं का युग्म बनाते हैं। अंत में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे में जानेंगे जो फलन (Function) कहलाते हैं।

2.1.1 *समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian products of sets)*

परिभाषा : दिये हुए दो अतिरिक्त समुच्चयों A तथा B के लिए, उन सभी क्रमित (Ordered) युग्मों (x, y) का समुच्चय, जहाँ $x \in$ A और $y \in$ B, A तथा B का कार्तीय गुणन कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप में, हम लिखते हैं कि.

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{A} \text{ और } y \in \mathrm{B}\}$$

यदि $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ और $\mathrm{B} = \{4, 5\}$, तो

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

तथा $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

(i) दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत (Corresponding) प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों, अर्थात् $(x, y) = (u, v)$, यदि और केवल यदि $x = u$, $y = v$.

(ii) यदि $n(\mathrm{A}) = p$ और $n(\mathrm{B}) = q$, तो $n(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = p \times q$

(iii) $\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathrm{A}\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रियक (Ordered triplet) कहलाता है।

2.1.2 *संबंध (Relations)* : किसी अतिरिक्त समुच्चय A से अतिरिक्त समुच्चय B में संबंध R, कार्तीय गुणन A × B का एक उप-समुच्चय होता है। यह उप-समुच्चय, A × B के क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों तथा द्वितीय घटकों के बीच कोई प्रतिबंध (संबंध) लगाने से प्राप्त होता है। इन क्रमित युग्मों के द्वितीय घटक, प्रथम घटक का प्रतिबिंब (image) कहलाता है।

किसी संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को R का प्रांत (domain) तथा द्वितीय घटकों के समुच्चय को R का परिसर (range) कहते हैं।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि R = $\{(1, 2), (-2, 3), (\frac{1}{2}, 3)\}$ एक संबंध है, तो R का प्रांत = $\{1, -2, \frac{1}{2}\}$ तथा R का परिसर = $\{2, 3\}$.

(i) किसी संबंध का निरूपण या तो रोस्टर रूप या समुच्चय निर्माण रूप द्वारा किया जा सकता है अथवा उसका निरूपण एक तीर आरेख (arrow diagram) द्वारा भी किया जा सकता है, जो उसका एक दृष्टि चित्रण (visual representation) भी है।

(ii) यदि n (A) = p, n (B) = q तो n (A × B) = pq और समुच्चय A से समुच्चय B में संबंधों की कुल संभव संख्या = 2^{pq}

2.1.3 फलन (*Functions*) : किसी समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध f एक फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में एक और केवल एक प्रतिबिंब होता है।

दूसरे शब्दों में एक फलन ऐसा संबंध है जिसके दो युग्मों के प्रथम घटक समान न हों।

संकेतन $f: X \to Y$ का तात्पर्य है कि f, X से Y में एक फलन है। X को f का प्रांत तथा Y को f का सहप्रांत (Co-domain) कहते हैं। एक प्रदत्त अवयव $x \in X$ से संबंधित f के अंतर्गत, Y में एक अद्वितीय (unique)अवयव y होता है।

f के अंतर्गत, x से संबंधित अद्वितीय अवयव y को प्रतीक $f(x)$ द्वारा निरूपित करते हैं और उसे 'x का f', या x पर f का मान' या f के अन्तर्गत x का **प्रतिबिंब**' कहते हैं।

$f(x)$ के समस्त मानों को एक साथ लेने से बने समुच्चय को f का परिसर या f के अंतर्गत x का **प्रतिबिंब** कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,

$$f \text{ का परिसर} = \{ y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$$

परिभाषा : एक ऐसा फलन, जिसका परिसर **R** (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) या उसका कोई उप-समुच्चय हो, वास्तविक मान फलन (real valued function) कहते हैं। इसके अतिरिक्त, यदि इसका प्रांत भी या तो **R** अथवा **R** का एक उप समुच्चय हो तो इसे वास्तविक फलन कहते हैं।

2.1.4 *कुछ विशेष प्रकार के फलन (Some specific types of functions)*

(i) **तत्समक फलन (Identity function):**

नियम (प्रतिबिंध) $y = f(x) = x$ प्रत्येक $x \in$ **R** द्वारा परिभाषित

फलन $f: R \to R$, तत्समक फलन कहलाता है।

f का प्रांत = **R,** f का परिसर = R

(ii) **अचर फलन (Constant function):**

नियम अथवा प्रतिबंध $y = f(x) = C$, $x \in$ **R**, जहां C एक अचर है, द्वारा परिभाषित फलन $f: R \to R$, एक अचर फलन कहलाता है।

f का प्रांत = **R**, तथा f का परिसर = {C}

(iii) **बहुपद या बहुपदीय फलन (Polynomial function):**

प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए प्रतिबंध $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$ और a_0, $a_1, a_2 ... a_n \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, एक बहुपद फलन कहलाता है।

(iv) **परिमेय फलन (Rational function):**

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ प्रकार के वास्तविक फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$, x के ऐसे बहुपद फलन हैं, जो एक ऐसे प्रांत में परिभाषित हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$, परिमेय फलन कहलाते हैं। उदाहरणार्थ, नियम $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} - \{-2\} \to \mathbf{R}$, एक परिमेय फलन है।

(v) **मापांक फलन (Modulus function):**

नियम $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन, मापांक फलन कहलाता है।

f का प्रांत $= \mathbf{R}$

f का परिसर $= \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

(vi) **चिह्न फलन (Signum function):**

नियम $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा

परिभाषित वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, चिह्न फलन कहलाता है। f का प्रांत $= \mathbf{R}$, f का परिसर $= \{1, 0, -1\}$

(vii) **महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer function):**

नियम $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक मान ग्रहण (धारण) करता है, द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है।

अतः $f(x) = [x] = -1$, $-1 \leq x < 0$ के लिए

$f(x) = [x] = 0$, $0 \leq x < 1$ के लिए

$[x] = 1$, $1 \leq x < 2$ के लिए

$[x] = 2$, $2 \leq x < 3$ के लिए, इत्यादि।

2.1.5 *वास्तविक फलनों का बीजगणित* (*Algebra of real functions*)

(i) **दो वास्तविक फलनों का योग**

मान लीजिए कि $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$ तब हम $(f + g) : X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) **एक वास्तविक फलन से दूसरे को घटाना**

मान लीजिए कि $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subseteq \mathbf{R}$ तब हम $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) **एक अदिश (*Scalar*) गुणन**

मान लीजिए कि $f : x \to \mathrm{R}$ एक वास्तविक फलन है तथा α एक अदिश है जो $\mathbf{R}$ में है, तब गुणनफल αf, X से $\mathbf{R}$ में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$ द्वारा परिभाषित है।

(iv) **दो वास्तविक फलनों का गुणन:** मान लीजिए कि $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : x \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subseteq \mathbf{R}$, तब इन दोनों फलनों का गुणनफल

$(f g)(x) = f(x) \,.\, g(x)\ \forall\ x \in X$ द्वारा परिभाषित फलन $f g : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ है।

(v) **दो वास्तविक फलनों का भागफल:** मान लीजिए कि f तथा g, **X** से **R** में परिभाषित दो वास्तविक फलन हैं। प्रतीक $\dfrac{f}{g}$ से निर्दिष्ट (denote), f का g से भागफल, नियम

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0, x \in X$ द्वारा परिभाषित **X** से **R** में एक फलन है।

टिप्पणी योगफल फलन $f + g$, अंतर फलन $f - g$ और गुणनफल fg में से प्रत्येक का प्रांत

$= \{x : x \in D_f \cap D_g\}$

जहाँ $D_f = f$ का प्रांत,

$D_g = g$ का प्रांत।

फलन का प्रांत $= \dfrac{f}{g}$ का प्रांत

$= \{x : x \in D_f \cap D_g$ और $g(x) \neq 0\}$

2.2 हल किये हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तर वाले (S.A)

उदाहरण 1 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{5, 7, 9\}$ ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$

(iii) क्या $A \times B = B \times A$? (iv) क्या $n\,(A \times B) = n\,(B \times A)$?

हल चूँकि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{5, 7, 9\}$, अत:

(i) $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$

(ii) $B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4)\}$

(iii) नहीं, $A \times B \neq B \times A$ क्योंकि $A \times B$ और $B \times A$ में तथ्यत: एक समान क्रमित युग्म नहीं हैं।

(iv) $n\,(A \times B) = n\,(A) \times n\,(B) = 4 \times 3 = 12$

$n\,(B \times A) = n\,(B) \times n\,(A) = 4 \times 3 = 12$

अत: $n\,(A \times B) = n\,(B \times A)$

उदारहण 2 x और y ज्ञात कीजिए, यदि,

(i) $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$ (ii) $(x - y, x + y) = (6, 10)$

हल

(i) चूँकि $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$, इसलिए

$4x + 3 = 3x + 5$

या $x = 2$

तथा $y = -2$

(ii) $x - y = 6$

$x + y = 10$

$\therefore$ $2x = 16$

या $x = 8$

$8 - y = 6$

$\therefore$ $y = 2$

उदाहरण 3 यदि $A = \{2, 4, 6, 9\}$ और $B = \{4, 6, 18, 27, 54\}$, $a \in A$, $b \in B$, तो क्रमित (a, b) 'a', 'b' का एक गुणनखंड है और $a < b$.

हल क्योंकि संख्या 2, संख्या 4 का एक गुणनखंड है तथा $2 < 4$, इसलिए $(2, 4)$ इस प्रकार का एक क्रमित युग्म है।

इसी प्रकार $(2, 6)$, $(2, 18)$, $(2, 54)$ इसी प्रकार के अन्य क्रमित युग्म हैं।

अत: {(2, 4), (2, 6), (2, 18), (2, 54), (6, 18), (6, 54,), (9, 18), (9, 27), (9, 54)} क्रमित युग्मों का अभीष्ट समुच्चय है।

उदाहरण 4 $R = \{(x, y) : y = x + \frac{6}{x}$; जहाँ $x, y \in \mathbf{N}$ और $x < 6\}$ द्वारा प्रदत्त (given) संबंध का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल जब $x = 1, y = 7 \in \mathbf{N}$, अतएव $(1, 7) \in R$

पुन: जब $x = 2$. $y = 2 + \frac{6}{2} = 5 \in \mathbf{N}$,

अतएव $(2, 5) \in R$ पुन: जब $x = 3,\ y = 3 + \frac{6}{3} = 5 \in \mathbf{N}$, $(3, 5) \in R$ इसके अतिरिक्त $x = 4$ के लिए $y = 4 + \frac{6}{4} \notin \mathbf{N}$ तथा $x = 5$ के लिए $y = 5 + \frac{6}{5} \notin \mathbf{N}$

अत: $R = \{(1, 7), (2, 5), (3, 5)\}$, जहाँ R का प्रांत = {1, 2, 3} और R का परिसर = {7, 5}

उदाहरण 5 क्या निम्नलिखित संबंध फलन हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $R_1 = \{(2, 3), (\frac{1}{2}, 0), (2, 7), (-4, 6)\}$

(ii) $R_2 = \{(x, |x|) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है}

हल

क्योंकि (2, 3) और $(2, 7) \in R_1$

$\Rightarrow$ $R_1(2) = 3$ तथा $R_1(2) = 7$

इसलिए $R_1(2)$ का एक अद्वितीय प्रतिबिंब नहीं है। अत: R_1 एक फलन नहीं है।

(iii) $R_2 = \{(x, |x|) / x \in \mathbf{R}\}$

प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ का एक अद्वितीय **प्रतिबिंब** $|x| \in \mathbf{R}$ है

अत: R_2 एक फलन है।

उदाहरण 6 वह प्रांत ज्ञात करो जिसके लिए फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ और $g(x) = 1 - 3x$ समान हैं।

हल:

यदि $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$ $2x^2 - 1 = 1 - 3x$

$\Rightarrow \qquad 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow \qquad (2x - 1)(x + 2) = 0$

अतः वह प्रांत जिसके लिए $f(x) = g(x)$, $\left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$ है।

उदाहरण 7 निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का प्रांत ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$ (ii) $f(x) = [x] + x$

हल

(i) $f(x)\ \dfrac{g(x)}{h(x)}$ रूप का एक परिमेय फलन है, जहाँ $g(x) = x$ तथा $R(x) = x^2 + 3x + 2$

अब $h(x) \neq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) \neq 0$

अतः प्रदत्त फलन f का प्रांत $\mathrm{R} - \{-1, -2\}$ है।

(ii) $f(x) = [x] + x$, अर्थात् $f(x) = h(x) + g(x)$,

जहाँ $h(x) = [x]$ और $g(x) = x$

$h(x)$ का प्रांत $= \mathbf{R}$ और $g(x)$ का प्रांत $= \mathbf{R}$

अतः f का प्रांत $= \mathbf{R}$

उदाहरण 8 निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $\dfrac{|x-4|}{x-4}$ (ii) $\sqrt{16 - x^2}$

हल

(i) $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x-4} = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-4} = 1, & x > 4 \\[2ex] \dfrac{-(x-4)}{x-4} = -1, & x < 4 \end{cases}$

अतः $\dfrac{|x-4|}{x-4}$ का परिसर $= \{1, -1\}$

(ii) f का प्रांत, जहाँ $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $[-4, 4]$ है।

परिसर के लिए, मान लीजिए कि $y = \sqrt{16 - x^2}$,

तो $y^2 = 16 - x^2$

या $x^2 = 16 - y^2$

क्योंकि $x \in [-4, 4]$

अतः f का परिसर $= [0, 4]$

उदाहरण 9 फलन $f(x) = |x-1|+|1+x|, \quad -2 \le x \le 2$ को पुनः परिभाषित (Redefine) कीजिए।

हल: $f(x) = |x-1|+|1+x|, -2 \le x \le 2$

$$= \begin{cases} -x+1 \; -1-x, & -2 \le x < -1 \\ -x+1 \; +x+1, & -1 \le x < 1 \\ x-1 \; +1+x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x \;, & -2 \le x < -1 \\ 2, & -1 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

उदाहरण 10 फलन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$ f परिभाषित होगा यदि $[x]^2 - [x] - 6 > 0$

या $([x]-3)([x]+2) > 0,$

$\Rightarrow \quad [x] < -2 \quad$ या $\quad [x] > 3$

$\Rightarrow \quad x < -2 \quad$ या $\quad x \ge 4$

अतः प्रांत $= (-\infty, -2) \cup [4, \infty)$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

दिये हुए चार संभव उत्तरों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

उदाहरण 11 निम्नलिखित में से कौन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत है।

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R}^+$

(C) $\mathbf{R}^-$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल: सही उत्तर (D) है। $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ प्रदत्त है,

जहाँ $$x - |x| = \begin{cases} x-x=0 & \text{यदि } x \geq 0 \\ 2x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

अत: $\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$, किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए परिभाषित नहीं है। अत: f, किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए परिभाषित नहीं है, अर्थात् दिये हुए विकल्पों में से कोई भी f का प्रांत नहीं है।

उदाहरण 12 यदि $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ तो $f(x) + f(\dfrac{1}{x})$ निम्नलिखित में से किसके बराबर है:

(A) $2x^3$ (B) $\dfrac{2}{x^3}$ (C) 0 (D) 1

हल सही चयन (C) है।

क्योंकि $$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

इसलिए $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} - x^3$$

अत: $$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} - x^3 = 0$$

उदाहरण 13 मान लीजिए कि A तथा B कोई ऐसे दो समुच्चय हैं कि $n(\text{B}) = p$, $n(\text{A}) = q$, तो समुच्चयों $f : \text{A} \to \text{B}$ कुल संख्या __________ है।

हल: A का कोई भी अवयव मान लीजिए कि x_i समुच्चय B के अवयवों से p तरीके से संबद्ध किया जा सकता है। अत: अभीष्ट समुच्चयों की तथ्यत: संख्या p^q है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि f तथा g निम्नलिखित दो फलन हैं,

$f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$

$g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, -5)\}$ तो $f + g$ का प्रांत __________ होगा।

हल: क्योंकि f का प्रांत $= D_f = \{2, 5, 8, 10\}$ तथा g का प्रांत $= D_g = \{2, 7, 8, 10, 11\}$ इसलिए $f + g$ का प्रांत $= \{x \mid x \in D_f \cap D_g\} = \{2, 8, 10\}$

2.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. मान लीजिए कि $A = \{-1, 2, 3\}$ तथा $B = \{1, 3\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$

(iii) $B \times B$ (iv) $A \times A$

2. यदि $P = \{x : x < 3, x \in \mathbf{N}\}$, $Q = \{x : x \le 2, x \in \mathbf{W}\}$, तो $(P \cup Q) \times (P \cap Q)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ W पूर्ण संख्याओं (ऋणेत्तर पूर्णांकों) का समुच्चय है।

3. यदि $A = \{x : x \in \mathbf{W}, x < 2\}$ $B = \{x : x \in \mathbf{N}, 1 < x < 5\}$ $C = \{3, 5\}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $A \times (B \cup C)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में a तथा b ज्ञात कीजिए:

(i) $(2a + b, a - b) = (8, 3)$ (ii) $\left(\dfrac{a}{4}, a - 2b\right) = (0, 6 + b)$

5. दिया हुआ है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$ तो उन क्रमित युग्मों को ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं:

(i) $x + y = 5$ (ii) $x + y < 5$ (iii) $x + y > 8$

6. यदि $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{W}, x^2 + y^2 = 25\}$ प्रदत्त है। R का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

7. यदि $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2x + 7$, जहाँ $x \in \mathbf{R}$ और $-5 \le x \le 5\}$ एक संबंध है तो R_1 का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

8. यदि $R_2 = \{(x, y) \mid x$ और y पूर्णांक हैं और $x^2 + y^2 = 64\}$ एक संबंध है, तो R_2 ज्ञात कीजिए (रोस्टर रूप में लिखिए)।

9. यदि $R_3 = \{(x, |x|) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$ एक संबंध है, तो R_3 का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

10. क्या नीचे दिये गये संबंध फलन हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए:

(i) $h = \{(4, 6), (3, 9), (-11, 6), (3, 11)\}$

(ii) $f = \{(x, x) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

(iii) $g = \left\{\left(n, \dfrac{1}{n}\right) \middle| \, n \text{ एक धन पूर्णांक है}\right\}$

(iv) $s = \{(n, n^2) \mid n$ एक धन पूर्णांक है$\}$

(v) $t = \{(x, 3) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

11. यदि f तथा g, नियम $f(x) = x^2 + 7$ तथा $g(x) = 3x + 5$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए:

(a) $f(3) + g(-5)$

(b) $f\left(\frac{1}{2}\right) \times g(14)$

(c) $f(-2) + g(-1)$

(d) $f(t) - f(-2)$

(e) $\frac{f(t)-f(5)}{t-5}$, यदि $t \neq 5$

12. मान लीजिए कि $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = 4x - 7$ द्वारा परिभाषित f तथा g वास्तविक फलन हैं, तो

(a) किन वास्तविक संख्याओं x के लिए, $f(x) = g(x)$?

(b) किन वास्तविक संख्याओं x के लिए, $f(x) < g(x)$?

13. यदि $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित f तथा g दो वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $f + g$ (ii) $f - g$ (iii) fg (iv) $\frac{f}{g}$

14. निम्नलिखित फलन को क्रमित युग्मों में वर्णित कीजिए और उसका परिसर ज्ञात कीजिए:
$f : X \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 1$, जहाँ $X = \{-1, 0, 3, 9, 7\}$

15. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन $f(x) = 3x^2 - 1$ और फलन $g(x) = 3 + x$ समान हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

16. क्या $g(x) = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ एक फलन है? औचित्य भी बताइए। यदि इसे नियम $g(x) = \alpha x + \beta$ द्वारा वर्णित किया जाये तो α और β को क्या मान दिया जा सकता है?

17. नीचे दिये फलनों में से प्रत्येक का प्रांत ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x|}}$ (iii) $f(x) = x|x|$

(iv) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1}$ (v) $f(x) = \frac{3x}{2x-8}$

18. नीचे दिये फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \dfrac{3}{2-x^2}$ (ii) $f(x) = 1 - |x-2|$

(iii) $f(x) = |x-3|$ (iv) $f(x) = 1 + 3\cos 2x$

(**संकेत :** $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos 2x \le 3 \Rightarrow -2 \le 1 + 3\cos 2x \le 4$)

19. फलन $f(x) = |x-2| + |2+x|$, $-3 \le x \le 3$ को पुनः परिभाषित कीजिए।

20. यदि $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ (ii) $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{f(x)}$

21. मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ दो फलन प्रांत $R^+ \cup \{0\}$ में परिभाषित हैं तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $(f+g)(x)$ (ii) $(f-g)(x)$

(iii) $(fg)(x)$ (iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

22. फलन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

23. यदि $f(x) = y = \dfrac{ax-b}{cx-a}$, तो सिद्ध कीजिए कि $f(y) = x$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

संख्या 24 से 35 तक के प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

24. मान लीजिए कि $n(A) = m$, और $n(B) = n$, तो A से B में परिभाषित किये जा सकने वाले अरिक्त संबंधों की कुल संख्या

(A) m^n (B) $n^m - 1$

(C) $mn - 1$ (D) $2^{mn} - 1$

25. यदि $[x]^2 - 5[x] + 6 = 0$, जहाँ प्रतीक [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है, तो

(A) $x \in [3, 4]$ (B) $x \in (2, 3]$

(C) $x \in [2, 3]$ (D) $x \in [2, 4)$

26. $f(x) = \dfrac{1}{1-2\cos x}$ का परिसर

(A) $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$ (B) $\left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$

(C) $(-\infty, -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ (D) $\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$ है।

27. मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, तो

(A) $f(xy) = f(x) \,.\, f(y)$ (B) $f(xy) \geq f(x) \,.\, f(y)$

(C) $f(xy) \leq f(x) \,.\, f(y)$ (D) इनमें से कोई नहीं

[**संकेत :** $f(xy) = \sqrt{1+x^2y^2}$, $f(x) \,.\, f(y) = \sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2+1}$]

28. $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a > 0)$ का प्रांत है

(A) $(-a, a)$ (B) $[-a, a]$

(C) $[0, a]$ (D) $(-a, 0]$ है।

29. यदि $f(x) = ax + b$, जहाँ a और b पूर्णांक हैं। यदि $f(-1) = -5$ और $f(3) = 3$, तो

(A) $a = -3, b = -1$ (B) $a = 2, b = -3$

(C) $a = 0, b = 2$ (D) $a = 2, b = 3$

30. $f(x) = \sqrt{4-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत

(A) $(-\infty, -1) \cup (1, 4]$ (B) $(-\infty, -1] \cup (1, 4]$

(C) $(-\infty, -1) \cup [1, 4]$ (D) $(-\infty, -1) \cup [1, 4)$ है।

31. $f(x) = \dfrac{4-x}{x-4}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $\{-1, 1\}$

(B) प्रांत = $\mathbf{R} - \{1\}$, परिसर = $\mathbf{R}$

(C) प्रांत = $\mathbf{R} - \{4\}$, परिसर = $\{-1\}$

(D) प्रांत = $\mathbf{R} - \{-4\}$, परिसर = $\{-1, 1\}$

32. $f(x) = \sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f के प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = $(1, \infty)$, परिसर = $(0, \infty)$

(B) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $(0, \infty)$

(C) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$

(D) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$

33. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$ द्वारा प्रदत्त (given) फलन f का प्रांत

(A) $\mathbf{R} - \{3, -2\}$ (B) $\mathbf{R} - \{-3, 2\}$

(C) $\mathbf{R} - [3, -2]$ (D) $\mathbf{R} - (3, -2)$

34. $f(x) = 2 - |x-5|$ द्वारा प्रदत्त फलन f का प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = $\mathbf{R}^+$, परिसर = $(-\infty, 1]$

(B) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $(-\infty, 2]$

(C) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $(-\infty, 2)$

(D) प्रांत = $\mathbf{R}^+$, परिसर = $(-\infty, 2]$

35. वह प्रांत जिसके लिए $f(x) = 3x^2 - 1$ तथा $g(x) = 3 + x$ द्वारा परिभाषित फलन f तथा g समान हैं,

(A) $\left\{-1, \dfrac{4}{3}\right\}$ (B) $\left[-1, \dfrac{4}{3}\right]$

(C) $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$ (D) $\left[-1, \dfrac{4}{3}\right)$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

36. मान लीजिए कि

$f = \{(0, 1), (2, 0), (3, -4), (4, 2), (5, 1)\}$

$g = \{(1, 0), (2, 2), (3, -1), (4, 4), (5, 3)\}$

दो प्रदत्त वास्तविक फलन हैं, तो $f.\ g$ का प्रांत __________ है।

37. मान लीजिए कि $f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$

$g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, 5)\}$

दो प्रदत्त वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित का सही मिलान (Match) कीजिए:

(a) $f - g$ (i) $\left\{\left(2, \frac{4}{5}\right), \left(8, \frac{-1}{4}\right), \left(10, \frac{-3}{13}\right)\right\}$

(b) $f + g$ (ii) $\{(2, 20), (8, -4), (10, -39)\}$

(c) $f \cdot g$ (iii) $\{(2, -1), (8, -5), (10, -16)\}$

(d) $\frac{f}{g}$ (iv) $\{(2, 9), (8, 3), (10, 10)\}$

बताइए कि प्रश्न संख्या 38 से 42 तक में दिये कथन सत्य हैं या असत्य है:

38. क्रमित युग्म (5, 2) संबंध R = $\{(x, y) : y = x - 5, x, y \in \mathbf{Z}\}$ में है।

39. यदि P = {1, 2}, तो P × P × P = {(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1)}

40. यदि A = {1, 2, 3}, B = {3, 4} तथा C = {4, 5, 6}, तो $(A \times B) \cup (A \times C)$
= {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

41. यदि $(x - 2, y + 5) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$, तो $x = 4$, $y = \frac{-14}{3}$

42. यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, तो $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$

अध्याय 3

त्रिकोणमितीय फलन

3.1 समग्र अवलोकन (Overview)

3.1.1 शब्द 'trigonometry' (त्रिकोणमितीय) यूनानी शब्द 'ट्रिगोन' (trigon) और 'मीट्रोन' (metron) से व्युत्पत्ति हुआ है, जिसका अर्थ एक त्रिभुज की भुजाओं का मापना है। एक कोण एक निश्चित रेखा के सापेक्ष परिभ्रमण करने वाली किसी रेखा के घूर्णन की मात्रा होती है। यदि यह घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा में है तो कोण ऋणात्मक होता है तथा कोण धनात्मक होता है, यदि घूर्णन वामावर्त दिशा में होता है। प्राय:, हम कोणों को मापने के लिए, दो प्रकार की पद्धतियाँ, अर्थात् (i) षोष्टिक पद्धति (sexagesinal system) और (ii) वृत्तीय पद्धति अपनाते हैं।

षौष्टिक पद्धति में, कोण के मापन की इकाई अंश या डिग्री (Degree) है। यदि प्रारंभिक भुजा से अंतिम भुजा तक का घूर्णन एक परिभ्रमण का $\frac{1}{360}$ वाँ भाग हो, तो कोण के माप को $1°$ कहा जाता है। इस पद्धति में, वर्गीकरण निम्नलिखित प्रकार हैं–

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

मापन की वृत्तीय पद्धति में, मापन की इकाई रेडियन (radian) है। एक रेडियन वह कोण है जो किसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर लंबाई का चाप उस वृत्त के केंद्र पर अंतरित करता है। त्रिज्या r वाले एक वृत्त के चाप PQ की लंबाई $s = r\theta$ दी जाती है, जहाँ θ रेडियनों में मापा गया वह कोण है, जो चाप PQ वृत्त के केंद्र पर अंतरित करता है।

3.1.2 *डिग्री और रेडियन में संबंध*

किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ सदैव एक अचर अनुपात होता है। यह अचर अनुपात π से व्यक्त की जाने वाली एक संख्या है जिसका मान सभी व्यावहारिक प्रयोजन के लिए लगभग $\frac{22}{7}$ लिया जाता है। डिग्री और रेडियन मापों के बीच संबंध निम्नलिखित हैं–

$$2 \text{ समकोण} = 180° = \pi \text{ रेडियन}$$

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' \text{ (लगभग)}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} = 0.01746 \text{ रेडियन (लगभग)}$$

3.1.3 त्रिकोणमितीय फलन

न्यून कोणों के लिए, त्रिकोणमितीय अनुपात को, किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों के रूप में परिभाषित किया जाता है। रेडियन माप में व्यक्त किसी कोण के लिए, त्रिकोणमितीय अनुपात का विस्तार, त्रिकोणमितीय फलन कहलाता है। त्रिकोणमितीय फलनों के विभिन्न चतुर्थांशों में चिह्न निम्नलिखित तालिका में दिए हैं–

	I	II	III	IV
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tan x	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
sec x	+	–	–	+
cot x	+	–	+	–

3.1.4 त्रिकोणमितीय फलनों के प्राँत और परिसर

फलन	प्रांत	परिसर
sine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
cosine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
tan	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
cot	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
sec	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$
cosec	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$

3.1.5 समकोण अर्थात् 90° से छोटे या उसके बराबर कुछ कोणों के *sine, cosine* और *tangent*

	0°	15°	18°	30°	36°	45°	60°	90°
sine	0	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

cosine	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं

3.1.6 समवर्गीय या संबंधित कोण

कोण $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ समवर्गी या संबंधित कोण कहलाते हैं तथा कोण $\theta \pm n \times 360°$ सहावासनी (coterminal) कोण कहलाते हैं। व्यापक समानयन के लिए, हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त हैं: $(\frac{n\pi}{2} \pm \theta)$ के लिए, त्रिकोणमितीय फलन का संख्यात्मक मान बराबर है–

(a) उसी फलन के मान के, यदि n एक सम पूर्णांक है तथा इस मान का चिह्न उस चतुर्थांश के अनुसार होता है जिसमें वह कोण स्थित है।

(b) θ के संगत सहफलन के मान के यदि n एक विषम पूर्णांक है तथा फलन का चिह्न उस चतुर्थांश के अनुसार होता है, जिसमें वह कोण स्थित है। यहाँ sine और cosine, tan और cot तथा sec और cosec एक दूसरे के सहफलन हैं।

3.1.7 ऋणात्मक कोणों के फलन

मान लीजिए θ कोई कोण है। तब,

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$

3.1.8 यौगिक कोणों से संबधी कुछ सूत्र

दो या अधिक कोणों के योग या अंतर से बना एक कोण यौगिक कोण कहलाता है। इस संबंध में मूलभूत परिणाम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहलाते हैं। जिन्हें नीचे दिया जा रहा है:

(i) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(iii) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(iv) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(v) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(vii) $\cot (A + B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

(viii) $\cot (A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

(ix) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

(x) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(xi) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

(xii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(xiii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(xiv) $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

(xv) $\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\dfrac{A + B}{2}\right) \cos \left(\dfrac{A - B}{2}\right)$

(xvi) $\cos A - \cos B = 2\sin \left(\dfrac{A + B}{2}\right) \sin \left(\dfrac{B - A}{2}\right)$

(xvii) $\sin A + \sin B = 2\sin \left(\dfrac{A + B}{2}\right) \cos \left(\dfrac{A - B}{2}\right)$

(xviii) $\sin A - \sin B = 2\cos \left(\dfrac{A + B}{2}\right) \sin \left(\dfrac{A - B}{2}\right)$

(xix) $2\sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$

(xx) $2\cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$

(xxi) $2\cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$

(xxii) $2\sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$

(xxiii) $\sin \dfrac{A}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$ $\left[\begin{array}{l} + \text{ यदि } \dfrac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या II में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \dfrac{A}{2} \text{ चतुर्थांश III या IV में स्थित है} \end{array}\right.$

(xxiv) $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\begin{cases} + \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या IV में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश II या III में स्थित है} \end{cases}$

(xxv) $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ $\begin{cases} + \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश I या III में स्थित है} \\ - \text{ यदि } \frac{A}{2} \text{ चतुर्थांश II या IV में स्थित है} \end{cases}$

18° के कोण के त्रिकोणमितीय फलन

मान लीजिए $\theta = 18^\circ$ है। तब, $2\theta = 90^\circ - 3\theta$

अतः, $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$

या $\sin 2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

क्योंकि $\cos\theta \neq 0$, इसलिए

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 1 - 4\sin^2\theta$ या $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

अतः, $\sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

क्योंकि $\theta = 18^\circ$ है, इसलिए $\sin\theta > 0$, है। अतः, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

साथ ही, $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$

अब, हम सरलता पूर्वक $\cos 36^\circ$ और $\sin 36^\circ$ का मान, निम्नलिखित प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

अतः, $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

साथ ही, $\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

3.1.9 *त्रिकोणमितीय समीकरण*

किसी चर के त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध समीकरण **त्रिकोणमितीय समीकरण** कहलाते हैं। समीकरण सर्वसमिकाएँ कहलाती हैं, यदि वे अज्ञात कोणों के उन सभी मानों से संतुष्ट हो जाएँ, जिनके

लिए वे फलन परिभाषित हैं। किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के वे हल जिसके लिए $0 \leq \theta < 2\pi$, उसका **मुख्य हल** कहलाते हैं। पूर्णांक n से संबद्ध वह व्यंजक जो त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल दे, उसका **व्यापक हल** कहलाता है।

त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल

(i) यदि किसी कोण α के लिए, $\sin\theta = \sin\alpha$ हो, तो $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, दिये हुए समीकरण का व्यापक हल देता है।

(ii) यदि किसी कोण α के लिए $\cos\theta = \cos\alpha$ हो, तो $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, दिये हुए समीकरण का व्यापक हल देता है।

(iii) यदि $\tan\theta = \tan\alpha$ या $\cot\theta = \cot\alpha$ हो, तो $\theta = n\pi + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, इन दोनों समीकरणों का व्यापक हल देता है।

(iv) समीकरण $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ और $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ में से किसी भी समीकरण को संतुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान $\theta = n\pi \pm \alpha$ होता है।

(v) समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ और $\cos\theta = \cos\alpha$ को युगपत् रूप से संतुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान $\theta = 2n\pi + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$ है।

(vi) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, के रूप के किसी समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए, हम $a = r\cos\alpha$ और $b = r\sin\alpha$ रखते हैं, जिससे $r^2 = a^2 + b^2$ और $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ प्राप्त होता है, इस प्रकार हम देखते हैं कि $a\cos\theta + b\sin\theta = r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta \,.\, \sin\alpha) = c$, या $r\cos(\theta - \alpha) = c$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है। और इसीलिए, $\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{c}{r}$ यह दी हुई समीकरण का हल प्रदान करता है।

व्यंजक $A\cos\theta + B\sin\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः $\sqrt{A^2 + B^2}$ और $-\sqrt{A^2 + B^2}$ हैं, जहाँ A और B अचर हैं।

3.2 हल किये हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S. A.)

उदाहरण 1 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार तार को काट कर इस प्रकार मोड़ा जाता है कि वह 48 cm (त्रिज्या) वाले एक छल्ले की परिधि के अनुदिश स्थित हो जाए। अंशों (डिगरीस) में वह कोण ज्ञात कीजिए जो यह छल्ले के केंद्र पर अंतरित करता है।

हल तार की त्रिज्या 3 cm, दिया हुआ है। इसलिये, इसे काटने पर, इसकी लंबाई $= 2\pi \times 3\text{cm} = 6\pi$ cm। पुनः इसे 48 cm. त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार छल्ले के अनुदिश रखा जाता है। यहाँ $s = 6\pi$ cm चाप की लंबाई है तथा $r = 48$ cm वृत्त की त्रिज्या है। इसलिए, इस चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित

कोण θ (रेडियन में) निम्नलिखित है–

$$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{6\pi}{48} = \frac{\pi}{8} = 22.5°$$

उदाहरण 2 यदि θ के सभी मानों के लिए $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{3}{4} \le A \le 1$ है।

हल हमें प्राप्त है: $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta\,\sin^2\theta \le \cos^2\theta + \sin^2\theta$

अत:, $A \le 1$

साथ ही, $A = \cos^2\theta + \sin^4\theta = (1 - \sin^2\theta) + \sin^4\theta$

$$= \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

अत:, $$\frac{3}{4} \le A \le 1$$

उदाहरण 3 $\sqrt{3}$ cosec 20° – sec 20° का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है:

$$\sqrt{3}\ \text{cosec}\ 20° - \sec 20° = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 20° - \sin 20°}{\sin 20° \cos 20°} = 4\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20° - \frac{1}{2}\sin 20°}{2\sin 20° \cos 20°}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sin 60° \cos 20° - \cos 60° \sin 20°}{\sin 40°}\right) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 4\left(\frac{\sin(60° - 20°)}{\sin 40°}\right) = 4 \qquad \text{(क्यों?)}$$

उदाहरण 4 यदि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो दर्शाईए कि

$$\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} + \sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = -2\sec\theta$$

हल हमें प्राप्त है:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{2}{|\cos\theta|}$$ (क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या α के लिए $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ होता है)

दिया है कि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है। इसलिए, $|\cos\theta| = -\cos\theta$ (क्योंकि $\cos\theta < 0$ है)

अतः दिए हुए व्यंजक का अभीष्ट मान $= \dfrac{2}{-\cos\theta} = -2\sec\theta$

उदाहरण 5 $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$

$$= \tan 9° + \tan 81° - \tan 27° - \tan 63°$$
$$= \tan 9° + \tan (90° - 9°) - \tan 27° - \tan (90° - 27°)$$
$$= \tan 9° + \cot 9° - (\tan 27° + \cot 27°) \qquad (1)$$

साथ ही, $\tan 9° + \cot 9° = \dfrac{1}{\sin 9° \cos 9°} = \dfrac{2}{\sin 18°}$ (क्यों?) (2)

इसी प्रकार, $\tan 27° + \cot 27° = \dfrac{1}{\sin 27° \cos 27°} = \dfrac{2}{\sin 54°} = \dfrac{2}{\cos 36°}$ (क्यों?) (3)

(2) और (3) का (1) में प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81° = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\cos 36°} = \frac{2\times4}{\sqrt{5}-1} - \frac{2\times4}{\sqrt{5}+1} = 4$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \dfrac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}$

हल हमें प्राप्त हैं :

$$\frac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \frac{(1-\cos 8\theta)\cos 4\theta}{(1-\cos 4\theta)\cos 8\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2 4\theta \cos 4\theta}{\cos 8\theta \, 2\sin^2 2\theta} \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{\sin 4\theta\,(2\sin 4\theta\cos 4\theta)}{2\cos 8\theta\sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{\sin 4\theta\sin 8\theta}{2\cos 8\theta\sin^2 2\theta} \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta\sin 8\theta}{2\cos 8\theta\sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta} \qquad \text{(क्यों?)}$$

उदाहरण 7 $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ को हल कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$

या $(\sin\theta + \sin 5\theta) + \sin 3\theta = 0$

या $2\sin 3\theta\cos 2\theta + \sin 3\theta = 0$ (क्यों?)

या $\sin 3\theta\,(2\cos 2\theta + 1) = 0$

इसलिए, $\sin 3\theta = 0$ या $2\cos^2\theta + 1 = 0$

जब $\sin 3\theta = 0$, तो $3\theta = n\pi$ अर्थात् $\theta = \frac{n\pi}{3}$

जब $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, तो $2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ अर्थात् $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

इससे $\theta = (3n+1)\frac{\pi}{3}$ या $\theta = (3n-1)\frac{\pi}{3}$ प्राप्त होता है।

θ के उपरोक्त सभी मान $\theta = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$. में निहित है।

अत:, वांछित हल समुच्चय $\{\theta : \theta = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$ है।

उदाहरण 8 $2\tan^2 x + \sec^2 x = 2,\ 0 \le x \le 2\pi$ के लिए, हल कीजिए।

हल यहाँ, $2\tan^2 x + \sec^2 x = 2$

जिससे $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

यदि हम $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ लेते हैं, तो $x = \frac{\pi}{6}$ या $\frac{7\pi}{6}$ (क्यों?)

पुनः यदि हम $\tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ लेते हैं, तो $x = \frac{5\pi}{6}$ या $\frac{11\pi}{6}$ (क्यों?)

अतः, उपर्युक्त समीकरणों के संभव हल

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ और $\frac{11\pi}{6}$ हैं, जहाँ $0 \le x \le 2\pi$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 9 $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम लिखते हैं: $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$= \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{(क्यों)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 10 यदि $x\cos\theta = y\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$ हो, तो $xy+yz+zx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

यदि हम $x \cos \theta = y \cos (\theta + \frac{2\pi}{3}) = z \cos \left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) = k$ (मान लीजिए) रखें,

तो $$x=\frac{k}{\cos\theta}, y=\frac{k}{\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} \text{ और } z=\frac{k}{\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)} \text{ होगा।}$$

इससे, $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{k}\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k}[\cos\theta+\cos\theta\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$+\cos\theta\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{4\pi}{3}]$$

$$=\frac{1}{k}\quad\cos\theta+\cos\theta\,(\frac{-1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg] \quad \text{(क्यों?)}$$

$$=\frac{1}{k}\times 0=0$$

अतः, $$xy + yz + zx = 0$$

उदाहरण 11 यदि α और β समीकरण $a \tan \theta + b \sec \theta = c$ के मूल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\tan (\alpha + \beta) = \dfrac{2ac}{a^2-c^2}$ है।

हल हमें दिया है: $a \tan\theta + b \sec\theta = c$ या $a \sin\theta + b = c \cos \theta$

सर्वसमिकाओं, $\sin\theta = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ और $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ का प्रयोग करने पर,

$$\frac{a\left(2\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} + b = \frac{c\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

या $$(b + c)\ \tan^2\frac{\theta}{2} + 2a\ \tan\frac{\theta}{2} + b - c = 0$$

उपरोक्त समीकरण $\tan\dfrac{\theta}{2}$ में एक द्विघात समीकरण है और इसीलिए $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ और $\tan\dfrac{\beta}{2}$ इस समीकरण के मूल हैं। (क्यों?)

इसलिए $\tan\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{-2a}{b+c}$ और $\tan\dfrac{\alpha}{2}\ \tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}$ है। (क्यों?)

सर्वसमिका $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}}$$ का प्रयोग करने पर,

हमें प्राप्त होता है: $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\dfrac{-2a}{b+c}}{1-\dfrac{b-c}{b+c}} = \frac{-2a}{2c} = \frac{-a}{c} \qquad \text{... (1)}$$

पुनः, एक अन्य सर्वसमिका $$\tan 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{2\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$ के प्रयोग से,

हमें प्राप्त होता है: $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\left(-\frac{a}{c}\right)}{1-\frac{a^2}{c^2}}=\frac{2ac}{a^2-c^2} \quad [(1) \text{ से}]$$

वैकल्पिक रूप से, $a\tan\theta + b\sec\theta = c$

$\Rightarrow \quad (a\tan\theta - c)^2 = b^2(1+\tan^2\theta)$

$\Rightarrow \quad a^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2 + b^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \quad (a^2-b^2)\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 - b^2 = 0 \qquad \ldots (1)$

क्योंकि $\tan\alpha$ और $\tan\beta$ समीकरण (1) के मूल हैं, इसलिए

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{2ac}{a^2-b^2} \quad \text{और} \quad \tan\alpha\tan\beta=\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$$

अत:,
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}=\frac{2ac}{a^2-c^2}$$

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि $2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha$

हल $\text{LHS} = 2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta$
$\quad + (\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta$
$\quad + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= 2\sin^2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= (1-\cos 2\beta) - (2\sin^2\alpha)(2\sin^2\beta) + \cos 2\alpha\cos 2\beta$ (क्यों?)

$= (1-\cos 2\beta) - (1-\cos 2\alpha)(1-\cos 2\beta) + \cos 2\alpha\cos 2\beta$ (क्यों?)

$= \cos 2\alpha = \text{R.H.S.}$

उदाहरण 13 यदि कोण θ को ऐसे भागों में विभाजित किया जाता है कि एक भाग का tangent दूसरे भाग के tangent का k गुना है, तथा इन भागों का अंतर ϕ है, तो

सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta = \frac{k+1}{k-1}\sin\phi$

हल मान लीजिए कि $\theta = \alpha + \beta$ तब, $\tan\alpha = k\tan\beta$

या $$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{k}{1}$$

योगांतरानुपात (componendo and dividendo) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$

या $$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$ (क्यों?)

अर्थात्, $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{k+1}{k-1}$$ (क्यों?)

$\alpha - \beta = \phi$ और $\alpha + \beta = \theta$ दिया है। अत:,

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{k+1}{k-1} \quad \text{or} \quad \sin\theta = \frac{k+1}{k-1}\sin\phi$$

उदाहरण 14 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ को हल कीजिए।

हल दिये दिए समीकरण को 2 से भाग देने पर

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad \cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta = \cos\frac{\pi}{4}$$

या $$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{4} \quad \text{या} \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$ (क्यों?)

अत:, इस समीकरण के हल $\theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

अत:, θ का मान है:

$$\theta = 2m\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{या} \quad \theta = 2m\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{अर्थात्} \quad \theta = 2m\pi + \frac{5\pi}{12} \quad \text{या} \quad \theta = 2m\pi - \frac{\pi}{12}$$

वस्तुनिष्ठ उदाहरण (MCQ)

उदाहरण 15 से 19 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

उदाहरण 15 यदि $\tan\theta = \frac{-4}{3}$ है, तो $\sin\theta$ है

(A) $\frac{-4}{5}$ परंतु $\frac{4}{5}$ नहीं (B) $\frac{-4}{5}$ या $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$ परंतु $-\frac{4}{5}$ नहीं (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (B) है। क्योंकि $\tan\theta = \frac{-4}{3}$ ऋणात्मक है, इसलिए θ या तो दूसरे चतुर्थांश में है या चौथे चतुर्थांश में है। इस प्रकार, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ यदि θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है या $\sin\theta = \frac{-4}{5}$, यदि θ चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

उदाहरण 16 यदि $\sin\theta$ और $\cos\theta$ समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ के मूल हैं, तो a, b और c निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करते हैं:

(A) $a^2 + b^2 + 2ac = 0$ (B) $a^2 - b^2 + 2ac = 0$

(C) $a^2 + c^2 + 2ab = 0$ (D) $a^2 - b^2 - 2ac = 0$

हल सही विकल्प (B) है। दिया है कि $\sin\theta$ और $\cos\theta$ समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ के मूल हैं।

इसलिए, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{b}{a}$ और $\sin\theta\cos\theta = \frac{c}{a}$ (क्यों?)

सर्वसमिका $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{2c}{a} \text{ या } a^2 - b^2 + 2ac = 0$$

उदाहरण 17 $\sin x\cos x$ का अधिकतम मान है:

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

हल सही विकल्प (D) है, क्योंकि

$$\sin x \ \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}, \text{ क्योंकि } |\sin 2x| \le 1$$

उदाहरण 18 sin 20° sin 40° sin 60° sin 80° का मान है

(A) $\frac{-3}{16}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{16}$

हल सही विकल्प (C) है। वास्तव में, sin 20° sin 40° sin 60° sin 80°

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° \sin(60° - 20°)\sin(60° + 20°) \left(\text{क्योंकि } \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° (\sin^2 60° - \sin^2 20°) \qquad \text{(क्यो?)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20° \left[\frac{3}{4} - \sin^2 20°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}\,[3\sin 20° - 4\sin^3 20°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}\,(\sin 60°) \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

उदाहरण 19 $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$ का मान है;

(A) $\frac{1}{16}$ (B) 0 (C) $\frac{-1}{8}$ (D) $\frac{-1}{16}$

हल (D) सही उत्तर है। हमें ज्ञात है;

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\, 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} \sin\frac{2\pi}{5} \cos\frac{2\pi}{5} \cos\frac{4\pi}{5} \cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$= \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}} \sin\frac{4\pi}{5} \cos\frac{4\pi}{5} \cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$= \frac{1}{8\sin\frac{\pi}{5}} \sin\frac{8\pi}{5} \cos\frac{8\pi}{5}$$ (क्यों?)

$$= \frac{\sin\frac{16\pi}{5}}{16\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{5}\right)}{16\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{16\sin\frac{\pi}{5}}$$ (क्यों?)

$$= -\frac{1}{16}$$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदाहरण 20 यदि, $3 \tan (\theta - 15°) = \tan (\theta + 15°)$, $0° < \theta < 90°$ है, तो $\theta =$ __________ है।

हल $3 \tan (\theta - 15°) = \tan (\theta + 15°)$ को इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{\tan(\theta+15°)}{\tan(\theta-15°)} = \frac{3}{1}$$

योगांतरानुपात के प्रयोग से हमें प्राप्त हुआ $\dfrac{\tan(\theta+15°)+\tan(\theta-15°)}{\tan(\theta+15°)-\tan(\theta-15°)} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)+\sin(\theta-15°)\cos(\theta+15°)}{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)-\sin(\theta-15°)\cos(\theta+15°)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\sin 30°} = 2$$ अर्थात् $\sin 2\theta = 1$ (क्यों?)

इससे $\theta = \frac{\pi}{4}$

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

उदाहरण 21 "असमिका $2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ θ के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य है।"

हल सत्य। क्योंकि $2^{\sin\theta}$ और $2^{\cos\theta}$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, इसलिए इनका समांतर माध्य (A.M.) इनके गुणोत्तर माध्य (G.M.) से बड़ा या उसके बराबर होगा। अत:,

$$\frac{2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin\theta}\ 2^{\cos\theta}} = \sqrt{2^{\sin\theta+\cos\theta}}$$

$$\geq 2^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)}$$

$$\geq 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

क्योंकि $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \leq 1$ होता है, इसलिए हमें प्राप्त है:

इसलिए, $\frac{2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta}}{2} \geq 2^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

स्तंभ C_1 में दिए प्रत्येक प्रविष्टि की स्तंभ C_2 में दी गई प्रविष्टियों से मिलान कीजिए:

उदाहरण 22

	C_1		C_2
(a)	$\frac{1-\cos x}{\sin x}$	(i)	$\cot^2 \frac{x}{2}$
(b)	$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	(ii)	$\cot \frac{x}{2}$
(c)	$\frac{1+\cos x}{\sin x}$	(iii)	$\lvert\cos x+\sin x\rvert$
(d)	$\sqrt{1+\sin 2x}$	(iv)	$\tan \frac{x}{2}$

हल

(a) $$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

अत:, (a) का सही मिलान (iv) से होगा, जिसे (a) $\leftrightarrow$ (iv) से व्यक्त किया जाएगा:

(b) $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \cot^2\frac{x}{2}$ है। अत:, (b) का सही मिलान (i) से होगा, अर्थात् (b) $\leftrightarrow$ (i) है।

(c) $$\frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \cot\frac{x}{2} \text{ है।}$$

अत:, (c) का सही मिलान (ii) से होगा, अर्थात् (c) $\leftrightarrow$ (ii) है।

(d) $$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin 2x} &= \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\\ &= \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\\ &= |(\sin x+\cos x)|\end{aligned}$$

अत: (d) का सही मिलान (iii) से हागा। अर्थात् (d) $\leftrightarrow$ (iii) है।

3.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1} = \dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

2. यदि $\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = y$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ भी y के बराबर है।

$\left[\text{संकेत: व्यक्त कीजिए: } \dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}\right]$

3. यदि $m\sin\theta = n\sin(\theta+2\alpha)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan(\theta+\alpha)\cot\alpha = \dfrac{m+n}{m-n}$

[**संकेत:** $\frac{\sin(\theta+2\alpha)}{\sin\theta}=\frac{m}{n}$ लिखकर योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

4. यदि $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$ और $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$ है; जहाँ α, 0 और $\frac{\pi}{4}$ के बीच स्थित है; तो $\tan 2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** $\tan 2\alpha$ को $\tan(\alpha+\beta+\alpha-\beta)$ के रूप में व्यक्त कीजिए।]

5. यदि $\tan x=\frac{b}{a}$ है, तो $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2}=\sin 7\theta\sin 8\theta$ है।

[**संकेत:** L.H.S. $=\frac{1}{2}\left[2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}-2\cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2}\right]$ के रूप में व्यक्त कीजिए।]

7. यदि $a\cos\theta+b\sin\theta=m$ और $a\sin\theta-b\cos\theta=n$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2+b^2=m^2+n^2$ है।

8. $\tan 22°30'$ का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** मान लीजिए कि $\theta=45°$ है।

अत: $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ का प्रयोग कीजिए।]

9. सिद्ध कीजिए कि $\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A$ है।

10. यदि $\tan\theta+\sin\theta=m$ और $\tan\theta-\sin\theta=n$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $m^2-n^2=4\sin\theta\tan\theta$ है।

[**संकेत:** $m+n=2\tan\theta$, $m-n=2\sin\theta$ है। तो $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ का प्रयोग कीजिए]

11. यदि $\tan(A+B)=p$ और $\tan(A-B)=q$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan 2A=\frac{p+q}{1-pq}$ है।

[**संकेत:** $2A=(A+B)+(A-B)$ का प्रयोग कीजिए]

12. यदि $\cos\alpha+\cos\beta=0=\sin\alpha+\sin\beta$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2\alpha+\cos 2\beta=-2\cos(\alpha+\beta)$ है।

[**संकेत:** $(\cos\alpha+\cos\beta)^2-(\sin\alpha+\sin\beta)^2=0$ है।]

13. यदि $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{a}{b}$ है।

[**संकेत:** योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

14. यदि $\tan\theta = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि कि $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\theta$ है।

[**संकेत:** व्यक्त कीजिए: $\tan\theta = \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{4}$]

15. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ है, तो θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

16. समीकरण $\tan\theta = -1$ और $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ को संतुष्ट करने वाले θ का उभयनिष्ठ व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$ है, तो θ का व्यापक मान ज्ञान कीजिए।

18. यदि $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ है, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

19. यदि $\sec x \cos 5x + 1 = 0$ है, जहाँ $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)

20. यदि $\sin(\theta+\alpha) = a$ और $\sin(\theta+\beta) = b$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2(\alpha-\beta) - 4ab \cos(\alpha-\beta) = 1 - 2a^2 - 2b^2$ है।

[**संकेत:** $\cos(\alpha-\beta) = \cos\{(\theta+\alpha) - (\theta+\beta)$ लिखिए।]}

21. यदि $\cos(\theta+\phi) = m\cos(\theta-\phi)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = \frac{1-m}{1+m}\cot\phi$ है।

[**संकेत:** $\frac{\cos(\theta+\pi)}{\cos(\theta-\pi)} = \frac{m}{1}$ के रूप में व्यक्त कर योगांतरानुपात का प्रयोग कीजिए।]

22. व्यंजक $3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi+\alpha)\right] - 2\left\{\sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi-\alpha)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$ के मूल α और β हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{2b}{a+c}$ है।

[**संकेत:** सर्वसमिकाओं $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ और $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ का प्रयोग कीजिए।]

24. यदि $x = \sec\phi - \tan\phi$ और $y = \operatorname{cosec}\phi + \cot\phi$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $xy + x - y + 1 = 0$ है।
[**संकेत:** Find $xy + 1$ ज्ञात कीजिए और फिर सिद्ध कीजिए कि $x, y = -(xy + 1)$ है।]

25. यदि θ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा $\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ है, तो

$\cos(30° + \theta) + \cos(45° - \theta) + \cos(120° - \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. व्यंजक $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** व्यंजक $2\left(\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}\right)$

$=2\left[\left(\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\dfrac{\pi}{8}\cos^2\dfrac{3\pi}{8}\right]$ के रूप में सरल कीजिए।

27. समीकरण $5\cos^2\theta + 7\sin^2\theta - 6 = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

28. समीकरण $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

29. समीकरण $(\sqrt{3} - 1)\cos\theta + (\sqrt{3} + 1)\sin\theta = 2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** $\sqrt{3} - 1 = r\sin\alpha$, $\sqrt{3} + 1 = r\cos\alpha$ रखिए, जिससे $\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ प्राप्त होता है।]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 30 से 59 में, दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q).

30. यदि $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$, तो $\sin^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$ बराबर है–

(A) 1 (B) 4

(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

31. यदि $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x$ है, तो

(A) $f(x) < 1$ (B) $f(x) = 1$

(C) $1 < f(x) < 2$ (D) $f(x) \geq 2$

[**संकेत:** A.M $\geq$ G.M.]

32. यदि $\tan\theta = \frac{1}{2}$ और $\tan\phi = \frac{1}{3}$ है, तो $\theta + \phi$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{\pi}{4}$

33. निम्नलिखित में से कौन सही नहीं है?

(A) $\sin\theta = -\frac{1}{5}$ (B) $\cos\theta = 1$

(C) $\sec\theta = \frac{1}{2}$ (D) $\tan\theta = 20$

34. $\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots \tan 89°$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) परिभाषित नहीं

35. $\frac{1-\tan^2 15°}{1+\tan^2 15°}$ का मान है–

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 2

36. $\cos 1° \cos 2° \cos 3° \ldots \cos 179°$ का मान है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) 1 (D) –1

37. यदि $\tan\theta = 3$ है और θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है,तो $\sin\theta$ का मान है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

38. $\tan 75° - \cot 75°$ का मान है–

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) 1

39. निम्नलिखित में से कौन सही है?

(A) $\sin 1° > \sin 1$ (B) $\sin 1° < \sin 1$

(C) $\sin 1° = \sin 1$ (D) $\sin 1° = \frac{\pi}{180} \sin 1$

[**संकेत:** 1 रेडियन $= \frac{180°}{\pi} = 57° 30'$ लगभग]

40. यदि $\tan \alpha = \dfrac{m}{m+1}$, और $\tan \beta = \dfrac{1}{2m+1}$ है, तो $\alpha + \beta$ बराबर है–

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

41. $3 \cos x + 4 \sin x + 8$ का न्यूनतम मान है–

(A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 3

42. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$ बराबर है–

(A) $\tan 3A \tan 2A \tan A$ (B) $-\tan 3A \tan 2A \tan A$

(C) $\tan A \tan 2A - \tan 2A \tan 3A - \tan 3A \tan A$ (D) इनमें से कोई नहीं

43. $\sin (45° + \theta) - \cos (45° - \theta)$ का मान है–

(A) $2 \cos\theta$ (B) $2 \sin\theta$ (C) 1 (D) 0

44. $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ का मान है–

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं

45. $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2 (\theta - \phi) - \sin^2 (\theta + \phi)$ बराबर है–

(A) $\sin 2(\theta + \phi)$ (B) $\cos 2(\theta + \phi)$

(C) $\sin 2(\theta - \phi)$ (D) $\cos 2(\theta - \phi)$

[संकेत: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \sin (A - B)$ का प्रयोग कीजिए।]

46. $\cos 12° + \cos 84° + \cos 156° + \cos 132°$ का मान है–

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{8}$

47. यदि $\tan A = \dfrac{1}{2}$, $\tan B = \dfrac{1}{3}$ है, तो $\tan (2A + B)$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

48. $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{13\pi}{10}$ का मान है–

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{4}$ (D) 1

[संकेत: $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ और $\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ प्रयोग कीजिए।]

49. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10°$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

50. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ है, तो $\sin 2\theta$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) -1

51. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ है, तो $(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta)$ का मान बराबर है–

(A) 1 (B) 2
(C) -2 (D) परिभाषित नहीं

52. यदि $\sin\theta = \frac{-4}{5}$ है और θ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो $\cos\frac{\theta}{2}$ का मान बराबर है–

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

53. अंतराल $[0,2\pi]$ में स्थित समीकरण $\tan x + \sec x = 2\cos x$ के हलों की संख्या है–

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

54. $\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{18}$ का मान निम्नलिखित है–

(A) $\sin\frac{7\pi}{18} + \sin\frac{4\pi}{9}$ (B) 1

(C) $\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{7}$ (D) $\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9}$

55. यदि A दुसरे चतुर्थांश में स्थित है तथा $3\tan A + 4 = 0$, तो $2\cot A - 5\cos A + \sin A$ का मान है–

(A) $\frac{-53}{10}$ (B) $\frac{23}{10}$ (C) $\frac{37}{10}$ (D) $\frac{7}{10}$

56. $\cos^2 48° - \sin^2 12°$ का मान है–

(A) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$

[संकेत : $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$ का प्रयोग कीजिए।]

57. यदि $\tan\alpha = \dfrac{1}{7}$, और $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$, तो $\cos 2\alpha$ बराबर है–

(A) $\sin 2\beta$ (B) $\sin 4\beta$ (C) $\sin 3\beta$ (D) $\cos 2\beta$

58. यदि $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ है, तो $b\cos 2\theta + a\sin 2\theta$ बराबर है

(A) a (B) b (C) $\dfrac{a}{b}$ (D) इनमें से कोई नहीं

59. यदि x की सभी वास्तविक मान के लिए, $\cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$ है, तो

(A) θ एक न्यून कोण है (B) θ एक समकोण है

(C) θ एक अधिक कोण है (D) θ का कोई मान संभव नहीं है

प्रश्न संख्या 60 से 67 तक में रिक्त स्थानों को भरिए:

60. $\dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 130^\circ}$ का मान _______ है।

61. यदि $k = \sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{18}\right)\sin\left(\dfrac{7\pi}{18}\right)$ है, तो k का संख्यात्मक मान _______ है।

62. यदि $\tan A = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$, तो $\tan 2A =$ _______.

63. यदि $\sin x + \cos x = a$, तो

(i) $\sin^6 x + \cos^6 x =$ _______ (ii) $|\sin x - \cos x| =$ _______.

64. एक त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle C = 90^\circ$ के लिए वह समीकरण, जिसके मूल $\tan A$ और $\tan B$ हैं, _______होगा।

[संकेत: $A + B = 90^\circ \Rightarrow \tan A \tan B = 1$ और $\tan A + \tan B = \dfrac{2}{\sin 2A}$]

65. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) =$ _______

66. $x > 0$ दिया रहने पर, $f(x) = -3\cos\sqrt{3+x+x^2}$ के मान अंतराल _______ में स्थित हैं।

67. फलन $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ के आलेख पर स्थित किसी बिंदु की x-अक्ष से अधिकतम दूरी ________ है।

प्रश्न 68 से 75 तक प्रत्येक में बताइए कि कथन सत्य है या असत्य, साथ ही इसका औचित्य भी दीजिए।

68. यदि $\tan A = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$ है, तो $\tan 2A = \tan B$

69. समिका $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = 3$ के कुछ वास्तविक मानों के लिए सत्य है।

70. $\sin 10°$, $\cos 10°$ से बड़ा है।

71. $\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{16\pi}{15} = \dfrac{1}{16}$

72. θ का एक मान, जो समीकरण $\sin^4\theta - 2\sin^2\theta - 1 = 0$ को संतुष्ट करता है, तथा 0 और 2π के बीच में स्थित होता है।

73. यदि $\operatorname{cosec} x = 1 + \cot x$, तो $x = 2n\pi,\ 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

74. यदि $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$, तो $\theta = \dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\pi}{9}$

75. यदि $\tan(\pi\cos\theta) = \cot(\pi\sin\theta)$ है, तो $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ है।

76. निम्नलिखित में स्तंभ C_1 में लिखे प्रत्येक व्यंजक को स्तंभ C_2 में दिए सही उत्तरों से सही मिलान कीजिए:

C_1	C_2
(a) $\sin(x+y)\sin(x-y)$	(i) $\cos^2 x - \sin^2 y$
(b) $\cos(x+y)\cos(x-y)$	(ii) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$
(c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$	(iii) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$
(d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$	(iv) $\sin^2 x - \sin^2 y$

अध्याय 4

गणितीय आगमन का सिद्धांत

4.1 समग्र अवलोकन (Overview)

गणितीय आगम एक तकनीक (technique) है जिसका प्रयोग विविध प्रकार के गणितीय कथनों का सूत्रिकरण करने में किया जा सकता है, जो n के पदों में सूत्रबद्ध हों, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

4.1.1 *गणितीय आगमन का सिद्धांत (The principle of mathematical induction)*

मान लीजिए कि प्राकृत संख्या n (धन पूर्णांक) से संबद्ध, P(n) एक प्रदत्त कथन इस प्रकार है कि,

(i) $n = 1$ के लिए कथन सत्य है, अर्थात्, P(1) सत्य है। (अथवा कथन किसी निश्चित प्राकृत संख्या के लिए सत्य है) और

(ii) यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य है, तो कथन $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है (जहाँ k एक विशेष किन्तु स्वेच्छ प्राकृत संख्या है), तो कथन P(n), सभी प्राकृत संख्याओं के लिए सत्य है।

4.2 हल किए हुए उदाहरण

संक्षिप्त (लघु) उत्तरीय प्रश्न

गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके, उदाहरण 1 से 5 तक में दिए कथनों को सिद्ध कीजिए ($n \in \mathbf{N}$)

उदाहरण 1 $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

हल मान लीजिए कि दिया कथन P(n) है। अत: P(n) : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, नोट कीजिए कि P(1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : 1 = 1^2$$

मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए P(k) सत्य है, अर्थात,

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

अब, P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$$
$$= k^2 + (2k + 1) \qquad \text{(क्यों?)}$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

अत: जब कभी $P(k)$ सत्य है तब, $P(k+1)$ भी सत्य है
अतएव गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा $P(n)$, सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 2 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)\,(n+1)}{3}$

हल मान लीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए कथन $P(n)$ निम्नवत प्रदत्त है। अर्थात्

$P(n): \sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)\,(n+1)}{3}$ सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए।

हम देखते हैं कि,

$$P(2): \sum_{t=1}^{2-1} t(t+1) = \sum_{t=1}^{1} t(t+1) = 1.2 = \frac{1.2.3}{3}$$

$$= \frac{2.(2-1)(2+1)}{3}$$

अतएव $P(n)$, $n = 2$ के लिए सत्य है।
मान लीजिए कि किसी $n = k \in \mathbf{N}$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

अर्थात् $$P(k): \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}$$

अब $P(k+1)$ का सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि

$$\sum_{t=1}^{(k+1-1)} t(t+1) = \sum_{t=1}^{k} t(t+1)$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) + k(k+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1)$$

$$= k(k+1)\left[\frac{k-1+3}{3}\right] = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)-1))\,((k+1)+1)}{3}$$

अतएव जब कभी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 3 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, $\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

हल मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए,

$$P(n) : \left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

हम देखते हैं कि P(2) सत्य है, क्योंकि

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1-\frac{1}{4} = \frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\times 2}$$

मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,

$$P(k) : \left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$1-\frac{1}{2^2} \;.\; 1-\frac{1}{3^2} \;...\; 1-\frac{1}{k^2} \;.\; 1-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k^2+2k}{2k\,(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2\,(k+1)}$$

अतएव जब कभी P (k) सत्य है P(k +1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 4 $2^{2n} - 1$ संख्या 3 से भाज्य है।

हल मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है अर्थात् P(n) : $2^{2n} - 1$, संख्या 3 से भाज्य है (सभी प्राकृत संख्या n के लिए) हम देखते हैं कि, P(1) सत्य है, क्योंकि

$$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.1 \text{ जो संख्या 3 से भाज्य है।}$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्

P(k): $2^{2k} - 1$ संख्या 3 से भाज्य है, अर्थात् $2^{2k} - 1 = 3q$, जहाँ $q \in \mathbf{N}$ अब P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$P(k + 1) : 2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k} . 2^2 - 1$$

$$= 2^{2k} . 4 - 1 = 3.2^{2k} + (2^{2k} - 1)$$

$$= 3.2^{2k} + 3q$$
$$= 3\,(2^{2k} + q) = 3m, \text{ जहाँ } m \in \mathbf{N}$$

अतएव, जब कभी P(k) सत्य है, P(k +1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से, सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 5 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए $2n + 1 < 2^n$.

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए

P(n) : $(2n + 1) < 2^n$ हम देखते हैं कि P(3) सत्य है, क्योंकि

$$2.3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात् $2k + 1 < 2^k$

P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हमें सिद्ध करना है कि $2(k + 1) + 1 < 2^{k+1}$

अब, $\quad 2(k + 1) + 1 = 2\,k + 3$

$$= 2k + 1 + 2 < 2^k + 2 < 2^k\,.\,2 = 2^{k+1}.$$

अतएव जब कभी P(k) सत्य है, P(k +1) भी सत्य है।

अत:, सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए, गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा P(n) सत्य है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

उदाहरण 6 किसी अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots$ को इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि $a_1 = 2$, $a_n = 5\,a_{n-1}$. जो सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए,

(i) अनुक्रम के प्रथम चार पद (terms) लिखिए।

(ii) गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं के लिए, अनुक्रम के पद, सूत्र $a_n = 2.5^{n-1}$ को संतुष्ट करते हैं।

हल

(i) हम देखते हैं कि, $a_1 = 2$

$a_2 = 5a_{2-1} = 5a_1 = 5.2 = 10$

$a_3 = 5a_{3-1} = 5a_2 = 5.10 = 50$

$a_4 = 5a_{4-1} = 5a_3 = 5.50 = 250$

(ii) मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है, अर्थात्, सभी प्राकृत संख्याओं के लिए

P(n) : $a_n = 2.5^{\,n-1}$ हम देखते हैं कि, P(1) सत्य है।

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात् P(k) : $a_k = 2.5^{k-1}$.

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : a_{k+1} = 5.a_k = 5\ .\ (2.5^{k-1})$$
$$= 2.5^k = 2.5^{(k+1)-1}$$

अतएव, जब कभी P(k) सत्य है, P (k + 1) सभी सत्य है।

अत:, गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, सभी प्राकृत संख्याओं के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 7 बीजगणित (algebra) के वितरण नियम द्वारा सभी वास्तविक संख्याओं c, a_1 और a_2 के लिए, $c\ (a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2$.

इस वितरण नियम तथा गणितीय आगमन का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि, सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$, के लिए, यदि $c, a_1, a_2, ..., a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

$$c\ (a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$$

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए यदि $c, a_1, a_2, ...a_n \in$ R, तो $P(n) : c\ (a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ...\ ca_n$.

हम देखते हैं कि P(2) सत्य है, क्योंकि,

$$c(a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2 \qquad \text{(वितरण नियम द्वारा)}$$

मान लीजिए कि किसी-किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, जहाँ $k > 2$, अर्थात्,

$$P(k) : c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_k$$

अब P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})$$
$$= c\ ((a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1})$$
$$= c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k) + ca_{k+1} \qquad \text{(वितरण नियम द्वारा)}$$
$$= ca_1 + ca_2 + ... + ca_k + ca_{k+1}$$

अतएव जब कभी P(k) सत्य है, P (k + 1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, P(n) सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 8 आगमन विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए,

$\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + ... + \sin (\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

हल मान लीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, $P(n) : \sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + ... + \sin (\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

हम देखते हैं कि P (1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : \sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+0)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,
$P(k) : \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + ... + \sin(\alpha+(k-1)\beta)$

$$= \frac{\sin(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,
$P(k+1) : \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + ... + \sin(\alpha+(k-1)\beta) + \sin(\alpha+k\beta)$

$$= \frac{\sin(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \sin(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\frac{k\beta}{2} + \sin(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta + \beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\,(k+1)\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

अतएव, जब कभी P (k) सत्य है, P $(k + 1)$ भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, सभी प्राकृत संख्या n के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 9 गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात्, सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए

P(n) : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$

ध्यान दीजिए कि P(1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : 1 \times 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1.$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,

P(k) : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! = (k + 1)! - 1$

P $(k + 1)$ को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! + (k + 1) \times (k + 1)!$$
$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)! \times (k + 1)$$
$$= (k + 1 + 1)\ (k + 1)! - 1$$
$$= (k + 2)\ (k + 1)! - 1 = ((k + 2)! - 1$$

अतएव, जब कभी P (k) सत्य है P $(k + 1)$ भी सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, P (n) सत्य है।

उदारहण 10 गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा सिद्ध कीजिए कि श्रेणी (series), $1^2 + 2 \times 2^2 + 3^2 + 2 \times 4^2 + 5^2 + 2 \times 6^2$ ... के n पदों का योगफल S_n, निम्नलिखित प्रकार है,

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

हल यहाँ $P(n) : S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$

साथ ही ध्यान दीजिए कि श्रेणी का कोई पद T_n निम्नलिखित प्रकार है,

$$T_n = \begin{cases} n^2 \text{ यदि } n \text{ विषम है।} \\ 2n^2 \text{ यदि } n \text{ सम है।} \end{cases}$$

हम देखते हैं कि P(1) सत्य है, क्योंकि,

$$P(1) : S_1 = 1^2 = 1 = \frac{1.2}{2} = \frac{1^2.(1+1)}{2}$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए $P(k)$ सत्य है, अर्थात्,

दशा 1 जब k विषम है, तो $k + 1$ सम है। इस प्रकार

$$P(k + 1) : S_{k+1} = [1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2] + 2 \times (k + 1)^2$$

$$= \frac{k^2(k+1)}{2} + 2 \times (k + 1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{2} [k^2 + 4(k + 1)] \text{ (क्योंकि } k \text{ विषम है, } 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2 = k^2 \frac{(k+1)}{2})$$

$$= \frac{k+1}{2}[k^2 + 4k + 4]$$

$$= \frac{k+1}{2}(k+2)^2 = (k + 1) \frac{[(k+1)+1]^2}{2}$$

अतएव, उस दशा में, जब k विषम है, $P(k + 1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

दशा 2 जब k सम है, तो $k + 1$ विषम है।

अब $\quad P(k+1) : S_{k+1} = [1^2 + 2 \times 2^2 + ... + 2.k^2] + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)^2}{2} + (k+1)^2 \text{ क्योंकि } k \text{ सम है, } 1^2 + 2\times 2^2 + ... + 2k^2 = k\ \frac{(k+1)^2}{2})$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)}{2} = \frac{(k+1)^2 ((k+1)+1)}{2}$$

इसलिए उस दशा में, जब k सम है, P $(k + 1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है। अतएव सभी प्राकृत संख्याओं k के लिए, P $(k + 1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है।

अत: P (n) सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 11 *और* 12 *में सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.)

उदारहण 11 मान लीजिए कि P(n) : "$2^n < (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)$", तो न्यूनतम धन पूर्णांक, जिसके लिए P (n) सत्य है,

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 है।

हल सही उत्तर (D) है, क्योंकि

P (1) : $2 < 1$ असत्य है

P (2) : $2^2 < 1 \times 2$ असत्य है

P (3) : $2^3 < 1 \times 2 \times 3$ असत्य है

लेकिन P (4) : $2^4 < 1 \times 2 \times 3 \times 4$ सत्य है

उदारहण 12 एक विद्यार्थी को किसी कथन P (n) को गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध करने के लिए कहा गया। उसने सिद्ध किया कि, सभी $k > 5 \in \mathbf{N}$ के लिए P $(k + 1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है और यह कि P (5) भी सत्य है। इसके आधार पर उसने निष्कर्ष निकाला कि P (n) सत्य है,

(A) सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए (B) सभी $n > 5$ के लिए

(C) सभी $n \geq 5$ के लिए (D) सभी $n < 5$ के लिए

हल सही उत्तर (C) है, क्योंकि P(5) सत्य है, तथा P$(k + 1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है।

उदाहरण 13 यदि P (n) : "$2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ सभी $n \in \mathbf{N}$" के लिए, λ से भाज्य है, सत्य है, तो λ का मान ________ है।

हल अब $n = 1$ के लिए,

$2.4^{2+1} + 3^{3+1} = 2.4^3 + 3^4 = 2.64 + 81 = 128 + 81 = 209$,

$n = 2$ के लिए,

$2.4^5 + 3^7 = 8.256 + 2187 = 2048 + 2187 = 4235$

ध्यान दीजिए कि 209 तथा 4235 का म. स. व. (H.C.F.) 11 है। अतएव $2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ का भाजक 11 है। अत: λ का मान 11 है।

उदाहरण 14 यदि P (n) : "$n \in$ **N** के लिए, $49^n + 16^n + k$ संख्या 64 से भाज्य है'' सत्य है, तो k का न्यूनतम ऋण पूर्णांक मान ___________ है।

हल $n = 1$ के लिए, P(1) : $65 + k$, 64 से भाज्य है, अत: $k = -1$,

क्योंकि $65 - 1 = 64$, संख्या 64 से भाज्य है।

उदाहरण 15 बताइए कि गणितीय आगमन द्वारा कथन P(n) : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

की निम्नलिखित उपपत्ति सत्य है या असत्य है।

उपपत्ति गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा $n = 1$ के लिए P(n) सत्य है, क्योंकि

$1^2 = 1 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$ पुन: किसी $k \geq 1$ के लिए $k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

हल: यह उपपत्ति असत्य (ग़लत) है। क्योंकि आगमन चरण (Induction step) में आगमन परिकल्पना (Induction hypothesis) तथा जो सिद्ध किया जाना है, दोनों ही गलत (दोषपूर्ण हैं)।

4.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. एक ऐसे कथन P(n) का उदाहरण दीजिए, जो सभी $n \geq 4$ के लिए सत्य है किंतु P(1), P(2) तथा P(3) सत्य नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।
2. किसी ऐसे कथन P(n) का उदाहरण दीजिए जो n के सभी मानों के लिए सत्य है। अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा प्रश्न संख्या 3 से 16 तक के कथनों में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए:

3. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, $4^n - 1$ संख्या 3 से भाज्य है।
4. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $2^{3n} - 1$, संख्या 7 से भाज्य है।
5. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $n^3 - 7n + 3$, संख्या 3 भाज्य है।
6. सभी प्राकृत संख्या n के लिए $3^{2n} - 1$ संख्या 8 से भाज्य है।
7. किसी प्राकृत संख्या n के लिए $7^n - 2^n$ संख्या 5 से भाज्य है।

8. किसी प्राकृत संख्या n के लिए, $x^n - y^n$, $x - y$ से भाज्य है, जहाँ x तथा y पूर्णांक है और $x \neq y$.

9. प्रत्येक प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए, $n^3 - n$, संख्या 6 से भाज्य है।

10. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, $n(n^2 + 5)$, संख्या 6 से भाज्य है।

11. सभी प्राकृत संख्या $n \geq 5$ के लिए, $n^2 < 2^n$.

12. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $2n < (n + 2)!$

13. सभी प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए, $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

14. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$.

15. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

16. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n\,(2n - 1)$

विस्तृत उत्तर वाले प्रश्न (L.A)

निम्नलिखित प्रश्नों में गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग कीजिए:

17. सभी प्राकृत संख्या $k \geq 2$ के लिए, एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots,\ a_1 = 3$ तथा $a_k = 7a_{k-1}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए $a_n = 3.7^{n-1}$.

18. सभी प्राकृत संख्या k के लिए एक अनुक्रम $b_0, b_1, b_2 \ldots, b_0 = 5$ तथा $b_k = 4 + b_{k-1}$ द्वारा परिभाषित है। गणितीय आगमन के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए $b_n = 5 + 4n$.

19. सभी प्राकृत संख्या $k \geq 2$ के लिए अनुक्रम $d_1, d_2, d_3 \ldots, d_1 = 2$ तथा $d_k = \frac{d_{k-1}}{k}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, $d_n = \frac{2}{n!}$

20. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि,

$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots + \cos(\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

21. सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta \ldots \cos 2^{n-1}\theta = \frac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$.

22. सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin n\theta$

$$= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

23. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

24. सभी प्राकृत संख्या $n > 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

25. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि n भिन्न-भिन्न distinct अवयव वाले (अंतर्विष्ट किए हुए) समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 26 *से* 30 में *सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.).

26. यदि सभी $n \in$ N के लिए, $10^n + 3.4^{n+2} + k$, संख्या 9 से भाज्य है, तो k का लघुतम पूर्णांक मान:

(A) 5 (B) 3 (C) 7 (D) 1

27. सभी $n \in$ **N** के लिए, $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, निम्नलिखित में से किस संख्या से भाज्य है:

(A) 19 (B) 17 (C) 23 (D) 25

28. यदि $x^n - 1$, $x - k$, से भाज्य है, तो k का न्यूनतम पूर्णांक है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

निम्नलिखित प्रश्न में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

29. यदि P(n) : $2n < n!$, $n \in \mathbf{N}$, तो P(n) सभी $n \geq$ _________ के लिए सत्य है।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य है। औचित्य भी बताइए:

30. मान लीजिए कि P(n) एक कथन है और मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(k) $\Rightarrow$ P(k + 1), तो P(n) सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य है।

अध्याय 5

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण

5.1 समग्र अवलोकन

हम जानते हैं कि एक वास्तविक संख्या का वर्ग सदैव ऋणेत्तर होता है। उदाहरणार्थ, $(4)^2 = 16$ और $(-4)^2 = 16$ है। इसलिए 16 का वर्गमूल ± 4 है। किसी ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल के बारे में क्या कहा जा सकता है? यह स्पष्ट है कि एक ऋणात्मक संख्या का कोई वास्तविक वर्गमूल नहीं हो सकता। अत:, हमें वास्तविक संख्याओं के निकाय को एक ऐसे निकाय में विस्तृत करने की आवश्यकता है जिसमें हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात कर सकें। ऑयलर (1707–1783) ऐसा प्रथम गणितज्ञ था, जिसने -1 के धनात्मक वर्गमूल के लिए संकेत i [आयोटा ((iota)] प्रयुक्त किया। अर्थात्, $i = \sqrt{-1}$ है।

5.1.1 *काल्पनिक संख्याएँ*

किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल एक काल्पनिक संख्या कहलाता है,

जैसे $$\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = i3, \ \sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

5.1.2 *i की पूर्णांकीय घातें*

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, इत्यादि।

$n > 4$ के लिए, i^n अभिकलित करने के लिए, हम n को 4 से भाग देकर उसे $n = 4m + r$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ m भागफल है और r शेषफल है $0 \le r \le 4$ है।

अत:, $$i^n = i^{4m+r} = (i^4)^m \,.\, (i)^r = (1)^m\,(i)^r = i^r$$

उदाहरणार्थ, $$(i)^{39} = i^{4\times 9+3} = (i^4)^9 \,.\, (i)^3 = i^3 = -i$$

तथा $$(i)^{-435} = i^{-(4\times 108+3)} = (i)^{-(4\times 108)} \,.\, (i)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(i^4)^{108}} \cdot \frac{1}{(i)^3} = \frac{i}{(i)^4} = i$$

(i) यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{a} \times \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{a} \times i\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$$

(ii) $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ यदि a और b धनात्मक हैं अथवा इनमें से कम से कम एक ऋणात्मक हो या शून्य हो। परंतु $\sqrt{a}\sqrt{b} \ne \sqrt{ab}$, यदि a और b दोनों ऋणात्मक हैं।

5.1.3 सम्मिश्र संख्याएँ

1. वह संख्या जिसे $a + ib$ के रूप में लिखा जा सके एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ है।
2. यदि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है, तो a और b क्रमशः इस सम्मिश्र संख्या के वास्तव और काल्पनिक भाग कहलाते हैं। इन्हें $\text{Re}\,(z) = a$ और $\text{I}m\,(z) = b$ लिखा जाता है।
3. सम्मिश्र संख्याओं के लिए क्रम संबंध 'से बड़ा है' और 'से छोटा है' परिभाषित नहीं है।
4. यदि किसी सम्मिश्र संख्या का काल्पनिक भाग शून्य हो, तो वह एक शुद्धतः वास्तविक संख्या कही जाती है तथा यदि उसका वास्तविक भाग शून्य हो, तो वह शुद्धतः काल्पनिक संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, 2 एक शुद्धतः काल्पनिक संख्या है, क्योंकि इसका काल्पनिक भाग शून्य है तथा $3i$ के शुद्धतः काल्पनिक संख्या है, क्योंकि इसका वास्तविक भाग शून्य है।

5.1.4 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

1. दो सम्मिश्र संख्या $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ बराबर कहलाती है, यदि $a = c$ और $b = d$
2. मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$ होता है।

5.1.5 सम्मिश्र संख्याओं का योग निम्नलिखित गुणों (गुणधर्मों) को संतुष्ट करता है

1. क्योंकि दो सम्मिश्र संख्याओं का योग पुनः एक सम्मिश्र संख्या होता है, इसलिए सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय योग के लिए संवृत है।
2. सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. सम्मिश्र संख्याओं का योग साहचर्य (या सहचारी) होता है, अर्थात् $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. किसी सम्मिश्र संख्या $z = x + i\,y$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या 0, अर्थात् $(0 + 0i)$ ऐसी होती है कि $z + 0 = 0 + z = z$ होता है। यह संख्या 0 योग के लिए तत्समक अवयव कहलाती है।
5. एक सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ के लिए, सदैव एक सम्मिश्र संख्या $-z = -x - iy$ ऐसी होती है कि $z + (-z) = (-z) + z = 0$। यह संख्या $-z$, z का योज्य प्रतिलोम कहलाती है।

5.1.6 सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

तब $z_1 \,.\, z_2 = (a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

1. क्योंकि दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल पुनः एक सम्मिश्र संख्या है, इसलिए सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय गुणन के लिए संवृत है।
2. सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् $z_1.z_2 = z_2.z_1$

3. सम्मिश्र संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, अर्थात् $(z_1.z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2.z_3)$
4. किसी सम्मिश्र संख्या $z = (x + iy)$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या 1, अर्थात् $(1 + 0i)$, इस प्रकार कि $z \,.\, 1 = 1 \,.\, z = z$ होता है। यह संख्या 1 गुणन के लिए तत्समक अवयव कहलाती है।
5. किसी शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = x + i\,y$ के लिए, एक सम्मिश्र संख्या $\frac{1}{z}$ है जिसके लिए $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ होता है। $\frac{1}{z}$, z का गुणनात्मक प्रतिलोम कहलाता है। अर्थात् $a + ib$ का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ है।
6. किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्या z_1, z_2 और z_3 के लिए,
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$
तथा
$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$
अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं के लिए गुणन, योग पर वितरित (या बंटित) है।

5.1.7 मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ (शून्येत्तर) दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब, $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\,\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$

5.1.8 एक सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब इसके काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदलने पर प्राप्त संख्या सम्मिश्र संख्या z का संयुग्मी कहलाती है तथा इसे $\overline{z}$ से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $\overline{z} = a - ib$

ध्यान दीजिए कि z का योज्य प्रतिलोम $-a - ib$ है, जबकि इसका संयुग्मी $a - ib$ है।

हमें ज्ञात है:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$
3. $z = \overline{z}$, यदि z शुद्धतः वास्तविक संख्या है।
4. $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ शुद्धतः काल्पनिक संख्या है।
5. $z \,.\, \overline{z} = \{\mathrm{Re}\,(z)\}^2 + \{\mathrm{Im}\,(z)\}^2$
6. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ और $\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$
7. $\overline{(z_1 . z_2)} = (\overline{z}_1) . (\overline{z}_2)$ और $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\overline{z}_1)}{(\overline{z}_2)}$, $(\overline{z}_2 \neq 0)$

5.1.9 एक सम्मिश्र संख्या का मापांक या निरपेक्ष मान

मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब, इसके वास्तविक भाग के वर्ग और काल्पनिक

भाग के वर्ग के योग का धनात्मक वर्गमूल z का मापांक (निरपेक्ष मान) कहलाता है। और इसे $|z|$ से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

सम्मिश्र संख्याओं के एक समुच्चय में, $z_1 > z_2$ या $z_2 > z_1$ अर्थहीन है; परंतु $|z_1| > |z_2|$ या $|z_1| < |z_2|$ अर्थपूर्ण हैं; क्योंकि $|z_1|$ और $|z_2|$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

5.1.10 एक सम्मिश्र संख्या के मापांक के गुण

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, अर्थात् Re $(z) = 0$ और Im $(z) = 0$
2. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$
3. $-|z| \leq \text{Re}\,(z) \leq |z|$ और $-|z| \leq \text{Im}\,(z) \leq |z|$
4. $z\,\overline{z} = |z|^2,\ |z^2| = |\overline{z}|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$
6. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\text{Re}\,(z_1\,\overline{z}_2)$
7. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\text{Re}\,(z_1\,\overline{z}_2)$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
9. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
10. $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

    विशेषतः

    $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
11. जैसा कि पूर्व में चर्चा की जा चुकी है, एक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib\ (\neq 0)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम)

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

5.2 आर्गंड तल

किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को समकोणिक अक्षों के एक युग्म के सापेक्ष एक कार्तीय (तल) में एक अद्वितीय बिंदु (a, b) के रूप में निरूपित किया जा सकता है। सम्मिश्र संख्या $0 + 0i$ मूल बिंदु O (0, 0) को निरूपित करती है। एक शुद्धतः वास्तविक संख्या a, अर्थात् $(a + 0i)$ को x-अक्ष पर स्थित बिंदु $(a, 0)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, x-अक्ष को वास्तविक अक्ष कहते हैं। एक शुद्धतः काल्पनिक संख्या ib, अर्थात् $(0 + ib)$ को y-अक्ष स्थित बिंदु $(0, b)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, y-अक्ष को काल्पनिक अक्ष कहते हैं।

इसी प्रकार, तल में सम्मिश्र संख्याओं के बिंदुओं द्वारा निरूपण को **आर्गंड आरेख (Argand) diagram)** कहते हैं। वह तल जिस पर सम्मिश्र संख्याओं को बिंदुओं के रूप में निरूपित किया जाता है। सम्मिश्र तल या आर्गंड तल या गाउसनीय तल कहलाता है।

यदि एक सम्मिश्र तल में, दो सम्मिश्र संख्या z_1 और z_2 को क्रमशः बिंदुओं P और Q से निरूपित किया जाता है, तो $|z_1 - z_2| = \text{PQ}$

5.2.1 *एक सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप*

मान लीजिए कि P आर्गंड तल में एक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को निरूपित करने वाला एक बिंदु है। यदि OP, x-अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण θ बनाये तो $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ इस सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप कहलाता है, जहाँ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ है और $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ है। यहाँ θ सम्मिश्र संख्या z का कोणांक (argument या amplitude) कहलाता है तथा हम इसे $\arg(z) = \theta$ लिखते हैं। θ का वह अद्वितीय मान, जिससे $-\pi \le \theta \le \pi$ हो, मुख्य कोणांक कहलाता है।

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

5.2.2 एक द्विघात समीकरण का हल

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b और c संख्याएँ (वास्तविक या सम्मिश्र, $a \neq 0$ हैं, चर x में एक व्यापक द्विघात समीकरण कहलाता है। चर के वे मान जो इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं, इसके मूल कहलाते हैं।

वास्तविक गुणांकों वाली द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल $\dfrac{-b+\sqrt{\text{D}}}{2a}$ और $\dfrac{-b-\sqrt{\text{D}}}{2a}$ होते हैं, जहाँ $\text{D} = b^2 - 4ac$ होता है, जो इस समीकरण का विविक्तकर कहलाता है।

टिप्पणियाँ

1. जब $D = 0$ है, तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और बराबर (समान) होते हैं। जब $D > 0$ है, तो मूल वास्तविक और असमान होते हैं। साथ ही, यदि $a, b, c \in Q$ और D एक पूर्ण वर्ग है, तो समीकरण के मूल परिमेय और असमान होते हैं तथा यदि $a, b, c \in Q$ और D एक पूर्ण वर्ग नहीं है, तो मूल अपरिमेय होते हैं और एक युग्म के रूप में होते हैं। जब $D < 0$ तो द्विघात समीकरण के मूल अवास्तविक (सम्मिश्र) होते हैं।
2. यदि α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो मूलों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$ और मूलों का गुणनफल $(\alpha . \beta) = \frac{c}{a}$ होता है।
3. मान लीजिए कि किसी द्विघात समीकरण के मूलों का योग S है और मूलों का गुणनफल P है, तो वह समीकरण $x^2 - Sx + P = 0$ होता है।

5.3. हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

उदाहरण 1 मान ज्ञात कीजिए : $(1 + i)^6 + (1 - i)^3$

हल $(1 + i)^6 = \{(1 + i)^2\}^3 = (1 + i^2 + 2i)^3 = (1 - 1 + 2i)^3 = 8\, i^3 = -8i$

तथा $\quad (1 - i)^3 = 1 - i^3 - 3i + 3i^2 = 1 + i - 3i - 3 = -2 - 2i$

अतः, $\quad (1 + i)^6 + (1 - i)^3 = -8i - 2 - 2i = -2 - 10i$

उदाहरण 2 यदि $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$, जहाँ $y, a, b \in \mathbf{R}$ तो दर्शाइए कि

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -2\,(a^2 + b^2)$$

हल $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$

$\Rightarrow \quad x + iy = (a + ib)^3$

अर्थात् $\quad x + iy = a^3 + i^3 b^3 + 3a^2 (ib) + 3a\,(ib)^2$

$$= a^3 - ib^3 + i3a^2b - 3ab^2$$

$$= a^3 - 3ab^2 + i\,(3a^2b - b^3)$$

$\Rightarrow \quad x = a^3 - 3ab^2$ और $y = 3a^2b - b^3$

अतः, $\dfrac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ और $\dfrac{y}{b} = 3a^2 - b^2$

इसलिए, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = a^2 - 3b^2 - 3a^2 + b^2 = -2a^2 - 2b^2 = -2(a^2 + b^2)$

उदाहरण 3 समीकरण $z^2 = \bar{z}$ को हल कीजिए, जहाँ $z = x + iy$ है।

हल $z^2 = \bar{z} \Rightarrow x^2 - y^2 + i2xy = x - iy$

अतः, $x^2 - y^2 = x$ ... (1) और $2xy = -y$ ... (2)

(2) से, हम $y = 0$ या $x = -\dfrac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं।

जब $y = 0$, तो (1), से हम $x^2 - x = 0$ प्राप्त करते हैं, जिससे $x = 0$ या $x = 1$ प्राप्त होता है।

जब $x = -\dfrac{1}{2}$ तो (1) से हम $y^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}$ अर्थात् $y^2 = \dfrac{3}{4}$ जिससे $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः समीकरण के हल $0 + i0$, $1 + i0$, $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है।

उदाहरण 4 यदि $\dfrac{2z+1}{iz+1}$ का काल्पनिक भाग–2 है, तो दर्शाइए कि z को आर्गंड तल में निरूपित करने वाले बिंदु का बिंदु पथ एक सरल रेखा है।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$ तब,

$$\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}$$

$$= \frac{\{(2x+1)+i2y\}}{\{(1-y)+ix\}} \times \frac{\{(1-y)-ix\}}{\{(1-y)-ix\}}$$

$$= \frac{(2x+1-y)+i(2y-2y^2-2x^2-x)}{1+y^2-2y+x^2}$$

इस प्रकार, $$\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = \frac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2}$$

परंतु, $$\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = -2 \qquad \text{(दिया है)}$$

अत:, $\dfrac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2}=-2$

$\Rightarrow$ $2y - 2y^2 - 2x^2 - x = -2 \quad -2y^2 + 4y - 2x^2$

अर्थात् $x + 2y - 2 = 0$, जो एक सरल रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 5 यदि $\left|z^2-1\right| = \left|z\right|^2 + 1$ है, तो दर्शाइए कि z काल्पनिक अक्ष पर स्थित है।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$, तब $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1$

$\Rightarrow$ $\left|x^2-y^2-1+i\,2xy\right|=\left|x+iy\right|^2+1$

$\Rightarrow$ $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2$

$\Rightarrow$ $4x^2 = 0$ अर्थात् $x = 0$

अत:, z, y-अक्ष, अर्थात् काल्पनिक अक्ष पर स्थित है।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $\overline{z}_1 + i\,\overline{z}_2 = 0$ है तथा $\arg(z_1 z_2) = \pi$, तब $\arg(z_1)$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है: $\overline{z}_1 + i\,\overline{z}_2 = 0$

$\Rightarrow$ $z_1 = i\,z_2$ और $z_2 = -i\,z_1$

इस प्रकार $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(-i\,z_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-i\,z_1^2) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-i) + \arg(z_1^2) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(-i) + 2\arg(z_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\dfrac{-\pi}{2} + 2\arg(z_1) = \pi$

$\Rightarrow$ $\arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}$

उदाहरण 7 मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि

$|z_1 + x_2| = |z_1| + z_2|$ तब दर्शाइए कि $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 0$

हल मान लीजिए कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

जहाँ $r_1 = |z_1|$, $\arg(z_1) = \theta_1$, $r_2 = |z_2|$ और $\arg(z_2) = \theta_2$

हमें ज्ञात है $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$= \left|r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right| = r_1 + r_2$

$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

$\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0$ अर्थात् $\theta_1 = \theta_2$

अर्थात् $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ या $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 0$

उदाहरण 8 यदि z_1, z_2, z_3 ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$, तो $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

$\Rightarrow \quad |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1$

$\Rightarrow \quad z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$

$\Rightarrow \quad \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$

दिया है कि $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$

$\Rightarrow \quad |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = 1$, अर्थात् $\left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 1$

$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2 + z_3| = 1$

उदाहरण 9 यदि एक सम्मिश्र संख्या z त्रिज्या 3 इकाई और केंद्र $(-4, 0)$ वाले एक वृत्त के अभ्यंतर या उसकी परिसीमा पर स्थित है, तो $|z+1|$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल z को निरूपित करने वाले बिंदु की वृत्त के केंद्र से दूरी $|z-(-4+i0)| = |z+4|$

अब, $|z+1| = |z+4-3| \leq |z+4| + |-3| \leq 3+3=6$

अतः, $|z+1|$ का अधिकतम मान 6 है।

क्योंकि किसी सम्मिश्र संख्या के मापांक का न्यूनतम मान शून्य होता है, इसलिए $|z + 1|$ का न्यूनतम मान 0 है।

उदाहरण 10 वे बिंदु निर्धारित कीजिए, जिनके लिए $3 < |z| < 4$

हलः $|z| < 4 \Rightarrow x^2 + y^2 < 16$, जो केंद्र मूलबिंदु और त्रिज्या 4 इकाई वाले वृत्त का अभ्यंतर है तथा $|z| > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$, जो केंद्र मूलबिंदु और त्रिज्या 3 इकाई वाले वृत का बहिर्भाग है। अतः

$3 < |z| < 4$ वह भाग है जो दो वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ और $x^2 + y^2 = 16$ के बीच में स्थित है।

उदाहरण 11 $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $x = -2 - \sqrt{3}\,i$

हल $x + 2 = -\sqrt{3}\,i \Rightarrow x^2 + 4x + 7 = 0$

अत: $$2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41 = (x^2 + 4x + 7)(2x^2 - 3x + 5) + 6$$
$$= 0 \times (2x^2 - 3x + 5) + 6 = 6$$

उदाहरण 12 P का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - Px + 8 = 0$ के मूलों का अंतर 2 हो।

हल मान लीजिए कि $x^2 - Px + 8 = 0$ के मूल α और β हैं।

इसलिए, $\alpha + \beta = P$ और $\alpha \,.\, \beta = 8$

अब, $$\alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

अत:, $$2 = \pm\sqrt{P^2 - 32}$$

$\Rightarrow$ $P^2 - 32 = 4,\ P^2 = 36$ अर्थात् $P = \pm 6$

उदाहरण 13 a का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - (a - 2)\,x - (a + 1) = 0$ के मूलों के वर्गों का योग न्यूनतम है।

हल मान लीजिए कि α, β दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

अत:, $\alpha + \beta = a - 2$ और $\alpha\beta = -(a + 1)$

अब, $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (a - 2)^2 + 2(a + 1)$$
$$= (a - 1)^2 + 5$$

अत:, $\alpha^2 + \beta^2$ न्यूनतम होगा, जब $(a - 1)^2 = 0$, अर्थात् $a = 1$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (LA)

उदाहरण 14 यदि सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए,

$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = k(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$ तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{LHS} = |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$$
$$= (1 - \bar{z}_1 z_2)\,\overline{(1 - \bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)}$$
$$= (1 - \bar{z}_1 z_2)\,(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$
$$= 1 + z_1\,\bar{z}_1\,z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$$

$$= 1+|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2$$

$$= (1-|z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$$

$$\text{RHS} = k\,(1 - |z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$$

अत:, LHS और RHS को बराबर करने पर $k = 1$

उदाहरण 15 यदि z_1 और z_2 दोनों $z + \overline{z} = 2|z-1|$, जहाँ $\arg(z_1 - z_2) = \dfrac{\pi}{4}$ को संतुष्ट करते हैं, तो $Im\,(z_1 + z_2)$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ है।

तब, $\quad z + \overline{z} = 2|z-1|$

$\Rightarrow \quad (x + iy) + (x - iy) = 2\,|x-1+iy|$

$\Rightarrow \quad 2x = 1 + y^2 \qquad \ldots (1)$

क्योंकि z_1 और z_2 दोनों (1) को संतुष्ट करते हैं, इसलिए हमें प्राप्त है:

$2x_1 = 1 + y_1^2$ और $2x_2 = 1 + y_2^2$

$\Rightarrow \quad 2\,(x_1 - x_2) = (y_1 + y_2)\,(y_1 - y_2)$

$\Rightarrow \quad 2 = (y_1 + y_2)\left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \qquad \ldots (2)$

पुन: $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

अत: $\quad \tan\theta = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, जहाँ $\theta = \arg(z_1 - z_2)$ है।

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad \left(\text{क्योंकि } \theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$

अर्थात् $\quad 1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

अत:, (2) से हमें प्राप्त होता है: $2 = y_1 + y_2$, अर्थात् $\text{Im}\,(z_1 + z_2) = 2$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 16 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) 'a' का वास्तविक मान जिसके लिए $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ वास्तविक है ______ होगा।

(ii) यदि $|z| = 2$ और arg $(z) = \dfrac{\pi}{4}$ है, तो $z =$ ______ है।

(iii) arg $(z) = \dfrac{\pi}{3}$ को संतुष्ट करने वाले z का बिंदु पथ ______ है।

(iv) $(-\sqrt{-1})^{4n-3}$ का मान ______ है, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

(v) सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1-i}{1+i}$ का संयुग्मी ______ है।

(vi) यदि एक सम्मिश्र संख्या तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो उसका संयुग्मी ______ में स्थित होगा।

(vii) यदि $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots (2 + ni) = x + iy$ तो $5.8.13 \ldots (4 + n^2) =$ ______

हल

(i) $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5 = -3i + 2a + 5 + (1 - a)i$
$= 2a + 5 + (-a - 2)\,i$, जो वास्तविक होगा यदि $-a - 2 = 0$ अर्थात् $a = -2$

(ii) $z = |z|\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(1+i)$

(iii) मान लीजिए कि $z = x + iy$, तो इसका ध्रुवीय रूप $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है, जहाँ

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ और θ, arg (z) है। $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ दिया है।

इस प्रकार, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$, जहाँ $x > 0, y > 0$ है।

अत:, z का बिंदु पथ, मूलबिंदु के अतिरिक्त $y = \sqrt{3}x$, का प्रथम चतुर्थांश में एक भाग है।

(iv) यहाँ, $(-\sqrt{-1})^{4n-3} = (-i)^{4n-3} = (-i)^{4n}\,(-i)^{-3} = \dfrac{1}{(-i)^3}$

$$= \frac{1}{-i^3} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

(v) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1+i^2-2i}{1-i^2} = \dfrac{1-1-2i}{1+1} = -i$

अत:, $\dfrac{1-i}{1+i}$ का संयुग्मी i है।

(vi) किसी सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी x-अक्ष के सापेक्ष उसका प्रतिबिंब होता है। अत:, एक संख्या तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो उसका प्रतिबिंब दूसरे चतुर्थांश में स्थित होगा।

(vii) दिया है: $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots (2 + ni) = x + iy$ ... (1)

$$\Rightarrow \qquad \overline{(2+i)}\ \overline{(2+2i)}\ \overline{(2+3i)} \ldots \overline{(2+ni)} = \left(\overline{x+iy}\right) = (x-iy)$$

अर्थात् $\quad (2 - i)\ (2 - 2i)\ (2 - 3i) \ldots (2 - ni) = x - iy$ ... (2)

(1) और (2) का गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है: $5.8.13 \ldots (4 + n^2) = x^2 + y^2$

उदाहरण 17 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य है।

(i) एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या को i से गुणा करने पर, वह उसे वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घुमा देता है।

(ii) सम्मिश्र संख्या $\cos\theta + i \sin\theta$, θ के किसी मान के लिए शून्य हो सकती है।

(iii) यदि कोई सम्मिश्र संख्या अपने संयुग्मी के साथ संपाती है, तो वह संख्या अवश्य ही काल्पनिक अक्ष पर स्थित होना चाहिए।

(iv) सम्मिश्र संख्याएं $z = (1 + i\sqrt{3})\ (1 + i)\ (\cos\theta + i \sin\theta)$ का कोणांक $\dfrac{7\pi}{12} + \theta$ है।

(v) सम्मिश्र संख्या z, जिसके लिए $|z+1| < |z-1|$ है, को निरूपित करने वाले बिंदु एक वृत्त के अभ्यंतर में स्थित होते हैं।

(vi) यदि तीन सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 और z_3 एक समांतर श्रेणी (A.P) में हैं तो वे सम्मिश्र तल में एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

(vii) यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$ का मान शून्य है।

हल

(i) सत्य, मान लीजिए कि OP द्वारा निरूपित सम्मिश्र संख्या $z = 2 + 3i$ है। तब, $iz = -3 + 2i$ रेखाखंड OQ से निरूपित होगा, जहाँ OP वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घूमने पर OQ के संपाती हो जाता है।

(ii) असत्य, क्योंकि $\cos\theta + i\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ और $\sin\theta = 0$. परंतु θ का कोई ऐसा मान नहीं है, जिसके लिए $\cos\theta$ और $\sin\theta$ एक साथ शून्य होंगे।

(iii) असत्य, क्योंकि $x + iy = x - iy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ संख्या x-अक्ष पर स्थित है।

(iv) सत्य, $\arg(z) = \arg(1 + i\sqrt{3}) + \arg(1 + i) + \arg(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{7\pi}{12} + \theta$$

(v) असत्य, क्योंकि $|x+iy+1| < |x+iy-1|$

$\Rightarrow \qquad (x + 1)^2 + y^2 < (x - 1)^2 + y^2$ जिससे $4x < 0$ प्राप्त होता है।

(vi) असत्य, क्योंकि यदि z_1, z_2 और z_3 एक समांतर श्रेणी में हों, तो $z_2 = \dfrac{z_1 + z_3}{2} \Rightarrow z_2$, z_1 और z_3 का मध्य बिंदु है। इसका अर्थ है कि z_1, z_2 और z_3 संरेख हैं।

(vii) सत्य, क्योंकि $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$

$= i^n (1 + i + i^2 + i^3) = i^n (1 + i - 1 - i)$

$= i^n (0) = 0$

उदाहरण 18 स्तंभ A और स्तंभ B के कथनों का सही मिलान कीजिए:

स्तंभ A	स्तंभ B
(a) $1+i^2 + i^4 + i^6 + \ldots i^{20}$ का मान है	(i) शुद्धतः काल्पनिक सम्मिश्र संख्या
(b) i^{-1097} का मान है	(ii) शुद्धतः वास्तविक सम्मिश्र संख्या
(c) $1+i$ का संयुग्मी किस चतुर्थांश में स्थित है	(iii) द्वितीय चतुर्थांश
(d) $\frac{1+2i}{1-i}$ किस चतुर्थांश में स्थित है	(iv) चौथा चतुर्थांश
(e) यदि $a, b, c \in$ R और $b^2 - 4ac < 0$ तब समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल अवास्तविक एवं सम्मिश्र हैं	(v) संयुग्मी युग्मों में घटित नहीं हो सकते हैं
(f) यदि $a, b, c \in \mathbf{R}$ और $b^2 - 4ac > 0$ एवं $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग है, तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं	(vi) संयुग्मी युग्मों में घटित हो सकते हैं

हल

(a) $\Leftrightarrow$ (ii), क्योंकि $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{20}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 = 1$ (जो शुद्धतः एक वास्तविक सम्मिश्र संख्या है)

(b) $\Leftrightarrow$ (i), क्योंकि $i^{-1097} = \frac{1}{(i)^{1097}} = \frac{1}{i^{4\times274+1}} = \frac{1}{(i^4)^{274}\, i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$, जो

शुद्धतः एक काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है।

(c) $\Leftrightarrow$ (iv), $1 + i$ का संयुग्मी $1 - i$ है, जो बिंदु $(1, -1)$ से निरूपित किया जाता है और यह चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

(d) $\Leftrightarrow$ (iii), क्योंकि $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{1+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, जिसे द्वितीय चतुर्थांश

में बिंदु $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ से निरूपित किया जाता है।

(e) $\Leftrightarrow$ (vi), यदि $b^2 - 4ac < 0$ तो $= D < 0$ अर्थात् D का वर्गमूल एक काल्पनिक संख्या है। अतः मूल $x = \dfrac{-b \pm \text{काल्पनिक संख्या}}{2a}$ है, अर्थात् मूल संयुग्मी युग्मों में हैं।

(f) $\Leftrightarrow$ (v), समीकरण $x^2 - (5 + \sqrt{2})\, x + 5\sqrt{2} = 0$ पर विचार कीजिए, जहाँ $a = 1$, $b = -(5 + \sqrt{2})$, $c = 5\sqrt{2}$ स्पष्टतः $a, b, c \in$ R

अब $D = b^2 - 4ac = \{-(5 + \sqrt{2})\}^2 - 4.1.5\sqrt{2} = (5 - \sqrt{2})^2$

अतः $x = \dfrac{5+\sqrt{2} \pm (5-\sqrt{2})}{2} = 5, \sqrt{2}$ जिससे संयुग्मी युग्म नहीं बनता है।

उदाहरण 19: $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2}$ का क्या मान है?

हल: i, क्योंकि $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2} = \dfrac{i^{4n} i - i^{4n} i^{-i}}{2}$

$$= \frac{i - \frac{1}{i}}{2} = \frac{i^2 - 1}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$$

उदाहरण 20: वह कौन-सा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n है, जिसके लिए $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n}$?

हल $n = 2$, क्योंकि $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n} \Rightarrow \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1$

$\Rightarrow$ $(i)^{2n} = 1$ जो $n = 2$ के लिए संभव है $(\because i^4 = 1)$

उदाहरण 21: $3 + \sqrt{7}\, i$ का व्युत्क्रम क्या है?

हल: z का व्युत्क्रम $= \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

अतः, $3 + \sqrt{7}\, i$ का व्युत्क्रम $= \dfrac{3 - \sqrt{7}\, i}{16} = \dfrac{3}{16} - \dfrac{\sqrt{7}\, i}{16}$

उदाहरण 22: यदि $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ और $z_2 = \sqrt{3} + i$, तो ज्ञात कीजिए कि $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ किस चतुर्थांश में स्थित है।

हल: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)i$, जो प्रथम चतुर्थांश में स्थित एक बिंदु से निरूपित होता है।

उदाहरण 23: $\dfrac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}$ का संयुग्मी क्या है?

हल: मान लीजिए कि

$$z = \frac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}} \times \frac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$$

$$= \frac{5+12i+5-12i+2\sqrt{25+144}}{5+12i-5+12i}$$

$$= \frac{3}{2i} = \frac{3i}{-2} = 0-\frac{3}{2}i$$

अत:, z का संयुग्मी $= 0 + \dfrac{3}{2}i$

उदाहरण 24: $1 - i$ के कोणांक का मुख्य मान क्या है?

हल: मान लीजिए कि $1 - i$ के कोणांक का मुख्यमान θ है।

$$\text{क्योंकि } \tan\theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 25: सम्मिश्र संख्या $(i^{25})^3$ का ध्रुवीय रूप क्या है?

हल: $z = (i^{25})^3 = (i)^{75} = i^{4\times18+3} = (i^4)^{18}\ (i)^3$

$= i^3 = -i = 0 - i$

z का ध्रुवीय रूप $= r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 1\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$$

उदाहरण 26 : z का बिंदु पथ क्या होगा, यदि $z - 2 - 3i$ का कोणांक $\dfrac{\pi}{4}$ है?

हल: मान लीजिए कि $z = x + iy$ तब, $z - 2 - 3i = (x - 2) + i\,(y - 3)$

मान लीजिए कि $z - 2 - 3i$ का कोणांक θ है। तब, $\tan\theta = \dfrac{y-3}{x-2}$

$$\Rightarrow \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{y-3}{x-2} \left(\text{क्योंकि } \theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \frac{y-3}{x-2} \text{ अर्थात् } x - y + 1 = 0$$

अत:, z का बिंदु पथ एक सरल रेखा है।

उदाहरण 27 यदि $1 - i$ समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ का एक मूल है, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$, तब a और b के मान ज्ञात कीजिए।

हल मूलों का योग $= \dfrac{-a}{1} = (1 - i) + (1 + i) \Rightarrow a = -2.$

(*क्योंकि अवास्तविक सम्मिश्र मूल संयुग्मी युग्मों में घटित होते हैं*)

मूलों का गुणनफल $= \dfrac{b}{1} = (1-i)\,(1+i) \Rightarrow b = 2$

उदाहरण 28 से 33 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए (M.C.Q.):

उदाहरण 28 $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{2n}$ है:

(A) धनात्मक (B) ऋणात्मक

(C) 0 (D) इसका मान नहीं निकाला जा सकता

हल (D) $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{2n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots (-1)^n$

इसका मान तब तक नहीं निकाला जा सकता, जब तक कि n का ज्ञान न हो।

उदाहरण 29 यदि सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ प्रतिबंध $|z+1| = 1$ को संतुष्ट करती है, तो z स्थित है:

(A) x-अक्ष पर

(B) केंद्र (1, 0) और त्रिज्या 1 इकाई वाले एक वृत्त पर

(C) केंद्र (–1, 0) और त्रिज्या 1 वाले वृत्त पर

(D) y-अक्ष पर

हल (C), $|z+1| = 1 \Rightarrow |(x+1)+iy| = 1$

$$\Rightarrow \qquad (x+1)^2 + y^2 = 1$$

केंद्र (–1, 0) और त्रिज्या 1 इकाई वाला एक वृत्त है।

उदाहरण 30 सम्मिश्र संख्याओं $z, -iz$ और $z + iz$ द्वारा सम्मिश्र तल में बनाये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल है।

(A) $|z|^2$ (B) $|\bar{z}|^2$

(C) $\frac{|z|^2}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल (C) मान लीजिए कि $z = x + iy$ तब, $-iz = y - ix$

अत: $z + iz = (x - y) + i\,(x + y)$

त्रिभुज का वांछित क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{|z|^2}{2}$

उदाहरण 31 समीकरण $|z+1-i| = |z-1+i|$ निरूपित करता है एक

(A) सरल रेखा (B) वृत्त

(C) परवलय (D) अतिपरवलय

हल (A), $|z+1-i| = |z-1+i|$

$\Rightarrow$ $|z-(-1+i)| = |z-(1-i)|$

$\Rightarrow$ PA = PB , जहाँ A बिंदु $(-1, 1)$ को व्यक्त करता है, B बिंदु $(1, -1)$ को व्यक्त करता है तथा P बिंदु (x, y) को व्यक्त करता है।

$\Rightarrow$ z रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है और लंब समद्विभाजक एक सरल रेखा होती है।

उदाहरण 32 समीकरण $z^2 + |z|^2 = 0, z \neq 0$ के हलों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) अपरिमित रूप से अनेक

हल (D), $z^2 + |z|^2 = 0, z \neq 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + i2xy = 0$ $2x\,(x + iy) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x + iy = 0$ (संभव नहीं)

इसलिए:, $x = 0$ और $z \neq 0$

इसी प्रकार, y का कोई भी वास्तविक मान हो सकता है। इसीलिए, अपरिमित रूप से अनेक हल।

उदाहरण 33 $\sin\frac{\pi}{5} + i(1-\cos\frac{\pi}{5})$ का कोणांक है

(A) $\frac{2\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{15}$ (D) $\frac{\pi}{10}$

हल (D), यहाँ $r\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ तथा $r\sin\theta = 1-\cos\frac{\pi}{5}$

इसलिए, $$\tan\theta = \frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$\Rightarrow$ $$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{10} \text{ अर्थात् } \theta = \frac{\pi}{10}$$

5.4 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

1. एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $(1-i)^n\left(1-\frac{1}{i}\right)^n$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n+1})$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

3. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x + iy$, तो (x, y) ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$, तो $x + y$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a + ib$ है, तो (a, b) ज्ञात कीजिए।

6. यदि $a = \cos\theta + i\sin\theta$ है, तो $\frac{1+a}{1-a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $(1 + i)z = (1 - i)\bar{z}$ है, तो दर्शाइए कि $z = -i\bar{z}$

8. यदि $z = x + iy$, तो दर्शाइए कि $z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + b = 0$ जहाँ $b \in \mathbf{R}$, एक वृत्त निरूपित करता है।

9. यदि $\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1}$ का वास्तविक भाग 4 है, तो दर्शाइए कि z को निरूपित करने वाले बिंदु का बिंदु पथ सम्मिश्र तल में एक वृत्त है।

10. दर्शाइए कि प्रतिबंध $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या z एक वृत्त पर स्थित है।

11. समीकरण $|z| = z + 1 + 2i$ को हल कीजिए।

दीर्घ उत्तर प्रश्न (LA)

12. यदि $|z+1| = z + 2\,(1 + i)$ है, तो z ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\arg\,(z - 1) = \arg\,(z + 3i)$ है, तो $x - 1 : y$. ज्ञात कीजिए, जहाँ $z = x + iy$

14. दर्शाइए कि $\left|\dfrac{z-2}{z-3}\right| = 2$ एक वृत्त निरूपित करता है। इसकी केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\dfrac{z-1}{z+1}$ एक शुद्धत: काल्पनिक संख्या है $(z \neq -1)$, तो $|z|$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि z_1 और z_2 दो ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं ताकि $|z_1| = |z_2|$ और $\arg\,(z_1) + \arg\,(z_2) = \pi$, तो दर्शाइए कि $z_1 = -\bar{z}_2$

17. यदि $|z_1| = 1$ $(z_1 \neq -1)$ और $z_2 = \dfrac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$, तो दर्शाइए कि z_2 का वास्तविक भाग शून्य है।

18. यदि z_1, z_2 और z_3, z_4 संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के दो युग्म हैं, तब

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_4}\right) + \arg\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)$ ज्ञात कीजिए।

19. यदि $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$, तो दर्शाइए कि

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right|$$

20. यदि सम्मिश्र संख्या z_1 और z_2 के लिए, $\arg\,(z_1) - \arg\,(z_2) = 0$, तब दर्शाइए कि $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$

21. समीकरणों के निकाय $\text{Re}\,(z^2) = 0$, $|z| = 2$ को हल कीजिए।

22. समीकरण $z + \sqrt{2}\ |(z + 1)| + i = 0$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या ज्ञात कीजिए।

23. सम्मिश्र संख्या $z = \dfrac{1-i}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ को ध्रुवीय रूप में लिखिए।

24. यदि z और w दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $|zw| = 1$ और $\arg\,(z) - \arg\,(w) = \dfrac{\pi}{2}$, तो दर्शाइए कि $\bar{z}\,w = -i$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

25. *निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:*

(i) किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 और किन्हीं वास्तविक संख्याओं a, b, के लिए, $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 =$ .....

(ii) $\sqrt{-25} \times \sqrt{-9}$ का मान ....है।

(iii) संख्या $\dfrac{(1-i)^3}{1-i^3}$ .... के बराबर है

(iv) श्रेणी $i + i^2 + i^3 + \ldots$ का 1000 पदों तक का योग ....है।

(v) $1 + i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम .... है।

(vi) यदि z_1 और z_2 ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $z_1 + z_2$ एक वास्तविक संख्या है, तो $z_2 =$ ....

(vii) $\arg(z) + \arg \bar{z}$ $(\bar{z} \neq 0)$ .... है।

(viii) यदि $|z+4| \leq 3$ तो $|z+1|$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ..... एवं .... हैं।

(ix) यदि $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right| = \dfrac{\pi}{6}$ है, तो z का बिंदु पथ .... है।

(x) यदि $|z| = 4$ और $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}$, तो $z =$ ....

26. *बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है*

(i) सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में क्रम संबंध परिभाषित है।

(ii) एक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या का $-i$ से गुणन उस सम्मिश्र संख्या द्वारा निरूपित बिंदु का मूल बिंदु के परित वामावर्त दिशा में एक समकोण पर घूर्णन कर देता है।

(iii) किसी भी सम्मिश्र संख्या z के लिए, $|z| + |z-1|$ का कम से कम मान 1 है।

(iv) $|z-1| = |z-i|$ को निरूपित करने वाला बिंदु पथ (1, 0) और (0, 1) को मिलाने वाली रेखा पर एक लंब रेखा है।

(v) यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है कि $z \neq 0$ और $\text{Re}(z) = 0$, तो $\text{Im}(z^2) = 0$

(vi) असमिका $|z-4| < |z-2|$ असमिका $x > 3$ से प्रदत्त क्षेत्र को निरूपित करती है।

(vii) मान लीजिए कि z_1 और z_2 दो ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ तब $\arg(z_1 - z_2) = 0$

(viii) 2 एक सम्मिश्र संख्या है।

27. *स्तंभ* A *और स्तंभ* B *के कथनों का सही मिलान कीजिए:*

स्तंभ A	**स्तंभ B**
(a) $i+\sqrt{3}$ का ध्रुवीय रूप है	(i) (−2, 0) और (2, 0) को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक
(b) $-1+\sqrt{-3}$ का कोणांक है	(ii) केंद्र (0, −4) और त्रिज्या 3 इकाई वाले वृत्त पर या उसके बाहर
(c) यदि $\|z+2\|=\|z-2\|$, तो z का बिंदु पथ है	(iii) $\frac{2\pi}{3}$
(d) यदि $\|z+2i\|=\|z-2i\|$, तो z का बिंदुपथ है	(iv) (0,−2) और (0, 2) को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक
(e) $\|z+4i\|\geq 3$ से निरूपित क्षेत्र है	(v) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
(f) $\|z+4\|\leq 3$ से निरूपित क्षेत्र है	(vi) केंद्र (−4, 0) और त्रिज्या 3 मात्रक वाले वृत्त पर या उसके अंदर
(g) $\frac{1+2i}{1-i}$ का संयुग्मी किस चतुर्थांश में स्थित है	(vii) प्रथम चतुर्थांश
(h) $1-i$ का व्युत्क्रम किस चतुर्थांश में स्थित है	(viii) तीसरा चतुर्थांश

28. $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ का संयुग्मी क्या है?

29. यदि $|z_1|=|z_2|$ तब क्या $z_1=z_2$ होना आवश्यक है?

30. यदि $\frac{(a^2+1)^2}{2a-i}=x+iy$ तो x^2+y^2 का क्या मान है?

31. z ज्ञात कीजिए, यदि $|z|=4$ और $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

32. $\left|(1+i)\dfrac{(2+i)}{(3+i)}\right|$ ज्ञात कीजिए।

33. $(1+i\sqrt{3})^2$ का मुख्य कोणांक ज्ञात कीजिए।

34. यदि $\left|\dfrac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$, तो z कहाँ स्थित है?

प्रश्न 35 *से* 50 *तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए* (M.C.Q):

35. निम्नलिखित में से किसके लिए, $\sin x + i\cos 2x$ और $\cos x - i\sin 2x$ परस्पर संयुग्मी हैं

(A) $x = n\pi$ (B) $x = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}$

(C) $x = 0$ (D) x का कोई मान नहीं

36. α का वह वास्तविक मान, जिसके लिए व्यंजक $\dfrac{1-i\sin\alpha}{1+2i\sin\alpha}$ शुद्धत: वास्तविक है, निम्नलिखित में से कौन सा है:

(A) $(n+1)\dfrac{\pi}{2}$ (B) $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

(C) $n\pi$ (D) इनमें से कोई नहीं, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

37. यदि $z = x + iy$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो $\dfrac{\bar{z}}{z}$ भी तीसरे चतुर्थांश में स्थित होगा, यदि

(A) $x > y > 0$ (B) $x < y < 0$

(C) $y < x < 0$ (D) $y > x > 0$

38. $(z + 3)(\bar{z} + 3)$ का मान निम्नलिखित में से किसके समतुल्य है

(A) $|z+3|^2$ (B) $|z-3|$

(C) $z^2 + 3$ (D) इनमें से कोई नहीं

39. यदि $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^x = 1$, तो

(A) $x = 2n+1$ (B) $x = 4n$

(C) $x = 2n$ (D) $x = 4n + 1$, जहाँ $n \in \mathrm{N}$

40. x का एक वास्तविक मान समीकरण $\left(\dfrac{3-4ix}{3+4ix}\right) = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ को संतुष्ट करता है,

यदि $\alpha^2 + \beta^2 =$

(A) 1 (B) – 1 (C) 2 (D) – 2

41. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, निम्नलिखित में से कौन सही है?

(A) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (B) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1).\arg(z_2)$

(C) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (D) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

42. यदि सम्मिश्र संख्या $2 - i$ से निरूपित बिंदु को मूलबिंदु के प्रति दक्षिणावर्त दिशा में एक कोण $\frac{\pi}{2}$ पर घुमाया जाए, तो उस बिंदु की नयी स्थिति होगी

(A) $1 + 2i$ (B) $-1 - 2i$ (C) $2 + i$ (D) $-1 + 2i$

43. मान लीजिए कि $x, y \in \mathbf{R}$, तो $x + iy$ एक अवास्तविक सम्मिश्र संख्या है, यदि

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x \neq 0$ (D) $y \neq 0$

44. यदि $a + ib = c + id$, तो

(A) $a^2 + c^2 = 0$ (B) $b^2 + c^2 = 0$

(C) $b^2 + d^2 = 0$ (D) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

45. प्रतिबंध $\left|\frac{i+z}{i-z}\right|$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या स्थित होगी:

(A) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर (B) x-अक्ष पर

(C) y-अक्ष पर (D) रेखा $x + y = 1$ पर

46. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तो

(A) $|z^2| > |z|^2$ (B) $|z^2| = |z|^2$

(C) $|z^2| < |z|^2$ (D) $|z^2| \geq |z|^2$

47. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ संभव है, यदि

(A) $z_2 = \overline{z_1}$ (B) $z_2 = \frac{1}{z_1}$

(C) $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ (D) $|z_1| = |z_2|$

48. θ का वह वास्तविक मान, जिसके लिए $\dfrac{1+i\cos\theta}{1-2i\cos\theta}$ एक वास्तविक संख्या है, निम्नलिखित में से कौन सा है:

(A) $n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ (B) $n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{4}$

(C) $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. जब $x<0$ तो $\arg(x)$ का मान है

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{2}$

(C) π (D) इनमें से कोई नहीं

50. यदि $f(z)=\dfrac{7-z}{1-z^2}$ जहाँ $z=1+2i$, तो $|f(z)|$ है

(A) $\dfrac{|z|}{2}$ (B) $|z|$

(C) $2|z|$ (D) इनमें से कोई नहीं।

अध्याय 6

रैखिक असमिकाएँ

6.1 समग्र अवलोकन (Overview)

6.1.1 एक कथन जिसमें '>', '<', '≥', '≤' के चिह्न प्रयुक्त होते हैं; असमिका कहलाती है। उदाहरणत: $5 > 3$, $x \le 4$, $x + y \ge 9$.

(i) जिन असमिकाओं में चर सम्मिलित नहीं होते उन्हें संख्यांक असमिकाएँ कहते हैं। उदाहरणत: $3 < 8$, $5 \ge 2$.

(ii) जिन असमिकाओं में चर सम्मिलित होते हैं उन्हें शाब्दिक (चरांक) असमिका कहते हैं। उदाहणत: $x > 3$, $y \le 5$, $x - y \ge 0$.

(iii) किसी असमिका में एक से अधिक चर हो सकते हैं और यह असमिका रैखिक, द्विघातीय अथवा त्रिघातीय इत्यादि हो सकती है। उदाहरणत: $3x - 2 < 0$ एक चर वाली रैखिक असमिका है, $2x + 3y \ge 4$ दो चर वाली रैखिक असमिका है और $x^2 + 3x + 2 < 0$ एक चर वाली द्विघातीय असमिका है।

(iv) ऐसी असमिकाएँ जिनमें '>' अथवा '<' प्रयुक्त होते हैं, दृढ़ असमिकाएँ कहलाती हैं। उदाहरणत: $3x - y > 5$, $x < 3$.

(v) जिस असमिका में '≥' अथवा '≤' चिह्न प्रयुक्त होते हैं उसे शिथिल असमिका कहते हैं। उदाहरणत: $3x - y \ge 5$, $x \le 5$.

6.1.2 *असमिका का हल*

(i) चर का वह मान (अथवा चरों के वे मान) जो दी हुई असमिका को एक सत्य कथन बनाता हो (बनाते हों), उस असमिका का हल कहलाता है। किसी असमिका के सभी हलों का समुच्चय उस असमिका का हल समुच्चय कहलाता है। उदाहरणत: असमिका $x - 1 \ge 0$ के अनंत हल हैं क्योंकि एक के बराबर अथवा अधिक मान वाली वास्तविक संख्याएँ इस असमिका को एक सत्य कथन बनाती हैं। **R** के अंतर्गत असमिका $x^2 + 1 < 0$ का कोई हल नहीं है क्योंकि x का कोई भी वास्तविक मान इसे एक सत्य कथन नहीं बनाता है।

एक असमिका को हल करने के लिए हम :

(i) उसके दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ सकते हैं अथवा दोनों पक्षों से समान संख्या घटा सकते हैं। ऐसा करने पर असमिका का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है।

(ii) उसके दोनों पक्षों को समान धनात्मक संख्या से गुणा (भाग) कर सकते हैं। ऐसा करने पर भी असमिका चिह्न परिवर्तित नहीं होता है। तथापि असमिका के दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है अर्थात, '>' का चिह्न '<' के चिह्न में परिवर्तित हो जाता है और विलोमत:

6.1.3 एक चर वाली रैखिक असमिका के हल का संख्या रेखा पर निरूपण

एक चर वाली रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए हम निम्नलिखित परिपाटियों (प्रथाओं) का उपयोग करते हैं:

(i) यदि असमिका में '≥' अथवा '≤', के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संख्या रेखा पर एक छायांकित वृत्त (•) बनाते हैं जो यह सूचित करता है कि छायांकित वृत्त के संगत संख्या हल समुच्चय में सम्मिलित है।

(ii) यदि असमिका में '>' अथवा '<' के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संख्या रेखा पर एक वृत्त (O) बनाते हैं जो यह सूचित करता है कि वृत्त के संगत संख्या हल समुच्चय में सम्मिलित नहीं है।

6.1.4 रैखिक असमिका के हल का आलेखीय निरूपण

(a) एक अथवा दो चरों वाली रैखिक असमिका के हल का किसी तल में आलेखीय निरूपण करने के लिए हम निम्नानुसार बढ़ते हैं:

  (i) यदि असमिका में '≥' अथवा '≤', के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संबंधित रेखा के आलेख को एक मोटी रेखा के रूप में खींचते हैं जो यह सूचित करता है कि रेखा के बिंदु हल समुच्चय में सम्मिलित हैं।

  (ii) यदि असमिका में '>' अथवा '<' के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संबंधित रेखा के आलेख को बिंदुकित रेखा के रूप में खींचते हैं जो यह सूचित करता है कि रेखा के बिंदु हल समुच्चय में सम्मिलित नहीं हैं।

(b) एक चर वाली रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा एवं तल दोनों ही पर निरूपित किया जा सकता है परंतु $ax + by > c$, $ax + by \geq c$, $ax + by < c$ अथवा $ax + by \leq c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) के जैसी दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं के हल को केवल एक तल पर ही निरूपित किया जा सकता है।

(c) दो अथवा अधिक असमिकाएँ मिलकर असमिका निकाय बनाती हैं और इस असमिका निकाय का हल निकाय में सम्मिलित सभी असमिकाओं का उभयनिष्ठ हल होता है।

6.1.5 दो महत्त्वपूर्ण नियम

(a) यदि $a, b \in \mathbf{R}$ एवं $b \neq 0$, हो तो

  (i) $ab > 0$ अथवा $\dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a$ तथा b के चिह्न समान होते हैं।

  (ii) $ab < 0$ अथवा $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow a$ तथा b के चिह्न एक दूसरे के विपरीत होते हैं।

(b) यदि a कोई भी धनात्मक वास्तविक संख्या है, अर्थात $a > 0$, तो

  (i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

  (ii) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ अथवा $x > a$
  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ अथवा $x \geq a$

6.2 हल किए हुए उदारहण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 असमिका $3x - 5 < x + 7$ को हल कीजिए जहाँ

(i) x एक प्राकृतिक संख्या है (ii) x एक पूर्ण संख्या है

(iii) x एक पूर्णांक है (iv) x एक वास्तविक संख्या है

हल $3x - 5 < x + 7$

$\Rightarrow$ $3x < x + 12$ (दोनों पक्षों पर 5 जोड़ने पर)

$\Rightarrow$ $2x < 12$ (दोनों पक्षों से x घटाने पर)

$\Rightarrow$ $x < 6$ (दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर)

(i) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(ii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(iii) $\{....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(iv) $\{x : x \in \mathbf{R}$ और $x < 6\}$ हल समुच्चय हैं, अर्थात, 6 से छोटी सभी वास्तविक संख्याएँ हल समुच्चय में सम्मिलित हैं।

उदाहरण 2 $\dfrac{x-2}{x+5} > 2$ को हल कीजिए

हल $\dfrac{x-2}{x+5} > 2$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x-2}{x+5} - 2 > 0$ [दोनों पक्षों से 2 घटाने पर]

$\Rightarrow$ $\dfrac{-(x+12)}{x+5} > 0$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x+12}{x+5} < 0$ [दोनों पक्षों को -1 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow$ $x + 12 > 0$ और $x + 5 < 0$ [क्योंकि $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow a$ तथा b के विपरीत चिह्न हैं]

अथवा

$x + 12 < 0$ और $x + 5 > 0$

$\Rightarrow$ $x > -12$ और $x < -5$

अथवा

$x < -12$ और $x > -5$ (असंभव)

इसलिए $-12 < x < -5$, अर्थात्, $x \in (-12, -5)$

उदाहरण 3 $|3-4x| \geq 9$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $|3-4x| \geq 9$

$\Rightarrow$ $3-4x \leq -9$ या $3-4x \geq 9$ [क्योंकि $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ अथवा $x \geq a$]

$\Rightarrow$ $-4x \leq -12$ या $-4x \geq 6$

$\Rightarrow$ $x \geq 3$ या $x \leq \dfrac{-3}{2}$ [दोनों पक्षों को -4 से भाग करने पर]

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, \dfrac{-3}{2}] \cup [3, \infty)$

उदाहरण 4 $1 \leq |x-2| \leq 3$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि, $1 \leq |x-2| \leq 3$

$\Rightarrow$ $|x-2| \geq 1$ और $|x-2| \leq 3$

$\Rightarrow$ $(x-2 \leq -1$ या $x-2 \geq 1)$ और $(-3 \leq x-2 \leq 3)$

$\Rightarrow$ $(x \leq 1$ या $x \geq 3)$ एवं $(-1 \leq x \leq 5)$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ और $x \in [-1, 5]$

दोनों असमिकाओं के हलों को सम्मिलित करने पर

$x \in [-1, 1] \cup [3, 5]$

उदाहरण 5 किसी उत्पाद के लागत फलन एवं राजस्व फलन क्रमशः $C(x) = 20x + 4000$ एवं $R(x) = 60x + 2000$ हैं जहाँ x निर्मित की गईं एवं बेची गईं वस्तुओं की संख्या है। कुछ लाभ अर्जित करने के लिए कितनी वस्तुएँ अवश्य बेची जानी चाहिए?

हल हम जानते हैं कि, लाभ = राजस्व – लागत

$$= (60x + 2000) - (20x + 4000)$$
$$= 40x - 2000$$

कुछ लाभ अर्जित करने के लिए, $40x - 2000 > 0$

$\Rightarrow$ $x > 50$

अतः कुछ लाभ अर्जित करने के लिए निर्माता को 50 से अधिक वस्तुएँ बेचनी चाहिए

उदाहरण 6 $|x+1| + |x| > 3$ को x के लिए हल कीजिए।

हल दी हुई असमिका के बाएँ पक्ष में दो पद ऐसे हैं जिनमें मापांक (Modulus) का प्रतीक अंतर्विष्ट हैं। मापांक के अंदर वाले व्यंजक को शून्य के बराबर रखने पर हमें $x = -1, 0$ क्रांतिक बिंदुओं के रूप में प्राप्त होते हैं। ये क्रांतिक बिंदु वास्तविक रेखा को तीन भागों में $(-\infty, -1), [-1, 0), [0, \infty)$ में विभाजित करते हैं।

स्थिति (केस)-I जब $-\infty < x < -1$

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow -x-1-x > 3 \Rightarrow x < -2.$$

स्थिति (केस)-II जब $-1 \leq x < 0$,

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow x+1-x > 3 \Rightarrow 1 > 3 \qquad \text{(असंभव)}$$

स्थिति (केस)-III जब $0 \leq x < \infty$,

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow x+1+x > 3 \Rightarrow x > 1.$$

(I), (II) एवं (III) के परिणामों को सम्मिलित करने पर

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 7 $\dfrac{|x+3| + x}{x+2} > 1$ को x के लिए हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि, $\dfrac{|x+3| + x}{x+2} > 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+3| + x}{x+2} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+3| - 2}{x+2} > 0$$

अब दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

स्थिति (केस) I जब $x+3 \geq 0$, अर्थात् $x \geq -3$ तब

$$\frac{|x+3| - 2}{x+2} > 0 \Rightarrow \frac{x+3-2}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+2} > 0$$

$\Rightarrow \quad \{(x+1) > 0$ और $x+2 > 0\}$ या $\{x+1 < 0$ एवं $x+2 < 0\}$

$\Rightarrow \quad \{x > -1$ और $x > -2\}$ या $\{x < -1$ और $x < -2\}$

$\Rightarrow \quad x > -1$ या $x < -2$

$\Rightarrow \quad x \in (-1, \infty)$ या $x \in (-\infty, -2)$

$\Rightarrow \quad x \in (-3, -2) \cup (-1, \infty)$ [क्योंकि $x \geq -3$] ... (1)

स्थिति (केस) II जब $x + 3 < 0$, अर्थात् $x < -3$

$$\frac{|x+3|-2}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x-3-2}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(x+5)}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+5}{x+2} < 0$$

$\Rightarrow$ $(x + 5 < 0$ और $x + 2 > 0)$ या $(x + 5 > 0$ और $x + 2 < 0)$

$\Rightarrow$ $(x < -5$ और $x > -2)$ या $(x > -5$ और $x < -2)$

यह असंभव है

इसलिये $x \in (-5, -2)$ ... (2)

(I) तथा (II) को सम्मिलित करने पर

$x \in (-5, -2) \cup (-1, \infty)$ अभीष्ट हल के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए:

$$\frac{x}{2x+1} \geq \frac{1}{4}, \ \frac{6x}{4x-1} < \frac{1}{2}$$

हल प्रथम असमिका से या $\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{4} \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x-1}{2x+1} \geq 0$$

$\Rightarrow$ $(2x - 1 \geq 0$ और $2x + 1 > 0)$ या $(2x - 1 \leq 0$ और $2x + 1 < 0)$

$\Rightarrow$ $(x \geq \frac{1}{2}$ और $x > -\frac{1}{2})$ या $(x \leq \frac{1}{2}$ और $x < -\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ $x \geq \frac{1}{2}$ या $x < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \infty)$ ... (1)

दूसरी असमिका से $\frac{6x}{4x-1} - \frac{1}{2} < 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x+1}{4x-1} < 0$$

$\Rightarrow$ $(8x + 1 < 0$ और $4x - 1 > 0)$ या $(8x + 1 > 0$ और $4x - 1 < 0)$

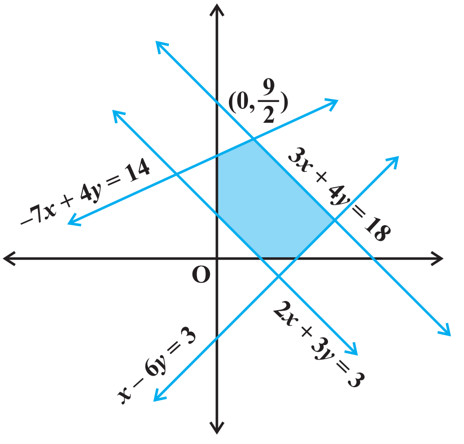
$\Rightarrow$ $(x < -\frac{1}{8}$ और $x > \frac{1}{4})$ या $(x > -\frac{1}{8}$ या $x < \frac{1}{4})$

(यह असंभव है)

$\Rightarrow$ $x \in (-\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ ... (2)

ध्यान दीजिए (1) और (2) का उभयनिष्ठ हल रिक्त समुच्चय है। अतः दिए हुए असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 9 ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे दी गई आकृति का छायांकित भाग है।



आकृति 6.1

हल

(i) $2x + 3y = 3$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु (0, 0) इस रेखा की विपरीत ओर स्थित हैं। मूल बिन्दु (0, 0) असमिका $2x + 3y \le 3$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $2x + 3y = 3$ के संगत असमिका $x + 3y \ge 3$ होनी चाहिए।

(ii) $3x + 4y = 18$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु (0, 0) उस रेखा के एक ही तरफ स्थित है और बिंदु (0,0) असमिका $3x + 4y \le 18$ को संतुष्ट करता है। इसलिए $3x + 4y \le 18$, रेखा $3x + 4y = 18$, की संगत असमिका है।

(iii) $-7x + 4y = 14$ पर विचार कीजिए। आकृति को देखकर यह स्पष्ट है कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु इस रेखा के एक ही ओर स्थित है और बिंदु (0, 0) असमिका $-7x + 4y \le 14$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $-7x + 4y = 14$ की संगत असमिका $-7x + 4y \le 14$ है।

(iv) $x - 6y = 3$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु इस रेखा के एक ही दिशा में स्थित हैं और बिंदु (0, 0) असमिका $x - 6y \le 3$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $x - 6y = 3$ की संगत असमिका $x - 6y \le 3$ है।

(v) यह भी ध्यान दीजिए कि छायांकित क्षेत्र केवल प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं इसलिए $x \ge 0, y \ge 0$.

अतः (i), (ii), (iii), (iv) एवं (v) से दिये हुए हल समुच्चय के संगत निम्नलिखित रैखिक असमिकाएँ प्राप्त होती हैं:

$2x + 3y \ge 3,\ 3x + 4y \le 18,\ -7x + 4y \le 14,$
$x - 6y \le 3,\ x > 0,\ y \ge 0$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

10 से 13 तक के उदाहरणों में से प्रत्येक में दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.):

उदाहरण 10 यदि $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$, तो

(A) $x \in [2, \infty)$ (B) $x \in (2, \infty)$ (C) $x \in (-\infty, 2)$ (D) $x \in (-\infty, 2]$

हल सही विकल्प (B) है। क्योंकि $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ के लिए $|x-2| \geq 0$, और $x - 2 \neq 0$

उदाहरण 11 एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई का तीन गुना है। यदि आयत का न्यूनतम परिमाप 160 सेमी है, तो

(A) चौड़ाई > 20 सेमी (B) लंबाई < 20 सेमी

(C) चौड़ाई $x \geq 20$ सेमी (D) लंबाई ≤ 20 सेमी

हल (C) सही विकल्प है। क्योंकि यदि चौड़ाई x सेमी है तो

$$2(3x + x) \geq 160 \Rightarrow x \geq 20$$

उदाहरण 12 x चर वाले असमिका निकाय के हल को नीचे प्रदर्शित संख्या रेखाओं पर निरूपित किया गया है, तो

आकृति 6.2

(A) $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ (B) $x \in [-3, 1]$

(C) $x \in (-\infty, -4) \cup [3, \infty)$ (D) $x \in [-4, 3]$

हल (A) सही विकल्प है।

असमिकाओं का उभयनिष्ठ हल ($-\infty$ से -4 तक) और 3 से ∞ तक है।

उदाहरण 13 यदि $|x+3| \geq 10$, तो

(A) $x \in (-13, 7]$ (B) $x \in (-13, 7)$

(C) $x \in (-\infty, -13] \cup [7, \infty)$ (D) $x \in [-\infty, -13] \cup [7, \infty)$

हल (C) सही विकल्प है क्योंकि $|x+3| \geq 10$,

$\Rightarrow \quad x + 3 \leq -10$ या $x + 3 \geq 10$

$\Rightarrow \quad x \leq -13$ या $x \geq 7$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -13] \cup [7, \infty)$

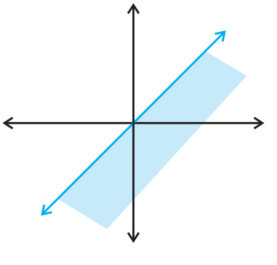
उदाहरण 14 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा असत्य है?

(i) यदि $x > y$ और $b < 0$, तो $bx < by$

(ii) यदि $xy > 0$, तो $x > 0$, और $y < 0$

(iii) यदि $xy < 0$, तो $x > 0$, और $y > 0$

(iv) यदि $x > 5$ और $x > 2$, तो $x \in (5, \infty)$

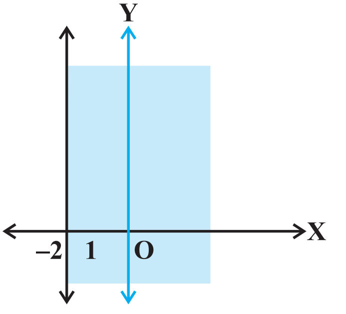


आकृति 6.3

(v) यदि $|x| < 5$, तो $x \in (-5, 5)$

(vi) $x > -2$ का आलेख आकृति 6.4 है।

(vii) $x - y \leq 0$ का हल समुच्चय आकृति 6.3 है।



आकृति 6.4

हल

(i) सत्य, क्योंकि किसी भी असमिका के दोनों पक्षों को ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(ii) असत्य, क्योंकि दो संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है जब उन दोनों संख्याओं के चिह्न समान होते हैं।

(iii) असत्य, क्योंकि दो संख्याओं का गुणनफल ऋणात्मक होता हैं जब उन दोनों संख्याओं के चिह्न विपरीत होते हैं।

(iv) सत्य

(v) सत्य, क्योंकि $|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow x \in (-5, 5)$

(vi) असत्य, क्योंकि $x > -2$ के लिए रेखा $x = -2$ को बिन्दुकित होना चाहिए अर्थात् अभीष्ट क्षेत्र में रेखा $x = -2$ के बिंदु सम्मिलित नहीं हैं।

(vii) असत्य, क्योंकि बिंदु $(1, 0)$ दी हुई असमिका को संतुष्ट नहीं करता है और यह छायांकित भाग का एक बिंदु है।

उदाहरण 15 निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) यदि $x \geq -3$, तो $x + 5$ 2

(ii) यदि $-x \leq -4$, तो $2x$ 8

(iii) यदि $\dfrac{1}{x-2} < 0$, तो x 2

(iv) यदि $a < b$ और $c < 0$, तो $\dfrac{a}{c}$...........$\dfrac{b}{c}$

(v) यदि $|x-1| \leq 2$, तो -1..... x 3

(vi) यदि $|3x - 7| > 2$, तो x .... $\dfrac{5}{3}$ या x 3

(vii) यदि $p > 0$ एवं $q < 0$, तो $p + q$ ... p

हल

(i) ($\geq$), क्योंकि असमिका के चिह्न को परिवर्तित किये बिना उसके दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी जा सकती है।

(ii) ($\geq$), क्योंकि दोनों पक्षों को -2 से गुणा करने के पश्चात् असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(iii) (<), क्योंकि यदि $\frac{a}{b} < 0$ और $a > 0$, तो $b < 0$

(iv) (>), क्योंकि दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(v) (≤, ≤), $|x-1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$

(vi) (<, >), $|3x-7| > 2 \Rightarrow 3x-7 < -2$ या $3x-7 > 2$

$\Rightarrow x < \frac{5}{3}$ या $x > 3$

(vii) (<), क्योंकि p धनात्मक है और q ऋणात्मक है, इसलिए $p+q$ हमेशा p से छोटा है।

6.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक की असमिकाओं को x के लिए हल कीजिए:

1. $\frac{4}{x+1} \le 3 \le \frac{6}{x+1}, (x > 0)$ **2.** $\frac{|x-2|-1}{|x-2|-2} \le 0$ 3. $\frac{1}{|x|-3} \le \frac{1}{2}$

4. $|x-1| \le 5, \ |x| \ge 2$ **5.** $-5 \le \frac{2-3x}{4} \le 9$

6. $4x+3 \ge 2x+17, \ 3x-5 < -2$

7. कैसेट बनाने वाली किसी कंपनी के लागत एवं राजस्व फलन क्रमशः $C(x) = 26{,}000 + 30x$ एवं $R(x) = 43x$ है, जहाँ x एक सप्ताह में निर्मित किए गए एवं बेचे गए कैसेटों की संख्या है। कुछ लाभ अर्जित करने के लिए कंपनी द्वारा कितनी कैसेट अवश्य बेचे जाने चाहिए?

8. किसी तालाब के पानी की अम्लता सामान्य तब मानी जाती है जब प्रतिदिन के तीन मापों की औसत pH पाठ्यांक 8.2 एवं 8.5 के मध्य रहता है। यदि प्रथम दो pH पाठ्यांक 8.48 एवं 8.35 हैं तो तीसरी पाठ्यांक के pH मान का परिसर (रेंज) ज्ञात कीजिए ताकि तालाब के पानी की अम्लता सामान्य रहे।

9. 9% अम्ल वाले किसी विलयन को हल्का करने के लिए उसमें 3% अम्ल वाला विलयन मिलाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त मिश्रण में 5% से अधिक एवं 7% से कम अम्ल होना चाहिए। 9% वाले विलयन की मात्रा यदि 460 लीटर है तो ज्ञात कीजिए कि 3% वाले विलयन की कितनी मात्रा मिलाने की आवश्यकता है?

10. किसी विलयन को 40°C एवं 45°C तापमान के बीच ही रखना है। फॉरेनहाइट पैमाने पर तापमान का परिसर (रेंज) ज्ञात कीजिए यदि परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

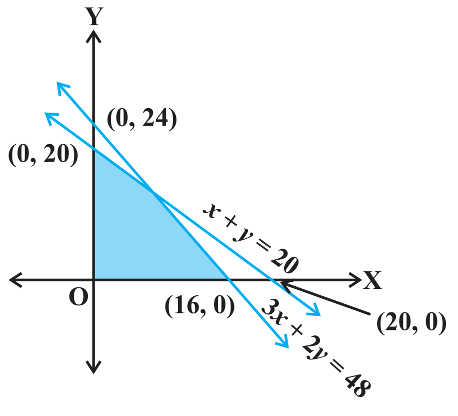
11. किसी त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा से दुगनी है एवं तीसरी भुजा सबसे छोटी भुजा से 2 सेमी अधिक है। यदि त्रिभुज का परिमाप 166 सेमी से अधिक है तो सबसे छोटी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात कीजिए।

12. विश्व का सबसे गहरा छेद करते हुए ज्ञात हुआ कि पृथ्वी की सतह से x किमी नीचे का तापमान T डिग्री सेल्सियस में $T = 30 + 25 (x - 3)$, $3 \le x \le 15$ होता है। ज्ञात कीजिए कि कितनी गहराई पर तापमान 155°C एवं 205°C के मध्य होगा?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

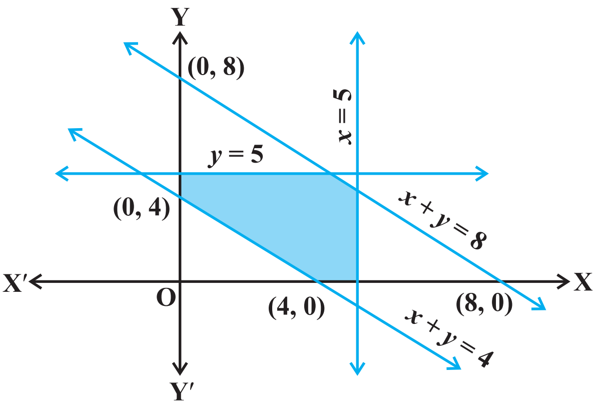
13. निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए: $\dfrac{2x+1}{7x-1} > 5$, $\dfrac{x+7}{x-8} > 2$

14. ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे प्रदर्शित आकृति का छायांकित भाग है।



आकृति 6.5

15. ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे दी हुई आकृति का छायांकित भाग है।



आकृति 6.6

16. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।

$x + 2y \le 3$, $3x + 4y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 1$

17. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को हल कीजिए

$3x + 2y \ge 24$, $3x + y \le 15$, $x \ge 4$

18. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय का हल समुच्चय एक अपरिवद्ध क्षेत्र है।

$2x + y \ge 8$, $x + 2y \ge 10$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

19 *से* 26 *तक के प्रश्नों में प्रत्येक के लिए दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.)

19. यदि $x < 5$, तो

(A) $-x < -5$ (B) $-x \le -5$

(C) $-x > -5$ (D) $-x \ge -5$

20. दिया हुआ है कि x, y, b वास्तविक संख्याएँ हैं और $x < y$, $b < 0$, तब

(A) $\frac{x}{b} < \frac{y}{b}$ (B) $\frac{x}{b} \le \frac{y}{b}$

(C) $\frac{x}{b} > \frac{y}{b}$ (D) $\frac{x}{b} \ge \frac{y}{b}$

21. यदि $-3x + 17 < -13$, तो

(A) $x \in (10, \infty)$ (B) $x \in [10, \infty)$

(C) $x \in (-\infty, 10]$ (D) $x \in [-10, 10)$

22. यदि x वास्तविक संख्या है और $|x| < 3$, तो

(A) $x \ge 3$ (B) $-3 < x < 3$

(C) $x \le -3$ (D) $-3 \le x \le 3$

23. x और b वास्तविक संख्याएँ हैं। यदि $b > 0$ और $|x| > b$, तो

(A) $x \in (-b, \infty)$ (B) $x \in [-\infty, b)$

(C) $x \in (-b, b)$ (D) $x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$

24. यदि $|x-1| > 5$, तो

(A) $x \in (-4, 6)$ (B) $x \in [-4, 6]$

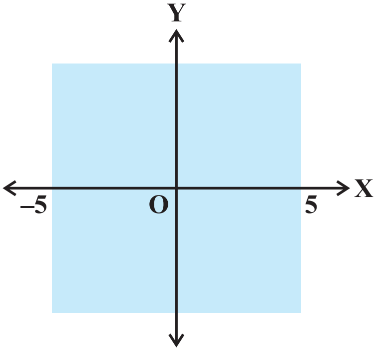
(C) $x \in [-\infty, -4) \cup (6, \infty)$ (D) $x \in [-\infty, -4) \cup [6, \infty)$

25. यदि $|x+2| \le 9$, तो

(A) $x \in (-7, 11)$ (B) $x \in [-11, 7]$

(C) $x \in (-\infty, -7) \cup (11, \infty)$ (D) $x \in (-\infty, -7) \cup [11, \infty)$

26. दिए हुए आलेख को प्रदर्शित करने वाली असमिका निम्नलिखित में से कौन-सी है।



आकृति 6.7

(A) $|x| < 5$ (B) $|x| \le 5$ (C) $|x| > 5$ (D) $|x| \ge 5$

प्रश्न संख्या 27 से 30 तक में x चर वाले किसी रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा पर निरूपित किया गया है। प्रत्येक प्रश्न में दिए हुये चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.).

27. (A) $x \in (-\infty, 5)$ (B) $x \in (-\infty, 5]$
(C) $x \in [5, \infty,)$ (D) $x \in (5, \infty)$

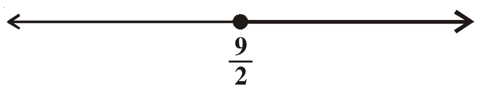
आकृति 6.8

28. (A) $x \in (\frac{9}{2}, \infty)$

(B) $x \in [\frac{9}{2}, \infty)$

(C) $x \in [-\infty, \frac{9}{2})$

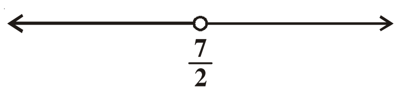
(D) $x \in (-\infty, \frac{9}{2}]$



आकृति 6.9

29. (A) $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$ (B) $x \in (-\infty, \frac{7}{2}]$

(C) $x \in [\frac{7}{2}, -\infty)$ (D) $x \in (\frac{7}{2}, \infty)$



आकृति 6.10

30. (A) $x \in (-\infty, -2)$
(B) $x \in (-\infty, -2]$
(C) $x \in (-2, \infty]$
(D) $x \in [-2, \infty)$

आकृति 6.11

31. बताइए निम्नलिखित कथनों में से कौन-सा सत्य है एवं कौन-सा असत्य है?

(i) यदि $x < y$ और $b < 0$, तो $\frac{x}{b} < \frac{y}{b}$

(ii) यदि $xy > 0$, तो $x > 0$ और $y < 0$

(iii) यदि $xy > 0$, तो $x < 0$ और $y < 0$

(iv) यदि $xy < 0$, तो $x < 0$ और $y < 0$

(v) यदि $x < -5$ और $x < -2$, तो $x \in (-\infty, -5)$

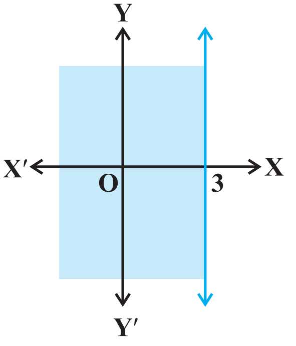
(vi) यदि $x < -5$ और $x > 2$, तो $x \in (-5, 2)$

(vii) यदि $x > -2$ और $x < 9$, तो $x \in (-2, 9)$

(viii) यदि $|x| > 5$, तो $x \in (-\infty, -5) \cup [5, \infty)$

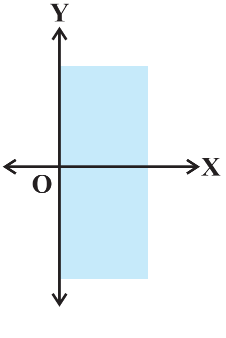
(ix) यदि $|x| \leq 4$, तो $x \in [-4, 4]$

(x) नीचे दी गयी आकृति $x < 3$ के आलेख को निरूपित करता है।



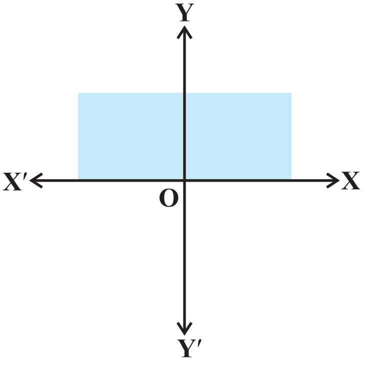
आकृति 6.12

(xi) आकृति 6.13 $x \geq 0$ के आलेख को निरूपित करता है



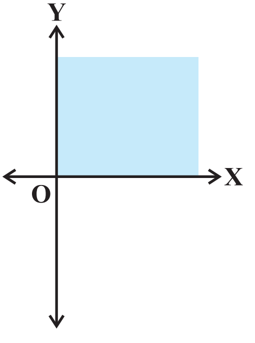
आकृति 6.13

(xii) $y \leq 0$ का आलेख आकृति 6.14 में निरूपित है।



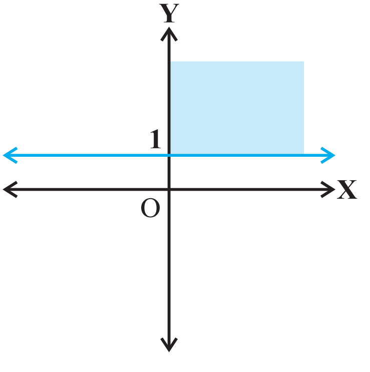
आकृति 6.14

(xiii) $x \geq 0$ और $y \leq 0$ का हल समुच्चय आकृति 6.15 में निरूपित है।



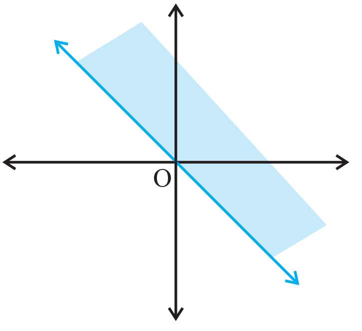
आकृति 6.15

(xiv) $x \geq 0$ और $y \leq 1$ का हल समुच्चय आकृति 6.16 में निरूपित है।



आकृति 6.16

(xv) $x + y \geq 0$ का हल समुच्चय नीचे दी हुई आकृति में है।



आकृति 6.17

32. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) यदि $-4x \geq 12$, तो $x \ldots -3$

(ii) यदि $\dfrac{-3}{4}x \leq -3$, तो $x \ldots 4$

(iii) यदि $\dfrac{2}{x+2} > 0$, तो $x \ldots -2$

(iv) यदि $x > -5$, तो $4x \ldots -20$

(v) यदि $x > y$ और $z < 0$, तो $-xz \ldots -yz$

(vi) यदि $p > 0$ और $q < 0$, तो $p - q \ldots p$

(vii) यदि $|x+2| > 5$, तो $x \ldots -7$ या $x \ldots 3$

(viii) यदि $-2x + 1 \geq 9$, तो $x \ldots -4$

अध्याय 7

क्रमचय और संचय

7.1 समग्र अवलोकन (Overview)

क्रमचय और संचय का अध्ययन दी हुई वस्तुओं में से, बिना उनकी सूची बनाए, कुछ वस्तुएँ लेकर उन्हें व्यवस्थित करने और चुनने की विभिन्न विधियों या प्रकारों की संख्या निर्धारित करने से संबंधित होता है। कुछ मूलभूत गणन तकनीक हैं जो वस्तुओं को व्यवस्थित या चुनने के विभिन्न प्रकारों की संख्या निर्धारित करने में उपयोगी रहती हैं। दो मूलभूत गणन सिद्धांत नीचे दिये जा रहे हैं–

गणन के मूलभूत सिद्धांत

7.1.1 *गुणन सिद्धांत (गणन का मूलभूत सिद्धांत)*

मान लीजिए कि कोई घटना E के घटित होने के विभिन्न प्रकार m हैं तथा E के घटित होने के प्रत्येक प्रकार से जुड़े हुए (या संगत) एक अन्य घटना F के घटित होने के विभिन्न प्रकार n हैं। तब, एक दिये हुए क्रम में दोनों घटनाओं के घटित होने के कुल प्रकारों की संख्या $m \times n$ होती है।

7.1.2 *योग सिद्धांत*

यदि कोई घटना E के घटित होने के विभिन्न प्रकार m हैं तथा घटना F के घटित होने के विभिन्न प्रकार n हैं, तथा मान लीजिए कि ये दोनों घटनाएँ साथ-साथ घटित नहीं हो सकती हैं, तो E या F के घटित होने के कुल प्रकारों की संख्या $m + n$ होती है।

7.1.3 ***क्रमचय :*** क्रमचय वस्तुओं की एक निश्चित क्रम में व्यवस्थता होती है।

7.1.4 ***विभिन्न वस्तुओं का क्रमचय :*** n वस्तुओं में से सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर, उनके क्रमचयों की संख्या ^nP_n निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$^nP_n = \underline{|n}, \qquad \ldots (1)$$

जहाँ $\underline{|n} = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$ है, जिसे क्रमगुणित n या n क्रमगुणित पढ़ते हैं। इसे $n!$ भी लिखते हैं।

n वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर, उनके क्रमचयों की संख्या ^nP_r निम्नलिखित से प्राप्त होती है:

$$^nP_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

जहाँ $0 \le r \le n$ है। हम यह मान लेते हैं कि $\underline{|0} = 1$

7.1.5 *जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति है :* n वस्तुओं में से, सभी को एक साथ लेकर, क्रमचयों की संख्या, जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^n होती है। n वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर क्रमचयों की संख्या, जब वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है।

7.1.6 *क्रमचय जब वस्तुएँ भिन्न-भिन्न नहीं हैं :* n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जब p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की हैं, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की हैं, ..., p_k वस्तुएँ kवें प्रकार की हैं तथा शेष यदि कोई हो तो विभिन्न प्रकारों की हैं, $\dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_k!}$ होती है।

7.1.7 *संचय :* अनेक अवसरों पर, हमारी रुचि व्यवस्थित करने में न होकर केवल n वस्तुओं में से r वस्तुएँ चुनने में ही रहती है। एक संचय दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को चुनना होता है, जहाँ चुनने के क्रम का कोई महत्त्व नहीं होता है। n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ^nC_r निम्नलिखित से दी जाती है:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

टिप्पणियाँ

1. क्रमचय का प्रयोग कीजिए, यदि किसी समस्या में वस्तुओं को व्यवस्थित करने की संख्या ज्ञात करनी है तथा विभिन्न क्रमों को ध्यान में रखा जाना है।
2. संचय का प्रयोग कीजिए, यदि किसी समस्या में वस्तुओं को चुनने के प्रकारों की संख्या ज्ञात करनी है तथा चुनने के क्रम को ध्यान में नहीं रखना है।

7.1.8 कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम

मान लीजिए n और r धनात्मक पूर्णांक हैं, ताकि $r \leq n$ है।

(i) $^nC_r = {^nC_{n-r}}$

(ii) $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

(iii) $n\,{^{n-1}C_{r-1}} = (n-r+1)\,{^nC_{r-1}}$

7.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 किसी कक्षा में 27 लड़के और 14 लड़कियाँ हैं। किसी कार्यक्रम के लिए, कक्षा का प्रतिनिधित्व करने के लिए शिक्षक को 1 लड़के और 1 लड़की का चुनाव करना चाहता है। शिक्षक यह चुनाव कितने प्रकार से कर सकता है?

हल यहाँ शिक्षक को दो संक्रियाएँ करनी हैं:

(i) 27 लड़कों में से 1 लड़का चुनना। (ii) 14 लड़कियों में से 1 लड़की चुनना।

इनमें से पहली 27 विधियों या प्रकारों से तथा दूसरी संक्रिया 14 प्रकारों से की जा सकती है। अतः, गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा, विधियों या प्रकारों की कुल संख्या $= 27 \times 14 = 378$

उदाहरण 2

(i) 99 और 1000 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जिनके इकाई के स्थान पर अंक 7 है?

(ii) 99 और 1000 के बीच ऐसी कितनी संख्याए हैं जिनमें कम से कम एक अंक 7 है?

हल

(i) सर्वप्रथम ध्यान दीजिए कि इन सभी संख्याओं में तीन अंक हैं। इकाई के स्थान पर 7 है। बीच वाला अंक 10 अंकों में से 0 से 9 कोई अंक हो सकता है। सौ के स्थान पर 9 अंकों में से 1 से 9 कोई भी अंक हो सकता है। अतः, गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा 99 और 1000 के बीच $10 \times 9 = 90$ संख्याएँ होंगी जिनके इकाई के स्थान पर 7 होगा।

(ii) तीन अंकों की कुल संख्याएँ जिनमें कम से कम एक अंक 7 है = (तीन अंकों की कुल संख्याएँ) –(तीन अंकों की कुल संख्याएँ जिनमें 7 नहीं है)।

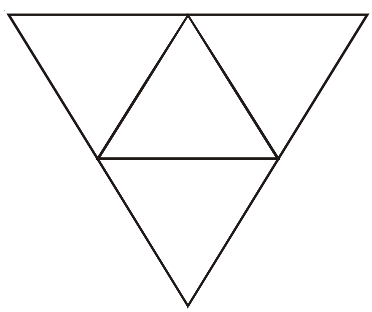
$= (9 \times 10 \times 10) – (8 \times 9 \times 9)$

$= 900 – 648 = 252$

उदाहरण 3 नीचे दिया हुआ आरेख निम्नलिखित दो प्रतिबंधों के अंतर्गत कितने प्रकार से रंगा जा सकता है?

(i) प्रत्येक छोटे त्रिभुज को तीन रंगों लाल, नीला या हरा में से किसी एक रंग से रंगा जाना है।

(ii) किन्हीं दो आसन्न क्षेत्रों में एक ही रंग न हो।



हल ये प्रतिबंध तभी संतुष्ट होते हैं जब हम ठीक इस प्रकार से करते हैं: पहले बीच वाले त्रिभुज को तीनों रंगों में से किसी एक रंग से रंग दीजिए। इसके बाद शेष तीन त्रिभुजों को शेष दो रंगों में से किसी एक रंग से रंग दीजिए।

गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा, इसको रंगने के प्रकारों की कुल संख्या $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$

उदाहरण 4 5 बच्चों को एक पंक्ति में किस प्रकार व्यवस्थित किया जा सकता है, ताकि

(i) दो विशेष बच्चे सदैव साथ-साथ रहें? (ii) दो विशेष बच्चे साथ-साथ कभी न रहें

हल

(i) हम 2 विशेष बच्चों को एक मान कर व्यवस्थाओं पर विचार करते हैं और इसीलिए शेष 4 बच्चे $4! = 24$ प्रकार से व्यवस्थित किये जा सकते हैं। पुनः, ये दोनों विशेष बच्चे परस्पर दो प्रकारों से व्यवस्थित किये जा सकते हैं। अतः, व्यवस्थित करने के कुल प्रकार $24 \times 2 = 48$ हैं।

(ii) पाँच बच्चों के कुल $5! = 120$ क्रमचयों में से 48 में दो विशेष बच्चे सदैव साथ-साथ हैं। अतः, शेष $120 - 48 = 72$ क्रमचयों में ये दोनों विशेष बच्चे कभी भी साथ-साथ नहीं रहेंगे।

उदाहरण 5 यदि शब्द AGAIN के अक्षरों के सभी क्रमचयों को उसी क्रम में व्यवस्थित किया जाये, जैसे कि एक शब्दकोश में आते हैं, तो 49वाँ शब्द क्या है?

हल: अक्षर A से प्रारंभ करने पर, अन्य चार अक्षरों को व्यवस्थित करने के $4! = 24$ प्रकार हैं। ये प्रथम 24 शब्द होंगे। इसके बाद, G से प्रारंभ करते हुए, A, A, I और N को व्यवस्थित करने के प्रकार $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ हैं। ये अगले 12 शब्द हैं। इसके बाद 37वाँ शब्द I से प्रारंभ होगा। I से प्रारंभ करते हुए, यहाँ पुनः 12 शब्द हैं। इससे अब तक कुल 48 शब्द हो जाते हैं। अतः, 49वाँ शब्द NAAGI है।

उदाहरण 6 एक सेल्फ़ पर 3 गणित, 4 इतिहास, 3 रसायन और 2 जैविकी की पुस्तकें कितने प्रकारों से व्यवस्थित की जा सकती हैं यदि एक ही विषय की सभी पुस्तकें एक साथ रहें?

हल सर्वप्रथम हम एक ही विषय की पुस्तकों को एक इकाई मानते हैं। इस प्रकार, यहाँ 4 इकाइयाँ हैं, जिन्हें $4! = 24$ प्रकारों से व्यवस्थित किया जा सकता है। अब प्रत्येक व्यवस्था में, गणित की पुस्तकें $3!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं, इतिहास की पुस्तकें $4!$ प्रकार से, रसायन की पुस्तकें $3!$ प्रकार से तथा जैविकी की पुस्तकें $2!$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अतः, व्यवस्थित करने के कुल प्रकारों की संख्या $= 4! \times 3! \times 4! \times 3! \times 2! = 41472$ है।

उदाहरण 7 किसी विद्यार्थी को 10 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जबकि उसे प्रत्येक भाग A और B में से कम से कम 4 प्रश्न चुनने हैं। यदि भाग A में 6 प्रश्न हैं और भाग B में 7 प्रश्न हैं, तो वह विद्यार्थी कितने प्रकार से 10 प्रश्न चुन सकता है?

हल: संभावनाएँ इस प्रकार हैं:

भाग A में से 4 और भाग B में से 6

या भाग A में से 5 और भाग B में से 5

या भाग A में से 6 और भाग B में से 4

अतः, अभीष्ट प्रकारों की संख्या है:

$$ {}^6C_4 \times {}^7C_6 + {}^6C_5 \times {}^7C_5 + {}^6C_6 \times {}^7C_4 $$
$$ = 105 + 126 + 35 = 266 $$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 8 मान लीजिए कि m पुरुष और n महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाना है कि कोई दो महिलाएँ साथ-साथ न रहें। यदि $m > n$ है, तो दर्शाइए कि उनको बैठाये जाने के प्रकारों की संख्या $\dfrac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$ है।

हल मान लीजिए कि पुरुष (M) अपनी सीट पहले ले लेते हैं। उन्हें ${}^{m}P_{m}$ प्रकार से बैठाया जा सकता है, जैसा कि नीचे दी आकृति में दर्शाया गया है

$$\square \; M \; \square \; M \; \square \; \ldots \; \square \; M \; \square$$

पहला दूसरा mवाँ

उपरोक्त आकृति से आप देख सकते हैं कि महिलाओं के लिए यहाँ $(m + 1)$ स्थान हैं। यह दिया है कि $m > n$ है और कोई दो महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठ सकती हैं। अतः n महिलाएँ अपनी सीट ${}^{(m+1)}P_{n}$ प्रकार से ले सकती हैं और इसीलिये बैठने के कुल प्रकारों की संख्या इस प्रकार हो जिसमें कोई दो महिलाएँ साथ-साथ न बैठें

$$({}^{m}P_{m}) \times ({}^{m+1}P_{n}) = \frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$$

उदाहरण 9 किसी सिनेमा हॉल में तीन दंपत्ती-युग्मों को एक पंक्ति में बैठाना है जिसमें 6 सीटें है। यदि युग्मों को एक दूसरे से अलग बैठना है, तो उन्हें कितने प्रकार से बैठाया जा सकता है? उनके बैठने के प्रकारों की संख्या उस स्थिति के लिए भी ज्ञात कीजिए, जब सभी महिलाएँ एक साथ बैठती हैं।

हल आइए दंपत्ती-युग्मों को S_1, S_2 और S_3 से व्यक्त करें, जहाँ प्रत्येक युग्म को एक एकल इकाई माना गया है, जैसा कि नीचे आकृति में दर्शाया गया है:

$$\square\square \quad \square\square \quad \square\square$$

पहला दूसरा तीसरा

तब युग्मों के बैठने के प्रकारों की संख्या ताकि वे एक दूसरे से अलग बैठें = 3! = 6

पुनः प्रत्येक युग्म परस्पर 2! प्रकारों से बैठ सकता है। अतः, बैठने के कुल प्रकारों की संख्या ताकि युग्म एक-दूसरे से अलग बैठें $= 3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$

पुनः, यदि तीनों महिलाएँ एक साथ बैठती हैं, तो आवश्यक है कि तीनों पुरुषों को एक साथ बैठना होगा। साथ ही, पुरुष और महिलाएँ परस्पर 2! प्रकारों से बैठ सकते हैं। अतः, उन प्रकारों की संख्या जब सभी महिलाएँ एक साथ बैठती हैं $= 3! \times 3! \times 2! = 72$

उदाहरण 10 एक छोटे गाँव में, कुल 87 परिवार हैं जिनमें से 52 परिवारों में अधिकतम 2 बच्चे हैं। एक ग्रामीण विकास योजना में, सहायता के लिए 20 परिवारों का चयन किया जाना है, जिनमें से कम

से कम 18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले होने चाहिए। यह विकल्प कितने प्रकारों से किया जा सकता है?

हल यह दिया है कि 87 परिवारों में से 52 परिवार ऐसे हैं जिनमें अधिकतम 2 बच्चे हैं। अतः, शेष 35 परिवार अन्य प्रकार के हैं। प्रश्नानुसार, ग्रामीण विकास योजना के अंतर्गत 20 परिवार सहायता के लिए चुने जाने हैं, जिनमें कम से कम 18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले होने चाहिए। अतः,संभावित विकल्पों की संख्या निम्नलिखित है:

$^{52}C_{18} \times {}^{35}C_2$ (18 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले और 2 अन्य प्रकार के परिवार)

$^{52}C_{19} \times {}^{35}C_1$ (19 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले और 1 अन्य प्रकार का परिवार)

$^{52}C_{20}$ (सभी 20 परिवार अधिकतम 2 बच्चों वाले)

अतः, संभव विकल्पों की कुल संख्या है

$^{52}C_{18} \times {}^{35}C_2 + {}^{52}C_{19} \times {}^{35}C_1 + {}^{52}C_{20}$

उदाहरण 11 एक लड़के के पास 3 लाइब्रेरी टिकट हैं तथा लाइब्रेरी में उसकी रुचि की 8 पुस्तकें हैं। इन 8 में से वह गणित भाग II तब तक नहीं लेना चाहता जब तक कि गणित भाग–I भी न ले ली जाए। वह लाइब्रेरी से तीन पुस्तकें कितने प्रकार से ले सकता है?

हल आइए निम्नलिखित स्थितियों को लें:

स्थिति (i) वह लड़का गणित भाग–II लेता है। तब, वह गणित भाग–I भी लेगा। अतः, संभव विकल्पों की संख्या $^6C_1 = 6$ है।

स्थिति (ii) वह लड़का गणित भाग–II नहीं लेता है। तब संभव विकल्पों की संख्या $^7C_3 = 35$

अतः, विकल्पों की कुल संख्या $35 + 6 = 41$ है।

उदाहरण 12 n विभिन्न वस्तुओं में r वस्तुएँ एक साथ लेकर क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे दो विशेष वस्तुएँ एक साथ रहें।

हल दो विशेष वस्तुओं वाले एक बंडल को r स्थानों पर $(r-1)$ विधियों से रखा जा सकता है (क्यों?) तथा बंडल की दोनों वस्तुएँ स्वयं $\lfloor 2$ प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अब $(n-2)$ वस्तुएँ $(r-2)$ स्थानों पर $^{n-2}P_{r-2}$, प्रकारों से व्यवस्थित की जाएंगी।

इस प्रकार, गणन के मूलभूत सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, क्रमचयों की वांछित संख्या= $\lfloor 2 \cdot (r-1) \cdot {}^{n-2}P_{r-2}$ होगी।

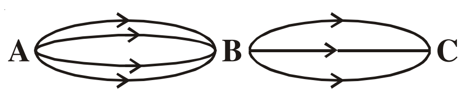
वस्तुनिष्ठ प्रश्न

नीचे दिये हुए उदाहरणों में, उनके सम्मुख दिये चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

उदाहरण 13 A और B के बीच चार बस मार्ग हैं तथा B और C के बीच तीन बस मार्ग हैं। एक व्यक्ति B से होकर A से C तक जाने में बस द्वारा राउंड यात्रा (round trip), अर्थात् आने-जाने की यात्रा कर सकता है। यदि वह एक बस मार्ग का एक से अधिक बार प्रयोग नहीं करना चाहता है, तो वह आने-जाने की यात्रा कितनी विधियों से कर सकता है?

(A) 72 (B) 144 (C) 14 (D) 19

हल (A) सही उत्तर है। नीचे दी आकृति में, A से B तक



4 बस मार्ग हैं और B से C तक 3 मार्ग हैं। अतः, A से C तक जाने के लिए, $4 \times 3 = 12$ प्रकार या विधियाँ हैं। यह आने-जाने की यात्रा है, इसलिए वह व्यक्ति C से A, B से होकर वापस भी जाएगा। यह प्रतिबंध है कि वह C से B और फिर B से A उसी बस मार्ग से यात्रा नहीं कर सकता जिससे वह गया था, अर्थात् वह उसका एक से अधिक बार प्रयोग नहीं कर सकता। अतः, वापसी यात्रा के लिए, $2 \times 3 = 6$ विधियाँ हैं। अतः, वांछित विधियों की कुल संख्या $= 12 \times 6 = 72$.

उदाहरण 14 7 पुरुष और 5 महिलाओं में से 3 पुरुष और 2 महिलाओं वाली एक कमेटी निम्नलिखित में से कितने प्रकार से बनायी जा सकती हैं?

(A) 45 (B) 350 (C) 4200 (D) 230

हल (B) सही उत्तर है। 7 पुरुषों में से 3 पुरुष $^7C_3$ प्रकार से चुने जा सकते हैं तथा 5 महिलाओं में से 2 महिलाएँ $^5C_2$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं। अतः, कमेटी चुनने के प्रकारों की संख्या

$^7C_3 \times {^5C_2} = 350$ है।

उदाहरण 15 शब्द 'EAMCOT' के सभी अक्षरों को विभिन्न संभव प्रकारों से व्यवस्थित किया जाता है। ऐसी व्यवस्थाओं के कुल प्रकारों, जिनमें कोई भी दो स्वर साथ-साथ नहीं होंगे, की संख्या है

(A) 360 (B) 144 (C) 72 (D) 54

हल (B) सही उत्तर है। हम जानते हैं कि यहाँ 3 व्यंजन हैं और 3 स्वर E, A और O हैं। क्योंकि किन्हीं भी दो स्वरों को एक साथ नहीं रहना है, अतः इनके स्थान 'X' से अंकित किये गये हैं: X M X C X T X ये स्वर $^4P_3$ प्रकार से व्यवस्थित किये जा सकते हैं तथा 3 व्यंजन $\lfloor 3$ प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अतः, प्रकारों की वांछित संख्या $= 3! \times {^4P_3} = 144$.

उदाहरण 16 वर्णमाला के 10 विभिन्न अक्षर दिये हुए हैं। इन दिये हुए अक्षरों से 5 अक्षरों वाले शब्द बनाये जाते हैं तब उन शब्दों की संख्या, जिनमें कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति होगी।

(A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) 99784

हल (A) सही विकल्प है। 5 अक्षरों वाले शब्दों की संख्या (जबकि एक अक्षर की पुनरावृत्ति हो सकती है) $= 10^5$। पुनः, 5 भिन्न-भिन्न अक्षरों वाले शब्दों की संख्या $= {}^{10}P_5$ अतः, वाँछित शब्दों की संख्या

= कुल शब्द – उन शब्दों की संख्या जिनमें किसी अक्षर की पुनरावृत्ति न हो

$= 10^5 - {}^{10}P_5 = 69760$

उदाहरण 17 विभिन्न रंगों के 6 झंडों में से एक या अधिक झंडों का प्रयोग करते हुए, दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या है–

(A) 63 (B) 1956 (C) 720 (D) 21

हल सही उत्तर B है।

एक झंडे के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_1 = 6$

दो झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_2 = 30$

तीन झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_3 = 120$

चार झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_4 = 360$

पाँच झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_5 = 720$

छः झंडों के प्रयोग से दिये जा सकने वाले संकेतों की संख्या $= {}^6P_6 = 720$

अतः, एक समय पर एक या अधिक झंडों का प्रयोग करते हुए दिये जा सकने वाले संकेतों की कुल संख्या

$6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$ (योग सिद्धांत के प्रयोग से)

उदाहरण 18 किसी परीक्षा में, तीन बहु-विकल्पीय प्रश्न हैं तथा ऐसे प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प हैं। उन विधियों की संख्या, जिनसे कोई विद्यार्थी सभी उत्तर सही करने में असफल रहेगा, है:

(A) 11 (B) 12 (C) 27 (D) 63

हल सही विकल्प (D) है। यहाँ तीन बहु विकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें से प्रत्येक में चार संभव उत्तर हैं। अतः, संभव उत्तरों की कुल संख्या $= 4 \times 4 \times 4 = 64$ इन संभव उत्तरों में से केवल एक ही प्रकार के सभी उत्तर सही हो सकते हैं। अतः, उन विधियों की संख्या, जिनमें कोई विद्यार्थी सभी उत्तर सही देने में असफल रहेगा $= 64 - 1 = 63$

उदाहरण 19 सरल रेखाएँ l_1, l_2 और l_3 एक ही तल में हैं और समांतर हैं। l_1 पर कुल m बिंदु, l_2 पर कुल n बिंदु और l_3 पर कुल k बिंदु लिये जाते हैं। इन बिंदुओं को शीर्ष लेते हुए बनाये जा सकने वाले त्रिभुजों की अधिकतम संख्या है–

(A) ${}^{(m+n+k)}C_3$ (B) ${}^{(m+n+k)}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

(C) ${}^mC_3 + {}^nC_3 + {}^kC_3$ (D) ${}^mC_3 \times {}^nC_3 \times {}^kC_3$

हल (B) सही उत्तर है। यहाँ कुल $(m + n + k)$ बिंदु हैं, जिन्हें ${}^{(m+n+k)}C_3$ त्रिभुज देने चाहिए। परंतु l_1 पर स्थित m बिंदुओं में से 3 बिंदु एक साथ लेने पर, ${}^mC_3$ संचय बनेंगे, जिनसे कोई त्रिभुज प्राप्त नहीं होगा। इसी प्रकार ${}^nC_3$ और ${}^kC_3$ त्रिभुज भी प्राप्त नहीं होंगे। अतः, त्रिभुजों की वांछित संख्या $= {}^{(m+n+k)}C_3 - {}^mC_3 - {}^nC_3 - {}^kC_3$

7.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. आठ कुर्सियों को संख्या 1 से 8 तक अंकित किया गया है। दो महिलाएँ और 3 पुरुष इनमें से एक-एक कुर्सी पर बैठना चाहते हैं। पहले महिलाएँ 1 से 4 अंकित कुर्सियों पर बैठने का चयन करती है तथा बाद में पुरुष शेष कुर्सियों पर बैठने का चयन करते हैं। संभव व्यवस्थाओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** 1 से 4 तक अंकित कुर्सियों पर 2 महिलाएँ $^4P_2$ प्रकार से बैठ सकती है। 3 पुरुष शेष कुर्सियों पर $^6P_3$ प्रकार से बैठ सकते हैं।]

2. यदि शब्द RACHIT के अक्षरों को सभी ऐसे संभव प्रकारों से व्यवस्थित किया जाता है, जैसे वे शब्दकोश में लिखे होते हैं, तब इस व्यवस्था में RACHIT कौन से स्थान पर रहेगा?

[संकेत: प्रत्येक स्थिति में A, C, H, और I से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या 5! है।]

3. एक प्रत्याशी को 12 प्रश्नों में से 7 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जो दो समूहों में हैं प्रत्येक समूह में 6 प्रश्न हैं। वह किसी भी समूह में से 5 प्रश्नों से अधिक प्रश्न नहीं कर सकता है। प्रश्नों को करने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक तल में दिये 18 बिंदुओं में से, केवल पाँच बिंदुओं को छोड़कर जो संरेख है, कोई भी तीन बिंदु एक ही रेखा में नहीं हैं। इन बिंदुओं को मिलाने से बनने वाली रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** सरल संख्याओं की संख्या = $^{18}C_2 - {}^5C_2 + 1$]

5. हम 8 व्यक्तियों में से 6 व्यक्ति चुनना चाहते हैं, परंतु यदि व्यक्ति A चुना जाता है, तो व्यक्ति B भी चुना जाना चाहिए। यह चयन कितनी विधियों से किया जा सकता है?

6. 12 व्यक्तियों में से 5 व्यक्तियों की कमेटी एक अध्यक्ष के साथ कितने प्रकार से चुनी जा सकती है?

[**संकेत:** अध्यक्ष 12 प्रकार से चुना जा सकता है तथा शेष को $^{11}C_4$ प्रकार से चुना जा सकता है।]

7. कितनी ऑटोमोबाइल लाइसेंस प्लेटें बनायीं जा सकती हैं, यदि प्रत्येक प्लेट में दो भिन्न अक्षर हैं और उनके बाद तीन भिन्न-भिन्न अंक आते हैं?

8. एक थैले में 5 काली और 6 लाल गेंदें हैं। इस थैले में 2 काली और 3 लाल गेंदें निकालने की विभिन्न विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें 3 विशेष वस्तुएँ एक साथ रहनी चाहिएं।

10. शब्द 'TRIANGLE' के अक्षरों से कुल बनाये जा सकने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, ताकि कोई भी स्वर एक साथ न रहे।

11. 6000 से बड़े और 7000 से छोटे उन धनात्मक पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए, जो 5 से विभाज्य हैं, जबकि किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो।

12. 10 व्यक्तियों के नाम $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{10}$ हैं। इन 10 व्यक्तियों में से 5 व्यक्तियों को एक पंक्ति में व्यवस्थित करना है, ताकि प्रत्येक व्यवस्था में P_1 रहे तथा P_4 और P_5 न रहें। ऐसी सभी संभव व्यवस्थाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** व्यवस्थाओं की वाँछित संख्या = ${}^7C_4 \times 5!$]

13. एक हॉल में 10 लैम्प हैं। इनमें से प्रत्येक को स्वतंत्र रूप से 'स्विच ऑन' किया जा सकता है। उन विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनसे उस हॉल को प्रकाशित किया जा सकता है।

[**संकेत:** वाँछित संख्या = $2^{10} - 1$]

14. एक बॉक्स में, दो सफेद, तीन काली और चार लाल गेंदें हैं। इस बॉक्स में से तीन गेंद कितने प्रकार से निकाली जा सकती हैं, यदि इनमें कम से कम 1 काली गेंद अवश्य हो।

[**संकेत:** प्रकारों की वाँछित संख्या = ${}^3C_1 \times {}^6C_2 + {}^3C_2 \times {}^6C_2 + {}^3C_3$]

15. यदि ${}^nC_{r-1} = 36$, ${}^nC_r = 84$ और ${}^nC_{r+1} = 126$, तो ${}^rC_2$ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** वाँछित संख्या $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}$ और $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}$ का प्रयोग करते हुए, r का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण बनाइए।]

16. अंक 3, 5, 7, 8 और 9 से बनाये जा सकने वाले 7000 से बड़े पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो।

[**संकेत:** 7000 से बड़े चार अंकों के अतिरिक्त, पाँच अंकों से बने सभी पूर्णांक 7000 से बड़े होंगे।]

17. यदि एक तल में 20 रेखाएँ ऐसी खींची जाएँ कि इनमें से कोई दो समांतर न हों और कोई भी तीन संगामी न हों, तो वे परस्पर कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगी?

18. किसी शहर में, सभी टेलीफोन नंबर 6 अंकों के हैं; जिनमें प्रथम दो अंक 41 या 42 या 46 या 62 हैं तो कितने टेलीफोन नम्बरों में सभी 6 अंक भिन्न-भिन्न हैं?

19. एक परीक्षा में, एक विद्यार्थी को 5 प्रश्नों में से 4 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। परंतु प्रश्न 1 और 2 अनिवार्य है। उन विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनसे वह विद्यार्थी उत्तर देने के विकल्प चुन सकता है।

20. एक उत्तल बहुभुज के 44 विकर्ण हैं। उसकी भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** *n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या* (${}^nC_2 - n$) *होती है।*]

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

21. 18 चूहों को दो प्रायोगिक समूहों और एक नियंत्रण समूह में रखा जाता है, जबकि सभी समूह समान रूप से विशाल हैं। ये चूहे इन समूहों में कितने प्रकार से रखे जा सकते हैं?

22. एक थैले में 6 सफेद कंचे और 5 लाल कंचे हैं। इस थैले में से चार कंचे निकालने की कुल विधियाँ ज्ञात कीजिए, यदि (a) वे किसी भी रंग के हों, (b) दो सफेद और दो लाल रंग के हों तथा (c) ये सभी एक ही रंग के हों।

23. 16 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की कितनी फुटबॉल टीमें चुनी जा सकती हैं? इनमें से कितनी टीमों में,

(i) 2 विशेष खिलाड़ी सम्मिलित होंगे?

(ii) 2 विशेष खिलाड़ी टीम से बाहर होंगे?

24. 11 विद्यार्थियों वाली एक खेल-कूद टीम बनायी जानी है, जिसमें कक्षा XI से कम से कम 5 और कक्षा XII से कम से कम 5 विद्यार्थी लिये जाने चाहिए। यदि इन कक्षाओं में से प्रत्येक में 20 विद्यार्थी हैं, तो यह टीम कितने प्रकार से बनायी जा सकती है?

25. किसी समूह में 4 लड़के और 7 लड़कियाँ हैं। इनसे 5 सदस्यों वाली एक टीम किस प्रकार बनाई जा सकती है, यदि टीम में

(i) कोई लड़की नहीं है?

(ii) कम से कम एक लड़का और एक लड़की है?

(iii) कम से कम तीन लड़कियाँ हैं?

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 26 से 40 में, दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q)

26. यदि ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ तो n बराबर है

(A) 20 (B) 12 (C) 6 (D) 30

27. यदि एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या है

(A) 36 (B) 64 (C) 12 (D) 32

28. अंक 2, 3, 4 और 7 को केवल एक बार प्रयोग करते हुए इनसे चार अंकों की बनायी जा सकने वाली विभिन्न संख्याओं की कुल संख्या है

(A) 120 (B) 96 (C) 24 (D) 100

29. अंक 3, 4, 5 और 6 को एक साथ लेकर उनकी सहायता से बनायी जा सकने वाली सभी संख्याओं के इकाई के स्थान के अंकों का योग है

(A) 432 (B) 108 (C) 36 (D) 18

30. 4 स्वर और 5 व्यंजनों में से 2 स्वर और 3 व्यंजन लेकर बनाये जा सकने वाले शब्दों की कुल संख्या बराबर है

(A) 60 (B) 120 (C) 7200 (D) 720

31. अंक 0, 1, 2, 3, 4 और 5 का बिना पुनरावृत्ति के प्रयोग करने पर, 3 से विभाज्य पाँच अंकों की संख्या बनायी जाती है। ऐसा करने के प्रकारों की कुल संख्या है

(A) 216 (B) 600 (C) 240 (D) 3125

[**संकेत:** *पाँच अंकों की संख्याएँ अंक* 0,1, 2, 4, 5 *या अंक*, 1, 2, 3, 4, 5 *का प्रयोग करके बनायी जा सकती है, क्योंकि इन स्थितियों में अकों का योग* 3 *से विभाज्य* है।]

32. एक कमरे में प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक अन्य व्यक्ति से हाथ मिलाता है। कुल 66 हाथ मिलाये गये हैं। इस कमरे में व्यक्तियों की संख्या है

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

33. 12 बिंदुओं के एक समुच्चय के बिंदुओं को शीर्ष मानते हुए, जिनमें से 7 बिंदु एक ही रेखा में हैं, बनाये जा सकने वाले त्रिभुजाओं की संख्या है

(A) 105 (B) 15 (C) 175 (D) 185

34. चार समांतर रेखाओं वाले एक समुच्चय की रेखाओं द्वारा तीन समांतर रेखाओं वाले एक समुच्चय की रेखाओं को प्रतिच्छेद करने पर बन सकने वाले समांतर चतुर्भुजों की संख्या है

(A) 6 (B) 18 (C) 12 (D) 9

35. 22 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की टीम बनाने की संख्या, जब उनमें से 2 को सदैव सम्मिलित किया जाए और 4 को सदैव छोड़ दिया जाए, बराबर है

(A) ${}^{16}C_{11}$ (B) ${}^{16}C_5$ (C) ${}^{16}C_9$ (D) ${}^{20}C_9$

36. कम से कम एक अंक की पुनरावृत्ति वाले 5 अंक के टेलीफोन नंबरों की संख्या है

(A) 90,000 (B) 10,000 (C) 30,240 (D) 69,760

37. चार पुरुष और छः महिलाओं में से एक कमेटी इस प्रकार चुननी है कि उसमें कम से कम दो पुरुष हों तथा उनसे दोगुनी महिलाएँ हों। कमेटी को चुनने के प्रकारों की संख्या है

(A) 94 (B) 126 (C) 128 (D) कोई नहीं

38. 9 अंकों वाली ऐसी संख्यांक जिनके सभी अंक भिन्न हों, हैं:

(A) 10! (B) 9 ! (C) $9 \times 9!$ (D) $10 \times 10!$

39. शब्द ARTICLE के सभी अक्षरों से बनाए जा सकने वाले शब्दों की संख्या जिसमें, स्वर सम स्थानों पर रहे, है:

(A) 1440 (B) 144

(C) 7! (D) ${}^4C_4 \times {}^3C_3$

40. पाँच विभिन्न हरे रोगन, चार विभिन्न नीले रोगन तथा तीन विभिन्न लाल रोगन के दिये रहने पर, कम से कम एक हरे रोगन और एक नीले रोगन को लेते हुए, चयन किये जा सकने वाले रोगनों के संचयों की संख्या है

(A) 3600 (B) 3720 (C) 3800 (D) 3600

[**संकेत:** 5 हरे रोगन, 4 नीले रोगन और तीन लाल रोगनों का चयन करने अथवा चयन न करने के प्रकारों की संख्याएँ क्रमशः 2^5, 2^4 और 2^3 है।]

प्रश्न 41 से 50 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

41. यदि ${}^nP_r = 840$ और ${}^nC_r = 35$, तो $r =$ ______ है।

42. ${}^{15}C_8 + {}^{15}C_9 - {}^{15}C_6 - {}^{15}C_7 =$ ______ है।

43. n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर, पुनरावृत्ति की अनुमति के साथ, क्रमचयों की संख्या ______ है।

44. शब्द INTERMEDIATE के अक्षरों से बनाये जा सकने वाले विभिन्न शब्दों की संख्या ——— है, जबकि दो स्वर कभी एक साथ नहीं आते हैं।

[**संकेत:** 6 व्यंजन, जिनमें दो एक जैसे हैं, को व्यवस्थित करने के प्रकारों की संख्या $\frac{6!}{2!}$ है तथा स्वरों को व्यवस्थित करने के प्रकारों की संख्या $= {}^7P_6 \times \frac{1}{3!} \times \frac{1}{2!}$]

45. एक थैले में से, जिसमें 5 लाल, 4 सफेद और 3 काली गेंदें हैं, तीन गेंदें निकाली जाती हैं। उन विधियों की संख्या जिनमें ऐसा किया जा सकता है, जिसमें कम से कम 2 लाल गेंद हों, ——— है।

46. ऐसी 6 अंकों की संख्याओं की संख्या, जिनमें सभी अंक विषम हैं, ——— है।

47. एक फुटबॉल चैम्पियनशिप प्रतियोगिता में 153 मैच खेले गये। प्रत्येक दो टीमों ने एक दूसरे के साथ एक-एक मैच खेला। इस प्रतियोगिता में प्रतिभागी टीमों की संख्या ——— है।

48. छः '+' और चार '–' चिन्हों को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित करने की संख्या कि कोई दो '–' चिन्ह एक साथ न रहें ——— है।

49. 10 पुरुष और 7 महिलाओं में से 6 व्यक्तियों की एक कमेटी ऐसी बनायी जानी है कि उसमें कम से कम 3 पुरुष और 2 महिलाएँ रहें। कितने प्रकारों से ऐसा किया जा सकता है, यदि दो विशेष महिलाओं ने एक ही कमेटी में रहने के लिए मना कर दिया है की संख्या ——— है।

[**संकेत** कम से कम 3 पुरुष और 2 महिलाएँ: तरीकों की कुल संख्या $= {}^{10}C_3 \times {}^7C_3 + {}^{10}C_4 \times {}^7C_2$। दो विशेष महिलाएँ सदैव साथ रहें, तब तरीकों की संख्या $= {}^{10}C_4 + {}^{10}C_3 \times {}^5C_1$ कमेटियों की कुल संख्या, जब दो विशेष महिलाएँ कभी एक साथ न रहें = कुल संख्या–साथ वाली संख्या]

50. एक बॉक्स में 2 सफेद गेंदें, 3 काली गेंद और 4 लाल गेंद हैं। यदि कम से कम एक गेंद काली निकालनी है, तो इस बॉक्स में से तीन गेंद निकालने के प्रकारों की संख्या ——— है।

बताइए कि प्रश्न 51 से 59 तक दिए हुए कथनों में से कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य है? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

51. एक तल में 12 बिंदु है। जिनमें से 5 बिंदु संरेख हैं। तब, इन बिंदुओं को युग्मों में जोड़ने पर प्राप्त रेखाओं की संख्या ${}^{12}C_2 - {}^5C_2$ है।

52. 5 लेटर बॉक्स में 3 पत्र 3^5 तरीके से डाले जा सकते हैं।

53. n वस्तुओं में से r वस्तुएँ एक साथ लेकर उन क्रमचयों की संख्या, जिनमें m विशेष वस्तुएँ एक साथ रहें, ${}^{n-m}P_{r-m} \times {}^rP_m$ है।

54. एक स्टीमर में 12 पशुओं के लिए अस्तबल है यहाँ घोड़े, गाय और बछड़े (प्रत्येक 12 से कम नहीं) स्टीमर में चढ़ाने के लिए तैयार हैं। उन्हें 3^{12} प्रकारों से चढ़ाया जा सकता है।

55. यदि n वस्तुओं में से कुछ या सभी एक साथ लिये जाएँ, तो संचयों की संख्या 2^n-1 है।

56. एक थैले में 4 लाल और 5 काली गेंदें दिए रहने पर, उसमें से कम से कम एक लाल गेंद चुनने के केवल 24 प्रकार होंगे। यह दिया हुआ है कि एक ही रंग की गेंदें एक जैसी (सर्वसम) हैं।

57. एक लंबी मेज के दोनों ओर 18 मेहमानों को इस प्रकार बैठाया जाना है कि प्रत्येक ओर आधे मेहमान रहें। चार विशिष्ट मेहमान एक विशेष ओर बैठना चाहते हैं तथा तीन अन्य मेज के दूसरी ओर बैठना चाहते हैं। उन प्रकारों की संख्या जिनमें बैठने की व्यवस्था की जा सकती है, $\frac{11!}{5!6!}(9!)(9!)$ है।

[**संकेत:** 4 को एक ओर और 3 को दूसरी ओर बैठाने पर, हमें 11 चुनने हैं; 5 एक ओर तथा 6 दूसरी ओर। अब लंबी मेज के प्रत्येक ओर 9 मेहमान हो जाते हैं, जो 9! प्रकारों से व्यवस्थित किये जा सकते हैं।

58. एक परीक्षार्थी को 12 प्रश्नों में से 7 प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जो ऐसे दो समूहों में विभाजित हैं, जिनमें से प्रत्येक में 6 प्रश्न हैं। उसे किसी भी समूह में से 5 प्रश्नों से अधिक के उत्तर देने की अनुमति नहीं है। वह इन 7 प्रश्नों को 650 प्रकारों से चुन सकता है।

59. 12 रिक्त पदों को भरने के लिए 25 प्रत्याशी हैं। जिनमें से 5 अनुसूचित जाति के प्रत्याशियों के लिए आरक्षित हैं, जबकि शेष सभी के लिए खुले हैं। उन विधियों की संख्या जिनसे चयन किया जा सकता है ${}^5C_3 \times {}^{20}C_9$ है।

प्रश्न 60 से 64 तक प्रत्येक में, स्तंभ C_1 के प्रत्येक प्रश्न को स्तंभ C_2 में दिए उत्तरों से मिलान कीजिए।

60. गणित की 3 पुस्तक, भौतिकी की 4 तथा अंग्रेजी की 5 पुस्तकें हैं। कितने विभिन्न संग्रह बनाये जा सकते हैं, जिसमें प्रत्येक संग्रह में हैं:

C_1	C_2
(a) प्रत्येक विषय की एक पुस्तक	(i) 3968
(b) प्रत्येक विषय की कम से कम एक पुस्तक	(ii) 60
(c) अंग्रेजी की कम से कम एक पुस्तक	(iii) 3255

61. पाँच लड़के और पाँच लड़कियाँ एक पंक्ति में बैठते हैं। निम्नलिखित प्रतिबंधों के अंतर्गत बैठने की व्यवस्था करने की संख्या ज्ञात कीजिए:

C_1	C_2
(a) लड़के और लड़कियाँ बारी बारी से	(i) $5! \times 6!$
(b) कोई दो लड़कियाँ एक साथ न बैठें	(ii) $10! - 5!\,6!$
(c) सभी लड़कियाँ एक साथ बैठें	(iii) $(5!)^2 + (5!)^2$
(d) सभी लड़कियाँ कभी भी एक साथ न बैठें	(iv) $2!\,5!\,5!$

62. 10 आचार्य और 20 प्रवक्ता में से 2 आचार्य और 3 प्रवक्ता वाली कमेटी बनायी जानी है। ज्ञात कीजिए।

C_1	C_2
(a) कमेटी कितने प्रकार से बन सकती है	(i) ${}^{10}C_2 \times {}^{19}C_3$
(b) कितने प्रकार से एक विशेष आचार्य सम्मिलित होगा	(ii) ${}^{10}C_2 \times {}^{19}C_2$
(c) कितने प्रकार से एक विशेष प्रवक्ता सम्मिलित होगा	(iii) ${}^{9}C_1 \times {}^{20}C_3$
(d) कितने प्रकार से एक विशेष प्रवक्ता सम्मिलित नहीं किया जाएगा	(iv) ${}^{10}C_2 \times {}^{20}C_3$

63. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 और 7 का प्रयोग करके 4 विभिन्न अंकों की एक संख्या बनायी जाती है। ज्ञात कीजिए:

C_1	C_2
(a) कितनी संख्याएँ बनती है?	(i) 840
(b) कितनी संख्या ठीक 2 से विभाज्य हैं?	(ii) 200
(c) कितनी संख्याएँ ठीक 25 से विभाज्य हैं?	(iii) 360
(d) इनमें से कितनी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं?	(iv) 40

64. शब्द MONDAY के अक्षरों से कितने (शब्दकोश के अर्थ या बिना अर्थ के) शब्द बनाये जा सकते हैं। यह कल्पना करते हुए कि किसी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं होगी, यदि

C_1	C_2
(a) एक समय पर 4 अक्षर प्रयोग किये जाते हैं	(i) 720
(b) एक समय पर सभी अक्षर प्रयोग किए जाते हैं	(ii) 240
(c) सभी अक्षर प्रयोग किए जाते हैं, परंतु पहला अक्षर एक स्वर है	(iii) 360

अध्याय 8

द्विपद प्रमेय

8.1 समग्र अवलोकन (Overview)

8.1.1 चिह्नों '+' या '–' द्वारा जुड़े हुए दो पदों से बना व्यंजक एक द्विपद व्यंजक कहलाता है। उदाहरणार्थ, $x + a$, $2x - 3y$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$, $7x - \frac{4}{5y}$ इत्यादि सभी द्विपद व्यंजक हैं।

8.1.2 *द्विपद प्रमेय*

यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हैं तथा n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots$$

$$\ldots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r + \ldots + {}^nC_n\, b^n, \text{ जहाँ } 0 \le r \le n \text{ के लिए, } {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$$

इस प्रसार में, व्यापक पद या $(r + 1)^{\text{वाँ}}$ पद,

$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$ से प्राप्त होता है।

8.1.3 *कुछ महत्वपूर्ण प्रेक्षण*

1. $(a + b)^n$ के द्विपद प्रसार में पदों की कुल संख्या $(n + 1)$ है, अर्थात् यह घातांक n से एक अधिक है।
2. प्रसार के, प्रथम पद में a की घात द्विपद की घात के बराबर है तथा प्रत्येक उत्तरोतर पद में a की घात एक घटती जाती है और साथ ही b की घात एक बढ़ती जाती है। ऐसा तब तक होता रहता है जब तक कि b की घात द्विपद की घात के बराबर न हो जाए। अर्थात्, प्रथम पद में a की घात n, दूसरे पद में $(n - 1)$और ऐसा आगे भी होता रहता है तथा अंतिम पद में a की घात शून्य हो जाती है। इसके साथ ही, प्रथम पद में b की घात 0 है, दूसरे पद में तीसरे पद में 2 और ऐसा आगे भी होता रहता है तथा अंतिम पद में b की घात n हो जाती है।
3. किसी भी पद में a और b के घातांकों का योग n के बराबर है (अर्थात् द्विपद की घात के बराबर है)।
4. प्रसार में गुणांक एक प्रतिरूप या पैटर्न का अनुकरण करते हैं जिसे पास्कल त्रिभुज कहा जाता है।

द्विपद का घातांक	विभिन्न पदों के गुणांक
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

किसी भी पंक्ति का प्रत्येक गुणांक इससे पिछली पंक्ति में इस गुणांक के ठीक बाएँ और ठीक दाएँ गुणांकों का योग होता है तथा पंक्ति दोनों ओर से 1 द्वारा परिबद्ध होती है।

$(r + 1)$वाँ पद या व्यापक पद

$T_{r+1} = \; {}^nC_r\, a^{n-r} b^r$ से प्राप्त होता है।

8.1.4 *कुछ विशेष स्थितियाँ*

यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 + {}^nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$+ {}^nC_r\, a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n\, a^0 b^n \qquad \ldots (1)$$

विशिष्टत:

1. (i) में, b के स्थान पर $-b$ रखने पर, हमें

$(a - b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 - {}^nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r} b^r + \ldots +$ $(-1)^n\, {}^nC_n\, a^0 b^n$ प्राप्त होता है ... (2)

2. (1) और (2) को जोड़ने पर, हमें

$(a + b)^n + (a - b)^n = 2\, [{}^nC_0\, a^n b^0 + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + {}^nC_4\, a^{n-4} b^4 + \ldots]$

= 2 [विषम स्थानों वाले पद] प्राप्त होता है

3. (2) को (1) में से घटाने पर, हमें

$(a + b)^n - (a - b)^n = 2\, [{}^nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nC_3\, a^{n-3} b^3 + \ldots]$

= 2 [सम स्थानों वाले पद] प्राप्त होता है

4. (1) में a को 1 से तथा b को x से प्रतिस्थापित करने पर, हमें

$(1 + x)^n = {}^nC_0\, x^0 + {}^nC_1\, x^1 + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + {}^nC_{n-1}\, x^{n-1} + {}^nC_n\, x^n$ प्राप्त होता है

अर्थात्, $$(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^r$$

5. (1) में, a को 1 से तथा b को $-x$ से प्रतिस्थापित करने पर, हमें

$$(1-x)^n = {}^nC_0\, x^0 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 (-1) \overset{n}{\underset{r}{C}} x^r + ... + {}^nC_{n-1} (-1)^{n-1} x^{n-1} + {}^nC_n\, (-1)^n\, x^n$$

प्राप्त होता है

अर्थात् $$(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r\, x^r$$

8.1.5 अंतिम पद से pवाँ पद

$(a+b)^n$ के प्रसार में, अंतिम पद से pवाँ पद प्रारंभ से $(n-p+2)$वाँ पद है।

8.1.6 मध्य-पद

मध्य-पद n के मान पर निर्भर करता है।

(a) यदि n एक सम संख्या है, तो $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $n+1$ (विषम) है। इसलिए यहाँ केवल एक मध्य-पद है, अर्थात् $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद ही मध्य-पद है।

(b) यदि n एक विषम संख्या है, तो $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $n+1$ (सम) है। इसलिए यहां दो मध्य पद हैं अर्थात् $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ और $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद दो मध्य-पद हैं।

8.1.7 द्विपद गुणांक

द्विपद व्यंजक के प्रसार से, हमें ज्ञात है कि

$$(a+b)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + ... + {}^nC_n\, b^n \qquad ... (1)$$

गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ द्विपद गुणांक या संचयात्मक गुणांक कहलाते हैं।

(1) में $a = b = 1$ रखने पर, हमें

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$$ प्राप्त होता है

इस प्रकार, सभी द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

(1) में पुनः $a = 1$ और $b = -1$ रखने पर, हमें

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + ... = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + ...$$ प्राप्त होता है

इस प्रकार, सभी विषम द्विपद गुणांकों का योग सभी सम द्विपद गुणांकों के योग के बराबर होता है तथा इनमें से प्रत्येक $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ के बराबर है।

अर्थात् $\quad {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots = 2^{n-1}$

8.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A)

उदाहरण 1 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2r}$ के प्रसार में rवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि:
$$T_r = {}^{2r}C_{r-1}\,(x)^{2r-r+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{r-1}$$
$$= \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r-1 \lfloor r+1}\, x^{r+1-r+1}$$
$$= \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r-1 \lfloor r+1}\, x^{2}$$

उदाहरण 2 $(1-x+x^2)^4$ का प्रसार कीजिए।

हल $1-x=y$ रखिए। तब,
$$\begin{aligned}(1-x+x^2)^4 &= (y+x^2)^4\\ &= {}^4C_0\; y^4(x^2)^0 + {}^4C_1\; y^3(x^2)^1\\ &\quad + {}^4C_2\; y^2(x^2)^2 + {}^4C_3\; y(x^2)^3 + {}^4C_4\,(x^2)^4\\ &= y^4 + 4y^3x^2 + 6y^2x^4 + 4y\,x^6 + x^8\\ &= (1-x)^4 + 4(1-x)^3x^2 + 6(1-x)^2x^4 + 4(1-x)\,x^6 + x^8\\ &= 1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8\end{aligned}$$

उदाहरण 3 $\left(\frac{x^3}{2}-\frac{2}{x^2}\right)^9$ के प्रसार में अंतिम पद से चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $(a+b)^n$ के प्रसार में अंतिम पद से rवाँ पद प्रारंभ से $(n-r+2)$वाँ पद होता है, इसलिए इस प्रसार में अंतिम पद से चौथा पद प्रारंभ से $(9-4+2)$वाँ, अर्थात् 7वाँ पद होगा। यह पद है:
$$T_7 = {}^9C_6\left(\frac{x^3}{2}\right)^3\left(\frac{-2}{x^2}\right)^6 = {}^9C_3\,\frac{x^9}{8}\cdot\frac{64}{x^{12}} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{8}{x^3} = \frac{672}{x^3}$$

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए $\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^4$

हल $\sqrt{1-x^2} = y$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = (x^2 - y)^4 + (x^2 + y)^4 = 2\,(x^8 + {}^4C_2\, x^4\, y^2 + {}^4C_4\, y^4)$$

$$= 2\left[x^8 + \frac{4\times 3}{2\times 1} x^4\,(1-x^2) + (1-x^2)^2\right]$$

$$= 2\,[x^8 + 6x^4\,(1 - x^2) + (1 - 2x^2 + x^4]$$

$$= 2x^8 - 12x^6 + 14x^4 - 4x^2 + 2$$

उदारहण 5 $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में x^{11} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि व्यापक पद, अर्थात् $(r + 1)$वें पद में x^{11} आता है।

ज्ञात है कि
$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\,(x^3)^{12-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^{12}C_r\, x^{36-3r-2r}\,(-1)^r\, 2^r$$

$$= {}^{12}C_r\,(-1)^r\, 2^r\, x^{36-5r}$$

इस पद में, x^{11} होने के लिए

$$36 - 5r = 11,\ \text{अर्थात्},\ r = 5$$

अतः, x^{11} का गुणांक ${}^{12}C_5\,(-1)^5\,2^5 = -\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2}\times 32 = -25344$

उदाहरण 6 निर्धारित कीजिए कि क्या $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{18}$ के प्रसार में कोई x^{10} वाला पद होगा।

हल मान लीजिए कि T_{r+1} में x^{10} आता है। तब,

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r\,(x^2)^{18-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$$

$$= {}^{18}C_r\, x^{36-2r}\,(-1)^r\,.\,2^r\,x^{-r}$$

$$= (-1)^r\,2^r\,{}^{18}C_r\,x^{36-3r}$$

इस प्रकार, $36 - 3r = 10$, अर्थात, $r = \frac{26}{3}$

क्योंकि r एक भिन्न है, इसलिए दिए हुए प्रसार में x^{10} वाला कोई पद नहीं होगा।

उदाहरण 7 $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $(r + 1)$वाँ पद x से स्वतंत्र है, जो निम्नलिखित है:

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{10-r} \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{r}$$

$$= {}^{10}C_r \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{10-r}{2}} 3^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{2^r x^{2r}}\right)$$

$$= {}^{10}C_r\, 3^{\frac{r}{2}-\frac{10-r}{2}}\, 2^{-r}\, x^{\frac{10-r}{2}-2r}$$

क्योंकि यह पद x से स्वतंत्र है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{10-r}{2}-2r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2$$

अत:, तीसरा पद x से स्वतंत्र है तथा इसका मान

$$T_3 = {}^{10}C_2 \frac{3^{-3}}{4} = \frac{10\times 9}{2\times 1}\times\frac{1}{9\times 12} = \frac{5}{12} \text{ है}$$

उदाहरण 8 $\left(2ax-\frac{b}{x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में मध्य-पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि इस द्विपद की घात सम है, इसलिए इसका एक ही मध्य-पद है, जो इसका $\left(\frac{12+2}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद है, और यह निम्नलिखित है:

$$T_7 = {}^{12}C_6 (2ax)^6 \left(\frac{-b}{x^2}\right)^6$$

$$= {}^{12}C_6 \frac{2^6 a^6 x^6 \cdot (-b)^6}{x^{12}}$$

$$= {}^{12}C_6 \frac{2^6 a^6 b^6}{x^6} = \frac{59136 a^6 b^6}{x^6}$$

उदाहरण 9 $\left(\frac{p}{x}+\frac{x}{p}\right)^9$ के प्रसार में मध्य-पद ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि द्विपद की घात विषम है, इसलिए यहाँ दो मध्य-पद हैं, जो 5वें और 6वें पद हैं। ये पद निम्नलिखित हैं:

$$T_5 = {}^9C_4\left(\frac{p}{x}\right)^5\left(\frac{x}{p}\right)^4 = {}^9C_4\frac{p}{x} = \frac{126p}{x}$$

तथा
$$T_6 = {}^9C_5\left(\frac{p}{x}\right)^4\left(\frac{x}{p}\right)^5 = {}^9C_5\frac{x}{p} = \frac{126x}{p}$$

उदाहरण 10 दर्शाइए कि $2^{4n+4} - 15n - 16$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$, 225 से विभाज्य है।

हल ज्ञात है कि

$$\begin{aligned}
2^{4n+4} - 15n - 16 &= 2^{4(n+1)} - 15n - 16 \\
&= 16^{n+1} - 15n - 16 \\
&= (1+15)^{n+1} - 15n - 16 \\
&= {}^{n+1}C_0\, 15^0 + {}^{n+1}C_1\, 15^1 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3 \\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16 \\
&= 1 + (n+1)\,15 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3 \\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16 \\
&= 1 + 15n + 15 + {}^{n+1}C_2\, 15^2 + {}^{n+1}C_3\, 15^3 \\
&\quad + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}\,(15)^{n+1} - 15n - 16 \\
&= 15^2\,[{}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3\, 15 + \ldots \text{ so on}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $2^{4n+4} - 15n - 16$ संख्या 225 से विभाज्य है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदारहण 11 $(2+3x)^9$ के प्रसार में संख्यात्मक रूप से सबसे बड़ा पद ज्ञात कीजिए जहाँ $x = \frac{3}{2}$

हल ज्ञात है कि $(2+3x)^9 = 2^9\left(1+\frac{3x}{2}\right)^9$

अब,
$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2^9\left[{}^9C_r\left(\frac{3x}{2}\right)^r\right]}{2^9\left[{}^9C_{r-1}\left(\frac{3x}{2}\right)^{r-1}\right]}$$

$$= \frac{{}^9C_r}{{}^9C_{r-1}}\left|\frac{3x}{2}\right| = \frac{\lfloor 9}{\lfloor r\,\lfloor 9-r} \cdot \frac{\lfloor r-1\,\lfloor 10-r}{\lfloor 9}\left|\frac{3x}{2}\right|$$

$$= \frac{10-r}{r}\left|\frac{3x}{2}\right| = \frac{10-r}{r}\left(\frac{9}{4}\right) \qquad \text{क्योंकि} \quad x = \frac{3}{2}$$

इसलिए
$$\frac{T_{r+1}}{T_r} \geq 1 \Rightarrow \frac{90-9r}{4r} \geq 1$$

$$\Rightarrow 90 - 9r \geq 4r \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{90}{13}$$

$$\Rightarrow r \leq 6\ \frac{12}{13}$$

इस प्रकार r का अधिकतम मान 6 है। इसलिए सबसे बड़ा पद $T_{r+1} = T_7$ है।

अत:
$$T_7 = 2^9\left[{}^9C_6\left(\frac{3x}{2}\right)^6\right], \qquad \text{जहाँ } x = \frac{3}{2}$$

$$= 2^9 \cdot {}^9C_6\left(\frac{9}{4}\right)^6 = 2^9 \cdot \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\left(\frac{3^{12}}{2^{12}}\right) = \frac{7\times3^{13}}{2}$$

उदाहरण 12 यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x^{-1} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (1+x)^n\left(\frac{x+1}{x}\right)^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$$

अब, $(1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ में x^{-1} का गुणांक ज्ञात करना $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ में x^{-1} का गुणांक ज्ञात करने के समतुल्य है, जो $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^{n-1} के गुणांक के समान है।

क्योंकि $(1 + x)^{2n} = {}^{2n}C_0\, x^0 + {}^{2n}C_1\, x^1 + {}^{2n}C_2\, x^2 + ... + {}^{2n}C_{n-1}\, x^{n-1} + ... + {}^{2n}C_{2n}\, x^{2n}$

इसलिए x^{n-1} का गुणांक ${}^{2n}C_{n-1}$

$$= \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n-1}\,\underline{|2n-n+1}} = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n-1}\,\underline{|n+1}} \text{ है।}$$

उदाहरण 13 निम्नलिखित में कौन बड़ा है?

$99^{50} + 100^{50}$ या 101^{50}

ज्ञात है कि $(101)^{50} = (100 + 1)^{50}$

$$= 100^{50} + 50\,(100)^{49} + \frac{50.49}{2.1}(100)^{48} + \frac{50.49.48}{3.2.1}(100)^{47} + ... \quad (1)$$

इसी प्रकार, $99^{50} = (100 - 1)^{50}$

$$= 100^{50} - 50\,.\,100^{49} + \frac{50.49}{2.1}(100)^{48} - \frac{50.49.48}{3.2.1}(100)^{47} + ... \quad (2)$$

(2) को (1) में से घटाने पर

$$(101)^{50} - 99^{50} = 2\left[50\,(100)^{49} + \frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}100^{47} + ...\right]$$

$$\Rightarrow \quad (101)^{50} - 99^{50} = (100)^{50} + 2\left(\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}\right)(100)^{47} + ...$$

$$\Rightarrow \quad (101)^{50} - 99^{50} > (100)^{50}$$

अत:, $(101)^{50} > (99)^{50} + (100)^{50}$

उदारहण 14 $(1 + x)^{1000} + x\,(1 + x)^{999} + x^2\,(1 + x)^{998} + ... + x^{1000}$ के प्रसार में सरल करने और समान पदों को एकत्रित करने के पश्चात् x^{50} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि उपर्युक्त प्रसार एक गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्व अनुपात $\frac{x}{1+x}$ है, इसलिए इसका योग

$$= \frac{(1+x)^{1000}\left[1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1001}\right]}{\left[1-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]}$$

$$= \frac{(1+x)^{1000} - \frac{x^{1001}}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = (1+x)^{1001} - x^{1001}$$

अत:, x^{50} का गुणांक निम्नलिखित है:

$$^{1001}C_{50} = \frac{\underline{|1001}}{\underline{|50}\,\underline{|951}}$$

उदाहरण 15 यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में a_1, a_2, a_3 और a_4 क्रमश: चार क्रमागत पदों के गुणांक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}$$

हल मान लीजिए a_1, a_2, a_3 और a_4 क्रमश: चार क्रमागत पदों T_{r+1} T_{r+2} T_{r+3} और T_{r+4} के गुणांक हैं। तब,

$a_1 = T_{r+1}$ का गुणांक $= {}^nC_r$,

$a_2 = T_{r+2}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+1}$,

$a_3 = T_{r+3}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+2}$

तथा $a_4 = T_{r+4}$ का गुणांक $= {}^nC_{r+3}$

अत:, $$\frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}}$$

$$= \frac{{}^nC_r}{{}^{n+1}C_{r+1}} \qquad (\because\ {}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1})$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} \times \frac{\lfloor r+1 \lfloor n-r}{\lfloor n+1} = \frac{r+1}{n+1}$$

इसी प्रकार, $\frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2} + {}^nC_{r+3}}$

$$= \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^{n+1}C_{r+3}} = \frac{r+3}{n+1}$$

अतः, बायां पक्ष $= \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{r+1}{n+1} + \frac{r+3}{n+1} = \frac{2r+4}{n+1}$

तथा दायां पक्ष $= \frac{2a_2}{a_2+a_3} = \frac{2\left({}^nC_{r+1}\right)}{{}^nC_{r+1} + {}^nC_{r+2}} = \frac{2\left({}^nC_{r+1}\right)}{{}^{n+1}C_{r+2}}$

$$= \frac{2\lfloor n}{\lfloor r+1 \lfloor n-r-1} \times \frac{\lfloor r+2 \lfloor n-r-1}{\lfloor n+1} = \frac{2(r+2)}{n+1} = \frac{2r+4}{n+1}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (M.C.Q)

उदाहरण 16 $(x + a)^{51} - (x - a)^{51}$ के प्रसार में सरलीकरण के बाद पदों की संख्या है

(a) 102 (b) 25 (c) 26 (d) इनमें से कोई नहीं

हल C सही उत्तर है। क्योंकि कुल 52 पद होंगे, जिनमें 26 पद परस्पर कट जाते हैं।

उदारहण 17 यदि $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ के प्रसार में, x^7 और x^8 के गुणांक बराबर हैं, तो n का मान है

(a) 56 (b) 55 (c) 45 (d) 15

हल (B) सही विकल्प है। क्योंकि $(a + x)^n$, के प्रसार में, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r} x^r$

इसलिए $T_8 = {}^nC_7 (2)^{n-7} \left(\frac{x}{3}\right)^7 = {}^nC_7 \frac{2^{n-7}}{3^7} x^7$

तथा $$T_9 = {}^nC_8\, (2)^{n-8} \left(\frac{x}{3}\right)^8 = {}^nC_8 \frac{2^{n-8}}{3^8} x^8$$

इसलिए $${}^nC_7 \frac{2^{n-7}}{3^7} = {}^nC_8 \frac{2^{n-8}}{3^8}$$ (क्योंकि दिया है कि x^7 = का गुणांक = x^8 का गुणांक)

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor n}{\lfloor 7 \lfloor n-7} \times \frac{\lfloor 8 \lfloor n-8}{\lfloor n} = \frac{2^{n-8}}{3^8} \cdot \frac{3^7}{2^{n-7}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{n-7} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad n = 55$$

उदाहरण 18 यदि $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$ तो $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_n$ बराबर है

(A) $\frac{3^n + 1}{2}$ (B) $\frac{3^n - 1}{2}$ (C) $\frac{1 - 3^n}{2}$ (D) $3^n + \frac{1}{2}$

हलः (A) सही विकल्प है। $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$ में $x = 1$ और -1 रखने पर,

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2n} \quad ... (1)$$

और $$3^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{2n} \quad ... (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$3^n + 1 = 2\,(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$$

इसलिए, $$a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = \frac{3^n + 1}{2}$$

उदाहरण 19 $(1 + x)^{p+q}$ के प्रसार में, x^p और x^q के गुणांक (p और q धनात्मक पूर्णांक हैं) हैं

(A) बराबर (B) बराबर परंतु विपरीत चिह्नों के

(C) एक दूसरे के व्युत्क्रम (D) इनमें से कोई नहीं

हल (A) सही विकल्प है। $(1 + x)^{p+q}$ के प्रसार में, x^p और x^q के गुणांक क्रमशः ${}^{p+q}C_p$ और ${}^{p+q}C_q$ हैं,

तथा $${}^{p+q}C_p = {}^{p+q}C_q = \frac{\lfloor p+q}{\lfloor p \lfloor q}$$

अतः, (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 20 $(a + b + c)^n$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$, के प्रसार में पदों की संख्या है

(A) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ (B) $n + 1$

(C) $n + 2$ (D) $(n + 1)\, n$

हल (A) सही विकल्प है।

$$(a + b + c)^n = [a + (b + c)]^n$$
$$= a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} (b + c)^1 + {}^nC_2\, a^{n-1} (b + c)^2 + \ldots + {}^nC_n (b + c)^n$$

साथ ही, दाएं पक्ष के प्रत्येक पद को प्रसारित करने पर, हम देखते हैं कि

प्रथम पद में एक पद है,

दूसरी पद को सरल करने पर उसमें दो पद हैं,

तीसरे पद को प्रसारित करने पर उसमें तीन पद हैं,

चौथे पद को प्रसारित करने पर उसमें चार पद हैं, और इस प्रकार आगे भी।

$$\text{अतः, पदों की कुल संख्या} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

उदाहरण 21 $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{15}$ में x^{15} के गुणांक का x से स्वतंत्र पद से अनुपात है

(A) 12:32 (B) 1:32 (C) 32:12 (D) 32:1

हल (B) सही विकल्प है। मान लीजिए कि $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{15}$ का व्यापक पद T_{r+1}

इसलिए $$T_{r+1} = {}^{15}C_r\, (x^2)^{15-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= {}^{15}C_r\, (2)^r\, x^{30-3r} \qquad \ldots (1)$$

अब x^{15} वाले पद के गुणांक के लिए,

$$30 - 3r = 15, \quad \text{अर्थात्} \quad r = 5$$

अतः, x^{15} का गुणांक $= {}^{15}C_5\, (2)^5$ [(1) से]

x से स्वतंत्र पद ज्ञात करने के लिए, $30 - 3r = 0$ रखिए।

इस प्रकार x से स्वतंत्र पद $= {}^{15}C_{10}\, 2^{10}$ [(1) से]

अब, अनुपात है: $\dfrac{{}^{15}C_5\, 2^5}{{}^{15}C_{10}\, 2^{10}} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

उदाहरण 22 यदि $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^5$ है, तो

(A) $\text{Re}\,(z) = 0$ (B) $I_m\,(z) = 0$

(C) $\text{Re}\,(z) > 0,\ I_m\,(z) > 0$ (D) $\text{Re}\,(z) > 0,\ I_m\,(z) < 0$

हल (B) सही विकल्प है। सरल करने पर,

$$z = 2\left[{}^5C_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + {}^5C_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{i}{2}\right)^2 + {}^5C_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{i}{2}\right)^4\right]$$

क्योंकि $i^2 = -1$ और $i^4 = 1$, इसलिए z में कोई i नहीं होगा, और इस प्रकार $I_m\,(z) = 0$

8.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. $\left(\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{3x}\right)^{15}$ के प्रसार में, x से स्वतंत्र पद ($x \neq 0$) ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\sqrt{x} - \dfrac{k}{x^2}\quad{}^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद 405 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

3. $(1 - 3x + 7x^2)\,(1 - x)^{16}$ के प्रसार में x का गुणांक ज्ञात कीजिए।

4. $3x - \dfrac{2}{x^2}\quad{}^{15}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित के प्रसार में, मध्य-पद ज्ञात कीजिए:

(i) $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)^{10}$ (ii) $\left(3x - \dfrac{x^3}{6}\right)^9$

6. $(x - x^2)^{10}$ के प्रसार में x^{15} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

7. $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में $\frac{1}{x^{17}}$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

8. $\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^n$ के प्रसार में 6वाँ पद ज्ञात कीजिए, यदि इसके अंतिम पद से तीसरे पद का द्विपद गुणांक 45 है।

[**संकेत:** अंतिम पद से तीसरे पद का द्विपद गुणांक = प्रारंभ से तीसरे पद का द्विपद गुणांक = ${}^nC_2$]

9. यदि $(1 + x)^{18}$ के प्रसार में $(2r + 4)$वें और $(r - 2)$वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में, दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समांतर श्रेणी में हैं, तो दर्शाइए कि

$2n^2 - 9n + 7 = 0$ है।

11. $(1 + x + x^2 + x^3)^{11}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. यदि p एक वास्तविक संख्या है और $\left(\frac{p}{2} + 2\right)^8$ के प्रसार में मध्य-पद 1120 है, तो p ज्ञात कीजिए।

13. दर्शाइए कि $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ के प्रसार में मध्य-पद $\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2n-1)}{\lfloor n} \times (-2)^n$ है।

14. द्विपद, $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ में n ज्ञात कीजिए, यदि प्रारंभ से 7वें पद का अंतिम पद से 7वें पद से अनुपात $\frac{1}{6}$ है।

15. $(x + a)^n$ के प्रसार में, यदि विषम पदों के योग को O से तथा सम पदों के योग को E से निर्दिष्ट किया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $O^2 - E^2 = (x^2 - a^2)^n$ (ii) $4OE = (x + a)^{2n} - (x - a)^{2n}$

16. यदि $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ के प्रसार में x^p आता है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका गुणांक

$$\frac{\lfloor 2n}{\left\lfloor \frac{4n-p}{3} \right. \left\lfloor \frac{2n+p}{3} \right.}$$ है।

17. $(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 18 से 24 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

18. $(x+a)^{100}+(x-a)^{100}$ के प्रसार में सरलीकरण के बाद पदों की कुल संख्या है

(A) 50 (B) 202 (C) 51 (D) इनमें से कोई नहीं।

19. दिया हुआ है कि $r>1, n>2$ और $(1+x)^{2n}$ के द्विपद प्रसार में $(3r)$वें और $(r+2)$वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो

(A) $n=2r$ (B) $n=3r$ (C) $n=2r+1$ (D) इनमें से कोई नहीं

20. $(1+x)^{24}$ के प्रसार में दो उत्तरोत्तर पद, जिनके गुणांकों का अनुपात 1: 4 है, निम्नलिखित हैं

(A) तीसरा और चौथा (B) चौथा और पाँचवां (C) पाँचवां और छठा (D) छठा और सातवां

[संकेत: $\frac{{}^{24}C_r}{{}^{24}C_{r+1}}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r+1}{24-r}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4r+4=24-4 \Rightarrow \boxed{r=4}$]

21. $(1+x)^{2n}$ और $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसारों में x^n के गुणांकों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 3 (C) 3 : 1 (D) 2 : 1

[संकेत : ${}^{2n}C_n : {}^{2n-1}C_n$]

22. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समांतर श्रेणी में हैं, तो n का मान है:

(A) 2 (B) 7 (c) 11 (D) 14

[संकेत: $2\,{}^nC_2={}^nC_1+{}^nC_3 \Rightarrow n^2-9n+14=0 \Rightarrow n=2$ या 7]

23. यदि A और B क्रमशः $(1+x)^{2n}$ और $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसारों में x^n के गुणांक हैं, तो $\frac{A}{B}$ बराबर है:

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{n}$

[**संकेत:** $\frac{A}{B} = \frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n} = 2$]

24. यदि $\left(\frac{1}{x} + x\sin x\right)^{10}$ का मध्य-पद $7\frac{7}{8}$ है, तो x का मान है

(A) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (B) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (C) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (D) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

[**संकेत:** $T_6 = {}^{10}C_5 \frac{1}{x^5} \cdot x^5 \sin^5 x = \frac{63}{8} \Rightarrow \sin^5 x = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$]

प्रश्न 25 से 33 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

25. $(1 + x)^{30}$ के प्रसार में सबसे बड़ा गुणांक ________________ है।

26. $(x + y + z)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या ________________ है।

[**संकेत:** $(x + y + z)^n = [x + (y + z)]^n$]

27. $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{16}$ के प्रसार में अचर पद का मान ________________ है।

28. यदि $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ के प्रसार में प्रारंभ से और अंतिम पद से सातवां पद बराबर हैं, तो n ________________ के बराबर है।

[**संकेत** : $T_7 = T_{n-7+2} \Rightarrow {}^nC_6 \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-6} \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^6 = {}^nC_{n-6} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{n-6}$

$\Rightarrow \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-12} = \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{n-12}$ $\Rightarrow$ केवल तभी संभव जब $n - 12 = 0 \Rightarrow n = 12$]

29. $\left(\frac{1}{a}-\frac{2b}{3}\right)^{10}$ के प्रसार में $a^{-6}\, b^4$ का गुणांक __________ है।

[संकेत : $T_5 = {}^{10}C_4\left(\frac{1}{a}\right)^{b}\left(\frac{-2b}{3}\right)^{4} = \frac{1120}{27}\, a^{-6}b^{4}$]

30. $(a^3 + ba)^{28}$ के प्रसार में मध्य-पद __________ है।

31. $(1+x)^{p+q}$ के प्रसार में x^p और x^q के गुणांकों का अनुपात __________ है।
[**संकेत** : ${}^{p+q}C_p = {}^{p+q}C_q$]

32. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद का स्थान __________ है।

33. यदि 25^{15} को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल __________ है।

प्रश्न 34 से 40 तक, कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य हैं :

34. श्रेणी $\sum_{r=0}^{10} {}^{20}C_r$ का योग $2^{19}+\frac{{}^{20}C_{10}}{2}$ है।

35. व्यंजक $7^9 + 9^7$, 64 से विभाज्य है।
संकेत: $7^9 + 9^7 = (1 + 8)^7 - (1 - 8)^9$

36. $[(2x + y^3)^4]^7$ के प्रसार में पदों की संख्या 8 है।

37. $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में दोनों मध्य-पदों के गुणांकों का योग ${}^{2n-1}C_n$ के बराबर है।

38. संख्या 3^{400} के अंतिम दो अंक 01 हैं।

39. यदि $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र एक पद है, तो n, संख्या 2 का एक गुणज है।

40. $(a + b)^n$ जहाँ $n \in \mathbf{N}$, के प्रसार में पदों की संख्या घात n से एक कम है।

अध्याय 9

अनुक्रम तथा श्रेणी

9.1 समग्र अवलोकन (Overview)

अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, किसी नियमानुसार संख्याओं का एक निश्चित क्रम में विन्यास। अनुक्रम के पदों को हम $a_1, a_2, a_3, \ldots$, इत्यादि से निर्दिष्ट करते हैं जिसमें पदांक पद की स्थिति को निर्दिष्ट करते हैं।

उपर्युक्त के संदर्भ में अनुक्रम को किसी समुच्चय X में $f(n) = t_n \; \forall n \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण अथवा फलन $f: \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ के रूप में समझा जा सकता है। f का प्रांत प्राकृत संख्याओं का समुच्चय अथवा उपसमुच्चय है जो पदों की स्थिति को निर्दिष्ट करता है। यदि पदों के मान को निर्दिष्ट करने वाला इसका परिसर वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय **R** है तो यह वास्तविक अनुक्रम कहलाता है।

पदों की संख्या के अनुसार अनुक्रम परिमित अथवा अपरिमित होता है। हमें यह आशा नहीं करनी चाहिए कि अनुक्रम के पद किसी विशिष्ट सूत्र से ही अवश्य प्रदत्त होंगे।

यद्यपि हम पदों को प्राप्त करने के लिए किसी सैद्धान्तिक पद्धति अथवा नियम की आशा करते हैं। मान लीजिए, $a_1, a_2, a_3, \ldots$, अनुक्रम हैं, तब, व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ दिए हुए अनुक्रम से जुड़ी हुई श्रेणी कहलाती है। दिए हुए अनुक्रम के परिमित अथवा अपरिमित होने के अनुसार श्रेणी भी परिमित अथवा अपरिमित होती है।

टिप्पणी: *श्रेणी का उपयोग करने पर यह निरूपित योग का बोध कराता है न कि स्वयं योग का। निश्चित पैटर्नों का अनुसरण करने वाले अनुक्रम श्रेणी कहलाते हैं। श्रेणी में प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक निश्चित तरीके से प्रगति करता है।*

9.1.1 *समांतर श्रेढ़ी* (A.P.)

समांतर श्रेणी एक ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद उससे पूर्व पद में एक निश्चित संख्या (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) जोड़ने पर प्राप्त होता है।

अत: कोई अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ एक समांतर श्रेणी कहलाता है यदि उसमें $a_{n+1} = a_n + d$ $n \in \mathbf{N}$, इसमें d समांतर श्रेणी का सार्व अंतर कहलाता है। सामान्यत: समांतर श्रेणी के प्रथम पद को a से तथा अंतिम पद को l से निर्दिष्ट किया जाता है।

समांतर श्रेणी के व्यापक पद अथवा nवें पद का सूत्र

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)\,d} \text{ है।}$$

अंत से nवाँ पद $\quad a_n = l - (n-1)\,d$ से प्रदत्त है।

समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$S_n = \dfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)\,d\right] = \dfrac{n}{2}\,(a+l)$, होता है, जहाँ $l = a + (n-1)\,d$ समांतर श्रेणी का अंतिम पद है। व्यापक पद $a_n = S_n - S_{n-1}$ होता है।

n धनात्मक संख्याओं $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ का समांतर माध्य

$$\text{A.M.} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ होता है}$$

यदि a, A तथा b समांतर श्रेणी में हैं तो A, संख्या a तथा b का समांतर माध्य कहलाता है।

अर्थात् $$A = \frac{a+b}{2}$$

यदि किसी समांतर श्रेणी के पदों को समान अचर से जोड़ा घटाया, गुणा अथवा भाग कर दिया जाए तब भी वे पद समांतर श्रेणी में ही रहते हैं।

यदि $a_1, a_2, a_3 \dots$ एक ऐसा समांतर श्रेणी है जिसका सार्वअंतर d है, तो

(i) $a_1 \pm k, a_2 \pm k, a_3 \pm k, \dots$ भी सार्वअंतर d वाला एक समांतर श्रेणी होगा।

(ii) $a_1 k, a_2 k, a_3 k, \dots$ एवं $\dfrac{a_1}{k}, \dfrac{a_2}{k}, \dfrac{a_3}{k} \dots$ भी समांतर श्रेणी हैं जिनके सार्वअंतर क्रमशः

$dk\ (k \neq 0)$ एवं $\dfrac{d}{k}\ (k \neq 0)$ है।

यदि $a_1, a_2, a_3 \dots$ एवं $b_1, b_2, b_3 \dots$ दो समांतर श्रेणियाँ हैं, तो

(i) $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \dots$ भी समांतर श्रेणी हैं

(ii) $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$ एवं $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dfrac{a_3}{b_3}, \dots$ समांतर श्रेणी नहीं है।

यदि $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ समांतर श्रेणी में हैं, तो

(i) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$

(ii) $a_r = \dfrac{a_{r-k} + a_{r+k}}{2} \quad \forall\ k, 0 \le k \le n - r$

(iii) यदि किसी अनुक्रम का nवाँ पद n में एक रैखिक व्यंजक है तो वह अनुक्रम समांतर श्रेणी हैं।

(iv) यदि किसी अनुक्रम के nपदों का योग n में एक द्विघात व्यंजक है तो वह अनुक्रम समांतर श्रेणी है।

9.1.2 *गुणोत्तर श्रेणी (G.P.)*

गुणोत्तर श्रेणी एक ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, उससे पूर्व पद को किसी निश्चित शून्येत्तर अचर से गुणा करने पर प्राप्त होता है। यह शून्येत्तर अचर सार्व अनुपात कहलाता है। हम एक ऐसी गुणोत्तर श्रेणी लेते हैं जिसका प्रथम शून्येत्तर पद a तथा सार्वअनुपात r है अर्थात् $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेणी है।

यहाँ सार्व अनुपात $r = \dfrac{ar^{n-1}}{ar^{n-2}}$

गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक अथवा nवाँ पद $a_n = ar^{n-1}$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।

गुणोत्तर श्रेणी का अंतिम पद l, nवें पद के समान होता हैं और इसे $l = ar^{n-1}$ द्वारा प्राप्त किया जाता है। गुणोत्तर श्रेणी का अंत से nवाँ पद $a = \dfrac{l}{r^{n-1}}$ द्वारा प्राप्त होता है। प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad (\text{यदि } r \neq 1)$$

अथवा $S_n = na$ (यदि $r = 1$) द्वारा प्राप्त होता है।

यदि a, G, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो G संख्या a तथा b का गुणोत्तर माध्य कहलाता है और इसे

$G = \sqrt{ab}$ के द्वारा प्राप्त किया जाता है।

(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों को किसी शून्येत्तर अचर $(k \neq 0)$ से गुणा अथवा भाग कर दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त पद भी गुणोत्तर श्रेणी में होते हैं।

यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots$, गुणोत्तर श्रेणी है तो $a_1 k, a_2 k, a_3 k, \ldots$ तथा $\dfrac{a_1}{k}, \dfrac{a_2}{k}, \dfrac{a_3}{k}, \ldots$

भी गुणोत्तर श्रेणी होंगी और इनका सार्वअनुपात भी अपरिवर्तित रहेगा।

विशेषत: यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots$ भी गुणोत्तर श्रेणी है, तो

$\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3} \ldots$ भी गुणोत्तर श्रेणी ही है।

(ii) यदि $a_1, a_2, a_3 \ldots$ तथा $b_1, b_2, b_3 \ldots$ दो गुणोत्तर श्रेणियाँ हैं, तो $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \ldots$ तथा

$\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dfrac{a_3}{b_3}, \ldots$ भी गुणोत्तर श्रेणी हैं।

(iii) यदि $a_1, a_2, a_3 \ldots$ समांतर श्रेणी है $(a_i > 0 \; \forall \; i)$, तब, $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots$, गुणोत्तर श्रेणी है $(\forall \; x > 0)$

(iv) यदि $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ गुणोत्तर श्रेणी है, तब $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \ldots$

9.1.3 *विशेष अनुक्रमों के योग से संबंधित महत्त्वपूर्ण परिणाम*

(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग:

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग:

$$\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग:

$$\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

9.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 किसी समांतर श्रेणी का प्रथम, द्वितीय एवं अंतिम पद क्रमशः a, b एवं c हैं। दर्शाइए कि समांतर श्रेणी का योग $\frac{(b+c-2a)(c+a)}{2(b-a)}$ है।

हल मान लीजिए कि समांतर श्रेणी के पदों की संख्या n तथा सार्वअंतर d है।

क्योंकि प्रथम पद a है तथा द्वितीय पद b है,

इसलिए $$d = b - a$$

यह भी ज्ञात है कि अंतिम पद c है, इसलिए

$$c = a + (n-1)(b-a) \quad (\text{क्योंकि} \quad d = b - a)$$

$$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{c-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad n = 1 + \frac{c-a}{b-a} = \frac{b-a+c-a}{b-a} = \frac{b+c-2a}{b-a}$$

इसलिए $$S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{(b+c-2a)}{2(b-a)}(a+c)$$

उदाहरण 2 किसी समांतर श्रेणी का pवाँ पद a तथा qवाँ पद b है। सिद्ध कीजिए कि इसके $(p+q)$ पदों का योग $\frac{p+q}{2}\left[a+b+\frac{a-b}{p-q}\right]$ है।

हल मान लीजिए कि समांतर श्रेणी का प्रथम पद A तथा सार्वअंतर D है।

दिया हुआ है कि $t_p = a \Rightarrow \mathrm{A} + (p - 1)\,\mathrm{D} = a$ ... (1)

$t_q = b \Rightarrow \mathrm{A} + (q - 1)\,\mathrm{D} = b$ ... (2)

(1) में से (2) को घटाने पर, हम

$(p - 1 - q + 1)\,\mathrm{D} = a - b$ प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D} = \frac{a-b}{p-q} \quad \text{... (3)}$$

(1) तथा (2) को जोड़ने पर हम

$2\mathrm{A} + (p + q - 2)\,\mathrm{D} = a + b$ प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow \quad 2\mathrm{A} + (p + q - 1)\,\mathrm{D} = a + b + \mathrm{D}$$

$$\Rightarrow \quad 2\mathrm{A} + (p + q - 1)\,\mathrm{D} = a + b + \frac{a-b}{p-q} \quad \text{.. (4)}$$

अब $$\mathrm{S}_{p+q} = \frac{p+q}{2}\,[2\mathrm{A} + (p + q - 1)\,\mathrm{D}]$$

$$= \frac{p+q}{2}\left[a+b+\frac{a-b}{p-q}\right]$$

[(3) एवं (4) के प्रयोग से]

उदाहरण 3 यदि किसी समांतर श्रेणी के पदों की संख्या $(2n + 1)$ है तो सिद्ध कीजिए कि विषम पदों के योग का समपदों के योग से अनुपात $(n + 1) : n$ है।

हल मान लीजिए, समांतर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d है। यह भी मान लीजिए कि जिस समांतर श्रेणी के पदों की संख्या $(2n + 1)$ है उसके विषम पदों का योग S_1 है।

तो, $$\mathrm{S}_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}$$

$$\mathrm{S}_1 = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_{2n+1})$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[a + a + (2n+1-1)d\right]$$

$$= (n + 1)\,(a + nd)$$

इसी प्रकार यदि सम पदों के योग को S_2 द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, तो

$$S_2 = \frac{n}{2}\,[2a + 2nd] = n\,(a + nd)$$

अतः
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(n+1)\,(a+nd)}{n\,(a+nd)} = \frac{n+1}{n}$$

उदाहरण 4 प्रत्येक वर्ष के अंत में किसी मशीन का मूल्य उस वर्ष के प्रारंभिक मूल्य का 20% कम हो जाता है। यदि मशीन का प्रारंभिक मूल्य 1250 रुपये है तो 5 वर्ष के अंत में उसका मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल प्रत्येक वर्ष के अंत में मशीन का मूल्य पिछले वर्ष के मूल्य का 80% हो जाता है। इसलिए 5 वर्ष के अंत में मशीन के मूल्य का 5 बार अवमूल्यन होगा।

अतः हमें एक ऐसे गुणोत्तर श्रेणी का 6वाँ पद ज्ञात करना है जिसका प्रथम पद $a_1 = 1250$ है तथा सार्वअनुपात $r = 8$ है।

अतः 5 वर्ष के अंत में मशीन का मूल्य $= t_6 = a_1\, r^5 = 1250\,(.8)^5 = 409.6$

उदाहरण 5 समांतर श्रेणी a_1, a_2, a_3 ... के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, यदि $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 225$ दिया हुआ है।

हल हम जानते हैं कि किसी भी समांतर श्रेणी के प्रारंभ एवं अंत से समदूरस्थ पदों का योग समान होता है और यह प्रथम एवं अंतिम पद के योग के बराबर होता है।

इसलिए $\quad d = b - a$

अर्थात् $\quad a_1 + a_{24} = a_5 + a_{20} = a_{10} + a_{15}$

दिया हुआ है कि $\quad (a_1 + a_{24}) + (a_5 + a_{20}) + (a_{10} + a_{15}) = 225$

$\Rightarrow (a_1 + a_{24}) + (a_1 + a_{24}) + (a_1 + a_{24}) = 225$

$\Rightarrow \quad 3\,(a_1 + a_{24}) = 225$

$\Rightarrow \quad a_1 + a_{24} = 75$

हम जानते हैं कि $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$, जहाँ a समांतर श्रेणी का प्रथम पद और l अंतिम पद है।

अतः
$$S_{24} = \frac{24}{2}\,[a_1 + a_{24}] = 12 \times 75 = 900$$

उदारहण 6 समांतर श्रेणी बनाने वाली तीन संख्याओं का गुणनफल 224 है और सबसे बड़ी संख्या छोटी संख्या का सात गुना है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए समांतर श्रेणी की तीन संख्याएँ $a - d, a, a + d\ (d > 0)$ हैं।

अब, $(a - \text{d})\, a\, (a + \text{d}) = 224$

$\Rightarrow$ $a\,(a^2 - d^2) = 224$ ... (1)

क्योंकि सबसे बड़ी संख्या सबसे छोटी संख्या से सात गुना है अर्थात् $a + d = 7\,(a - \text{d})$

इसलिए $d = \dfrac{3a}{4}$

d का मान (1) में रखने पर, हमें

$$a\left(a^2 - \frac{9a^2}{16}\right) = 224 \text{ प्राप्त होता है।}$$

अर्थात् $a = 8$

एव $d = \dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{4} \times 8 = 6$ प्राप्त होता है

अतः वांछित तीन संख्याएँ 2, 8, 14 हैं।

उदाहरण 7 यदि x, y एवं z समांतर श्रेणी में हैं तो दर्शाइए कि $(x^2 + xy + y^2)$, $(z^2 + xz + x^2)$ एवं $(y^2 + yz + z^2)$ किसी समांतर श्रेणी के क्रमागत पद हैं।

हल पद $(x^2 + xy + y^2)$, $(z^2 + xz + x^2)$ एवं $(y^2 + yz + z^2)$ समांतर श्रेणी में होंगे यदि

$$(z^2 + xz + x^2) - (x^2 + xy + y^2) = (y^2 + yz + z^2) - (z^2 + xz + x^2)$$

अर्थात् $z^2 + xz - xy - y^2 = y^2 + yz - xz - x^2$

अर्थात् $x^2 + z^2 + 2xz - y^2 = y^2 + yz + xy$

अर्थात् $(x + z)^2 - y^2 = y\,(x + y + z)$

अर्थात् $x + z - y = y$

अर्थात् $x + z = 2y$

यह सत्य है क्योंकि x, y, z समांतर श्रेणी में हैं। अतः $x^2 + xy + y^2$, $z^2 + xz + x^2$, $y^2 + yz + z^2$ भी समांतर श्रेणी में हैं।

उदाहरण 8 यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $c^2 - d^2$ भी गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

हल मान लीजए कि दी हुई गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात r है।

इस प्रकार $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = r$

$\Rightarrow$ $b = ar,\ c = br = ar^2,\ d = cr = ar^3$

अब $a^2 - b^2 = a^2 - a^2r^2 = a^2\,(1 - r^2)$

$$b^2 - c^2 = a^2r^2 - a^2r^4 = a^2r^2\,(1 - r^2)$$

एवं $$c^2 - d^2 = a^2r^4 - a^2r^6 = a^2r^4\,(1 - r^2)$$

इसलिए $$\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2} = \frac{c^2-d^2}{b^2-c^2} = r^2$$

अत: $a^2 - b^2, b^2 - c^2, c^2 - d^2$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 9 यदि किसी समांतर श्रेणी के m पदों का योग अगले n पदों अथवा p पदों के योग के बराबर है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

हल मान लीजिए, $a, a + d, a + 2d, \ldots$. समांतर श्रेणी है।

हमें प्राप्त है, $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n}$ ... (1)

(1) के दोनों पक्षों में $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ जोड़ने पर हमें

$2\,[a_1 + a_2 + \ldots + a_m] = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+n}$ प्राप्त होता है। अर्थात्

$2\,S_m = S_{m+n}$

इसलिए, $2\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}=\frac{m+n}{2}\{2a+(m+n-1)d\}$

उपरोक्त समीकरण में $2a + (m - 1)\,d = x$ प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$mx = \frac{m+n}{2}(x + nd)$$ प्राप्त होता है।

$$(2m - m - n)\,x = (m + n)\,nd$$

$\Rightarrow$ $$(m - n)\,x = (m + n)\,nd \quad \ldots (2)$$

इसी प्रकार यदि $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a_{m+1} \ldots + a_{m+p}$

दोनों पक्षों में $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ जोड़ने पर हमें,

$$2\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1} + \ldots + a_{m+p}$$ प्राप्त होता है।

अथवा $$2\,S_m = S_{m+p}$$

$\Rightarrow$ $$2\,\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\} = \frac{m+p}{2}\{2a + (m + p - 1)d\}$$

अर्थात् $$(m - p)\,x = (m + p)pd \quad \ldots (3)$$

(2) को (3) से भाग करने पर हम

$$\frac{(m-n)x}{(m-p)x}=\frac{(m+n)nd}{(m+p)pd}$$ प्राप्त करते हैं।

$\Rightarrow \quad (m-n)(m+p)p = (m-p)(m+n)n$

दोनों पक्षों को mnp से भाग देने पर हम

$$(m+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) = (m+n)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\right)$$ प्राप्त करते हैं

$$= (m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right) = (m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

उदाहरण 10 यदि समांतर श्रेणी $a_1, a_2, ..., a_n$ का सार्वअंतर d है $(d \neq 0)$ तो सिद्ध कीजिए की श्रेणी $\sin d$ (cosec a_1 cosec a_2 + cosec a_2 cosec a_3 + ...+ cosec a_{n-1} cosec a_n) का योग $\cot a_1 - \cot a_n$ के बराबर है।

हल हमें प्राप्त है,

$\sin d$ (cosec a_1 cosec a_2 + cosec a_2 cosec a_3 + ...+ cosec a_{n-1} cosec a_n)

$$= \sin d\left[\frac{1}{\sin a_1 \sin a_2}+\frac{1}{\sin a_2 \sin a_3}+...+\frac{1}{\sin a_{n-1} \sin a_n}\right]$$

$$= \frac{\sin(a_2-a_1)}{\sin a_1 \sin a_2}+\frac{\sin(a_3-a_2)}{\sin a_2 \sin a_3}+...+\frac{\sin(a_n-a_{n-1})}{\sin a_{n-1} \sin a_n}$$

$$= \frac{\sin a_2 \cos a_1 - \cos a_2 \sin a_1)}{\sin a_1 \sin a_2}+\frac{\sin a_3 \cos a_2 - \cos a_3 \sin a_2)}{\sin a_2 \sin a_3}+...+\frac{\sin a_n \cos a_{n-1} - \cos a_n \sin a_{n-1})}{\sin a_{n-1} \sin a_n}$$

$= (\cot a_1 - \cot a_2) + (\cot a_2 - \cot a_3) + ... + (\cot a_{n-1} - \cot a_n)$

$= \cot a_1 - \cot a_n$

उदाहरण 11

(i) यदि चार विभिन्न धनात्मक राशियाँ a, b, c, d समांतर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $bc > ad$

(ii) यदि चार विभिन्न धनात्मक राशियाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिए कि $a + d > b + c$

हल

(i) क्योंकि a, b, c, d समांतर श्रेणी में हैं, इसलिए प्रथम तीन पदों के लिए A.M. > G.M.

अतः $b > \sqrt{ac}$ $\left(\frac{a+c}{2}=b\right)$

वर्ग करने पर, $b^2 > ac$ ... (1)

इसी प्रकार अंतिम तीन पदों के लिए

AM > GM

$c > \sqrt{bd}$ $\left(\frac{b+d}{2}=c\right)$

$c^2 > bd$ ... (2)

(1) तथा (2) को गुणा करने पर हम

$b^2c^2 > (ac)\,(bd)$ प्राप्त करते हैं।

$\Rightarrow$ $bc > ad$

(ii) क्योंकि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में है

प्रथम तीन पदों के लिए A.M. > G.M

अर्थात् $\frac{a+c}{2} > b$ (क्योंकि $\sqrt{ac}=b$)

$\Rightarrow$ $a + c > 2b$ ... (3)

इसी प्रकार अंतिम तीन पदों के लिए

$\frac{b+d}{2} > c$ (क्योंकि $\sqrt{bd}=c$)

$\Rightarrow$ $b + d > 2c$ ... (4)

(3) एवं (4) को जोड़ने पर हम

$(a + c) + (b + d) > 2b + 2c$ प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow$ $a + d > b + c$

उदाहरण 12 यदि a, b, c किसी समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं और x, y, z किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$x^{b-c} \cdot y^{c-a} \cdot z^{a-b} = 1$

हल a, b, c समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं

इसलिए $$b - a = c - b = d \quad \text{(मान लीजिए)}$$

$$c - a = 2d$$

$$a - b = -d$$

अत:, $$x^{b-c} \cdot y^{c-a} \cdot z^{a-b} = x^{-d} \cdot y^{2d} \cdot z^{-d}$$

$= x^{-d} (\sqrt{xz})^{2d} . z^{-d}$ (क्योंकि x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में होने के कारण $y = (\sqrt{xz})$)

$= x^{-d} \cdot x^{d} \cdot z^{d} \cdot z^{-d}$

$= x^{-d+d} \cdot z^{d-d}$

$= x^{\circ} z^{\circ} = 1$

उदाहरण 13 यदि $\sum_{k=1}^{n} f(a+k) = 16(2^n - 1)$ जहाँ फलन f, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ को सभी प्राकृत संख्याओं x, y के लिए संतुष्ट करता है एवं $f(1) = 2$ है, तो प्राकृत संख्या a ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \text{ और } f(1) = 2$$

इसलिए $$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 2^2$$

$$f(3) = f(1 + 2) = f(1) \cdot f(2) = 2^3$$

$$f(4) = f(1 + 3) = f(1) \cdot f(3) = 2^4$$

और इस प्रकार इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हुए हम

$$f(k) = 2^k \text{ एवं } f(a) = 2^a \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

अत: $$\sum_{k=1}^{n} f(a+k) = \sum_{k=1}^{n} f(a) . f(k)$$

$$= f(a) \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$= 2^a (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n)$$

$$= 2^a \left\{\frac{2.(2^n - 1)}{2-1}\right\} = 2^{a+1}(2^n - 1) \qquad \text{... (1)}$$

परंतु $$\sum_{k=1}^{n} f(a+k) = 16(2^n - 1) \text{ दिया हुआ है।}$$

इसलिए $$2^{a+1}(2^n - 1) = 16(2^n - 1)$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{a+1} = 2^4 \Rightarrow a + 1 = 4$$
$$\Rightarrow \qquad a = 3$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 14 *से* 23 *तक में दिए हुए चार विकल्पों से सही उत्तर का चयन कीजिए।*

उदाहरण 14 अनुक्रम को निम्नलिखित में से किस रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

(A) एक संबंध, जिसका परिसर $\subseteq$ **N** (प्राकृत संख्याएं)

(B) एक फलन जिसका प्रांत $\subseteq$ **N**

(C) एक फलन जिसका प्रांत $\subseteq$ **N**

(D) वास्तविक मानों वाली श्रेणी।

हल (C) सही उत्तर है। अनुक्रम को एक फलन $f: \mathbf{N} \to X$ के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसका प्रांत $\subseteq$ **N**

उदाहरण 15 यदि x, y, z धनात्मक पूर्णांक हैं तो व्यंजक $(x + y)(y + z)(z + x)$ का मान है:

(A) $= 8xyz$ (B) $> 8xyz$ (C) $< 8xyz$ (D) $= 4xyz$

हल (B) सही उत्तर है क्योंकि

A.M. > G.M., $\dfrac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, $\dfrac{y+z}{2} > \sqrt{yz}$ और $\dfrac{z+x}{2} > \sqrt{zx}$

तीनों असमिकाओं को गुणा करने पर हम

$$\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{y+z}{2} > \sqrt{(xy)(yz)(zx)}$$

या $\quad (x + y)(y + z)(z + x) > 8\, xyz$

उदाहरण 16 धनात्मक पदों की किसी गुणोत्तर श्रेणी का कोई भी पद अगले दो पदों के योग के समान है तो गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात है:

(A) $\sin 18°$ (B) $2 \cos 18°$ (C) $\cos 18°$ (D) $2 \sin 18°$

हल (D) सही उत्तर है क्योंकि

$$t_n = t_{n+1} + t_{n+2}$$
$$\Rightarrow \quad ar^{n-1} = ar^n + ar^{n+1}$$
$$\Rightarrow \quad 1 = r + r^2$$
$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

क्योंकि $r > 0$, इसलिए $r = 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 2\sin 18°$

उदाहरण 17 किसी समांतर श्रेणी का pवाँ पद q है एवं $(p+q)$वाँ पद 0 है। उस श्रेणी का qवाँ पद है:

(A) $-p$ (B p (C) $p+q$ (D) $p-q$

हल (B) सही उत्तर है

मान लीजिए a और d क्रमशः प्रथम पद और सार्वअंतर हैं

इसलिए $T_p = a + (p-1)d = q$ और ... (1)

$T_{p+q} = a + (p+q-1)d = 0$ ... (2)

(2) में से (1) को घटाने पर $qd = -q$ प्राप्त करते हैं। d का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम

$$a = q - (p-1)(-1) = q + p - 1$$

अब $T_q = a + (q-1)d = q + p - 1 + (q-1)(-1)$

$= q + p - 1 - q + 1 = p$

उदाहरण 18 मान लीजिए कि किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योग S है, गुणफल p है एवं व्युत्क्रमों का योग R है, तो $P^2 R^3 : S^3$ बराबर है:

(A) $1:1$ (B) $(\text{सार्वअनुपात})^n : 1$

(C) $(\text{प्रथम पद})^2 : (\text{सार्वअनुपात})^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल (A) सही उत्तर है।

आइए एक गुणोत्तर श्रेणी लेते हैं जिसके तीन पद $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

तब $$S = \frac{a}{r} + a + ar = \frac{a(r^2+r+1)}{r}$$

$$P = a^3,\ R = \frac{r}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} = \frac{1}{a}\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right)$$

$$\frac{P^2R^3}{S^3} = \frac{a^6 \cdot \frac{1}{a^3}\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right)^3}{a^3\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right)^3} = 1$$

इसलिए वांछित अनुपात 1: 1 है।

उदाहरण 19 श्रेणी $3 + 7 + 11 + \ldots$ एवं $1 + 6 + 11 + \ldots$ का 10 वाँ उभयनिष्ठ पद निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) 191 (B) 193 (C) 211 (D) इनमें से कोई नहीं।

हल (A) सही उत्तर है

प्रथम उभयनिष्ठ पद 11 है।

इससे अगला पद सार्वअंतर 4 एवं 5 के ल.स.व. अर्थात् 20 को जोड़ने पर प्राप्त होता है।

इसलिए 10वाँ उभयनिष्ठ पद = समांतर श्रेणी का T_{10} जिसमें $a = 11$ एवं $d = 20$.

$T_{10} = a + 9\,d = 11 + 9\,(20) = 191$

उदाहरण 20 एक गुणोत्तर श्रेणी में पदों की संख्या सम है। यदि सभी पदों का योग विषम पदों के योग का 5 गुना है, तो गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात हैं:

(A) $\frac{-4}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (C) है।

आइए एक ऐसी गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, \ldots$ लेते हैं जिसके पदों की संख्या $2n$ है।

हम $\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{5a\left((r^2)^n-1\right)}{r^2-1}$ प्राप्त करते हैं।

(क्योंकि विषम पदों का सार्वअनुपात r^2 होगा और पदों की संख्या n होगी)

$$\Rightarrow \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = 5\frac{a(r^{2n}-1)}{(r^2-1)}$$

$\Rightarrow a\,(r + 1) = 5a$, अर्थात् $r = 4$

उदाहरण 21 व्यंजक $3^x + 3^{1-x}$, $x \in \mathbf{R}$ का न्यूनतम मान है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$

हल सही उत्तर (D) है।

हम जानते हैं कि धनात्मक संख्याओं के लिए A.M. $\geq$ G.M

इसलिए $\frac{3^x+3^{1-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{1-x}}$

$$\Rightarrow \frac{3^x+3^{1-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot \frac{3}{3^x}}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{1-x} \geq 2\sqrt{3}$$

9.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A)

1. एक समांतर श्रेणी का प्रथम पद a है एवं प्रथम p पदों का योग शून्य है। दर्शाइए कि इसके अगले q पदों का योग $\dfrac{-a(p+q)q}{p-1}$ है [**संकेत:** वांछित योग $= S_{p+q} - S_p$]

2. एक व्यक्ति 20 वर्ष में 66000 रुपये बचाता है। प्रथम वर्ष के पश्चात् प्रत्येक परवर्ती वर्ष में वह पिछले वर्ष की तुलना में 200 रुपये अधिक बचाता है। ज्ञात कीजिए कि वह व्यक्ति प्रथम वर्ष में कितने रुपये बचाता था?

3. एक व्यक्ति 5200 रुपये के प्रारंभिक वेतन पर किसी पद को स्वीकार करता है। अगले ही महीने से उसे प्रत्येक महीने 320 रुपये की वेतन वृद्धि प्राप्त होती है।

(a) उसका दसवें महीने का वेतन ज्ञात कीजए

(b) प्रथम वर्ष में उसने कुल कितना धन अर्जित किया?

4. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के pवाँ एवं qवाँ पद क्रमशः q एवं p है तो सिद्ध कीजिए कि उस श्रेणी का $(p+q)$वाँ पद $\left(\dfrac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ है।

5. एक बढ़ई को 192 खिड़कियों के फ्रेम तैयार करने के लिए काम पर रखा गया । प्रथम दिन उसने पाँच फ्रेम बनाये और उसके पश्चात् प्रतिदिन पिछले दिन की तुलना में 2 फ्रेम अधिक बनाए। ज्ञात कीजिए कि कार्य को पूरा करने में उसने कितने दिन लगाए?

6. हम जानते हैं कि त्रिभुज के अंत: कोणों का योग 180° होता है। सिद्ध कीजिए कि 3, 4, 5, 6 .... भुजाओं वाले बहुभुजों के अंत: कोणों का योग एक समांतर श्रेणी बनाता है। 21 भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों का योग ज्ञात कीजिए।

7. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 20 सेमी लंबी है। प्रथम त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाकर एक दूसरी त्रिभुज पहली त्रिभुज के अंदर बनायी जाती है। यह प्रक्रम चलता ही रहता है तो इस प्रकार बनी हुई (छठी) अंत: समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. एक आलू दौड़ में 20 आलू एक ही पंक्ति में 4 मीटर के अंतराल पर रखे गये हैं जिसमें प्रथम आलू दौड़ शुरू होने वाले बिंदु से 24 मीटर की दूरी पर रखा गया है। एक प्रतिभागी को एक समय में एक आलू को उठाकर लाते हुए सभी आलुओं को वापस उस बिंदु पर लाना है जहाँ से दौड़ शुरू हुई है। सभी आलुओं को वापस लाने के लिए उसे कितनी दूरी तय करनी पड़ेगी।

9. किसी क्रिकेट टूर्नामेंट में 16 विद्यालयों की टीम हिस्सा लेती है। सभी टीमों के लिए पुरस्कार राशि के रूप में 8000 रुपये की राशि वितरित की जानी है। यदि अंतिम टीम को पुस्कार राशि के रूप में 275 रुपये दिए जाते हैं और बारी–बारी से आने वाली प्रत्येक टीम का पुरस्कार एक

निश्चित राशि से बढ़ाया जाता है। ज्ञात कीजिए कि प्रथम स्थान पाने वाली टीम को कितनी राशि प्राप्त होगी?

10. यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ समांतर श्रेणी में हैं जहाँ $a_i > 0 \ \forall\ i$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

11. श्रेणी $(3^3 - 2^3) + (5^3 - 4^3) + (7^3 - 6^3) + ...$ का योग (i) n पदों तक (ii) 10 पदों तक, ज्ञात कीजिए।

12. किसी समांतर श्रेणी का rवाँ पद ज्ञात कीजिए यदि उसके प्रथम n पदों का योग $2n + 3n^2$ है।

[**संकेत:** $a_n = S_n - S_{n-1}$]

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

13. किंहीं दो संख्याओं के बीच A समांतर माध्य है और G_1, G_2 दो गुणोत्तर माध्य हैं, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$2A=\frac{G_1^2}{G_2}+\frac{G_2^2}{G_1}$$

14. यदि $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_n$, समांतर श्रेणी में है जिसका सार्वअंतर d हैं, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\sec\theta_1 \sec\theta_2 + \sec\theta_2 \sec\theta_3 + ... + \sec\theta_{n-1} \sec\theta_n = \frac{\tan\theta_n - \tan\theta_1}{\sin d}.$$

15. यदि किसी समांतर श्रेणी के p पदों का योग q है और q पदों का योग p है, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेणी के $p + q$ पदों का योग $-(p + q)$ है। उस समांतर श्रेणी के प्रथम $p - q$ $(p > q)$ पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

16. किसी समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी दोनों के pवाँ, qवाँ एवं rवाँ पद क्रमशः a, b एवं c है, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 17 से 26 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए। (M.C.Q)

17. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग

$S_n = 3n + 2n^2$, है, तो उस समांतर श्रेणी का सार्वअंतर है–

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 4

18. एक गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद 4 है। इसके प्रथम पाँच पदों का गुणनफल है–

(A) 4^3 (B) 4^4 (C) 4^5 (D) इनमें से कोई नहीं

19. यदि किसी समांतर श्रेणी के 9वें पद का 9 गुना और उसके 13वें पद के 13 गुना के बराबर है, तो उस समांतर श्रेणी का 22वाँ पद है–

(A) 0 (B) 22 (C) 220 (D) 198

20. यदि $x, 2y, 3z$ समांतर श्रेणी में हैं जबकि x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात है–

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

21. यदि किसी समांतर श्रेणी के लिए $S_n = q\,n^2$ एवं $S_m = qm^2$, जहाँ S_r समांतर श्रेणी के r पदों में योग को निर्दिष्ट करता है, तो S_q बराबर है–

(A) $\frac{q^3}{2}$ (B) mnq (C) q^3 (D) $(m + n)\,q^2$

22. मान लीजिए कि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों के योग को S_n से निर्दिष्ट किया जाता है। यदि $S_{2n} = 3S_n$ तो $S_{3n} : S_n$ बराबर है–

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

23. $4^x + 4^{1-x}$, $x \in \mathbf{R}$ का न्यूनतम मान है–

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 0

24. मान लीजिए कि S_n प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों के योग को निर्दिष्ट करता है एवं s_n प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग को निर्दिष्ट करता है, तो $\sum_{r=1}^{n} \frac{S_r}{s_r}$ बराबर है।

(A) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (B) $\frac{n(n+1)}{2}$

(C) $\frac{n^2+3n+2}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

25. यदि t_n श्रेणी $2 + 3 + 6 + 11 + 18 + \ldots$ के nवें पद को निर्दिष्ट करता है, तो t_{50} का मान है–

(A) $49^2 - 1$ (B) 49^2 (C) $50^2 + 1$ (D) $49^2 + 2$

26. लकड़ी के ठोस आयताकार खंड के तीन असमान किनारों की लंबाई गुणोत्तर श्रेणी में है। उस लकड़ी के खंड का आयतन 216 घन सेमी एवं कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 252 वर्ग सेमी है। सबसे लंबे किनारे की लंबाई है।

(A) 12 cm (B) 6 cm (C) 18 cm (D) 3 cm

प्रश्न संख्या 27 से 29 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

27. a, b, c को गुणोत्तर श्रेणी में होने के लिए, $\frac{a-b}{b-c}$ का मान .... के समान है।

28. किसी समांतर श्रेणी के प्रारंभ एवं अंत से समदूरस्थ पदों का योग........... के समान है।

29. एक गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद 4 है, तो प्रथम पाँच पदों का गुणनफल .... है।

बताइए, प्रश्न संख्या 30 से 34 तक में दिए हुए कथन सत्य हैं अथवा असत्य हैं।

30. दो अनुक्रम एक साथ समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी नहीं हो सकते है।

31. प्रत्येक श्रेणी एक अनुक्रम होता हैं परंतु यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक अनुक्रम एक श्रेणी होता है।

32. किसी समांतर श्रेणी के प्रथम पद के अतिरिक्त कोई भी पद स्वयं से समदूरस्थ पदों के योग के आधे के समान होता है।

33. दो गुणोत्तर श्रेणियों का योग अथवा अंतर भी एक गुणोत्तर श्रेणी होता है।

34. यदि किसी अनुक्रम के n पदों का योग एक द्विघात व्यंजक है तो वह अनुक्रम हमेशा एक समांतर श्रेणी को निरुपित करता है।

स्तंभ I में दिए हुए प्रश्नों का स्तंभ II में दिए हुए उत्तरों में से सही उत्तर के साथ मिलान कीजिए:

35.

स्तंभ I	**स्तंभ II**
(a) $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$	(i) समांतर श्रेणी
(b) $2, 3, 5, 7$	(ii) अनुक्रम
(c) $13, 8, 3, -2, -7$	(iii) गुणोत्तर श्रेणी

36.

स्तंभ I	**स्तंभ II**
(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$	(i) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$	(ii) $n(n+1)$
(c) $2 + 4 + 6 + ... + 2n$	(iii) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(d) $1 + 2 + 3 + ... + n$	(iv) $\frac{n(n+1)}{2}$

अध्याय 10

सरल रेखाएँ

10.1 समग्र अवलोकन (Overviews)

10.1.1 *रेखा की ढाल (Slope of a line)*

यदि कोई रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में कोण θ बनाती है, तो $\tan\theta$ का मान रेखा की ढाल कहलाता है और इसे m से निर्दिष्ट करते हैं।

बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरने वाली रेखा का ढाल

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ से प्राप्त होता है।

10.1.2 ***दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two lines):-*** दो रेखाएँ, जिनके ढाल m_1 तथा m_2 हैं, के बीच का कोण θ हमें

$$\tan\theta = \pm\frac{(m_1 - m_2)}{1 + m_1 m_2}$$ से प्राप्त होता है।

यदि रेखाएँ समांतर हैं, तो $m_1 = m_2$.

यदि रेखाएँ एक दूसरे पर लंब है, तो $m_1 m_2 = -1$.

10.1.3 ***तीन बिंदुओं की संरेखता (Collinearity of three points):-*** यदि तीन बिंदु $P(h, k)$, $Q(x_1, y_1)$ एवं $R(x_2, y_2)$ इस प्रकार हैं कि PQ का ढाल = QR का ढाल अर्थात् $\dfrac{y_1 - k}{x_1 - h} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

अथवा $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$ तब वे तीनों बिंदु संरेख कहलाते हैं।

10.1.4 *रेखा के समीकरण के विविध रूप (Various forms of the equation of a line)*

(i) यदि कोई रेखा x-अक्ष के समांतर एवं a दूरी पर स्थित है, तब रेखा का समीकरण $y = \pm a$ होता है।

(ii) यदि कोई रेखा y-अक्ष के समांतर है एवं y अक्ष से b दूरी पर है, तो रेखा का समीकरण $x = \pm b$ होता है।

(iii) बिंदु-ढाल रूप : बिंदु (x_0, y_0) से गुजरने वाली रेखा, जिसकी ढाल m हो, उसका समीकरण $y - y_0 = m(x - x_0)$ से प्राप्त होता है।

(iv) दो–बिंदु रूप : दो बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$ होता है।

(v) ढाल–अंतः खंड रूप : y-अक्ष पर अंत:खंड c काटने तथा ढाल m वाली रेखा का समीकरण $y = mx + c$ है। ध्यान दीजिए कि c का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होगा यदि y-अक्ष पर अंत:खंड क्रमशः धनात्मक अथवा ऋणात्मक भाग पर बना है।

(vi) अंतः खंड रूपः x- अक्ष एवं y-अक्ष पर क्रमशः a तथा b अंत:खंड बनाने वाली रेखा का समीकरण $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(vii) अभिलम्ब रूपः मान लीजिए कि निम्नलिखित आंकड़ों वाली एक रेखा जो ऊर्ध्वाधर नहीं है,

(a) मूल बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई p

(b) अभिलम्ब द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाया गया कोण ω,

तब रेखा का समीकरण $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ है।

10.1.5 *रेखा का व्यापक समीकरण*

$Ax + By + C = 0$ के रूप वाला समीकरण जहाँ A और B एक साथ शून्य नहीं हैं, रेखा का व्यापक समीकरण कहलाता है।

$Ax + By + C = 0$ के विभिन्न रूपः

रेखा के व्यापक रूप को विभिन्न रूपों में परिवर्तित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दिया हुआ है:

(i) ढाल–अंत:खंड रूप : यदि $B \neq 0$, तब $Ax + By + C = 0$ को

$y=\dfrac{-A}{B}x+\dfrac{-C}{B}$ अथवा $y = mx + c$ जहाँ $m=\dfrac{-A}{B}$ तथा $c=\dfrac{-C}{B}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि $B = 0$, तब $x = \dfrac{-C}{A}$ यह एक उर्ध्वाधर रेखा है जिसकी ढाल अपरिभाषित है और x-अंत:खंड $\dfrac{-C}{A}$ है।

(ii) अंत:खंड रूपः यदि $C \neq 0$, तब $Ax + By + C = 0$ को, $\dfrac{x}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$ अथवा $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

जहाँ $a = \dfrac{-C}{A}$ तथा $b = \dfrac{-C}{B}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि $C = 0$, तब $Ax + By + C = 0$ को $Ax + By = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक ऐसी रेखा का समीकरण है जो मूल बिंदु से गुजरती है और इसलिए दोनों अक्षों पर इसके अंत:खंड शून्य हैं।

(iii) अभिलम्ब रूप: समीकरण $Ax + By + C = 0$ का अभिलम्ब रूप

$x \cos\omega + y \sin\omega = p$ है जहाँ

$$\cos\omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ एवं } p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ हैं।}$$

[*टिप्पणी : यहाँ पर चिह्नों के उचित चयन की आवश्यकता है ताकि p हमेशा धनात्मक रहें।*]

10.1.6 *एक बिंदु की रेखा से दूरी:*

बिंदु $P(x_1, y_1)$ की रेखा $Ax + By + C = 0$ से लंबवत् दूरी (अथवा दूरी), $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ होती है।

दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समांतर रेखाओं $y = mx + c_1$ एवं $y = mx + c_2$ के बीच की दूरी $d = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ होती है।

10.1.7 *बिंदुपथ एवं बिंदुपथ का समीकरण*

किन्हीं दी हुई शर्तों के अंतर्गत किसी बिंदु के भ्रमण से बना हुआ वक्र, उस बिंदु का बिंदुपथ कहलाता है। निर्देशांक (h, k), वाले बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात करने के लिए h एवं k को सम्मिलित करने वाली शर्त की अभिव्यक्ति कीजिए। यदि कोई चर है तो उसे विलुप्त कीजिए और P का बिंदुपथ ज्ञात करने के लिए अंत में h को x से एवं k को y से प्रतिस्थापित कीजिए।

10.1.8 ***दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन:*** दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(i) प्रतिच्छेद करती हैं, यदि $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

(ii) समांतर एवं भिन्न-भिन्न होती हैं, यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

(iii) संपाती होती हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

टिप्पणी:

- बिंदु (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) किसी रेखा $ax + by + c = 0$ के एक ही दिशा या विपरीत दिशाओं में स्थित होते हैं यदि $ax_1 + by_1 + c$ एवं $ax_2 + by_2 + c$ के चिह्न क्रमशः समान अथवा विपरीत होते हैं।
- दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + 2 = 0$ एक दूसरे पर लंब होती हैं यदि $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 + k(ax_2 + by_2 + c_2) = 0$ है। k का मान प्रश्न में दी हुई अतिरिक्त शर्त का उपयोग करते हुए ज्ञात किया जाता है।

10.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण (S.A.)

उदाहरण 1 बिंदु (2, 3) से गुजरने वाली तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $30°$ का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ दी हुई रेखा का ढाल $m = \tan\theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है तथा दिया हुआ बिंदु (2, 3) है। इसलिए बिंदु-ढाल सूत्र के उपयोग से रेखा का समीकरण

$y - 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ अथवा $x - \sqrt{3y} + (3\sqrt{3} - 2) = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2 एक ऐसी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके ऊपर मूल बिंदु से खींचे गये लम्ब-खंड की लंबाई 4 इकाई है और लंब खंड का धनात्मक x-अक्ष के साथ झुकाव $30°$ है।

हल रेखा के समीकरण का लंब रूप $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ है। यहाँ $p = 4$ and $\omega = 30°$

इसलिए दी हुई रेखा का समीकरण

$x\cos 30° + y\sin 30° = 4$ है।

$x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\,\frac{1}{2} = 4$ अथवा $\sqrt{3}\,x + y = 8$

उदाहरण 3 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सरल रेखा का समीकरण $Ax + By + C = 0$ के रूप में होता है जहाँ A, B तथा C अचर हैं।

हल कोई दी हुई सरल रेखा या तो y-अक्ष को काटती है या y-अक्ष के समांतर होती है या y-अक्ष के समांती होती है। हम जानते है कि y-अक्ष को काटने वाली (जिसका y अंतः खंड होता है) रेखा

का समीकरण $y = mx + b$ के रूप का होता है। इसके अतिरिक्त यदि रेखा y-अक्ष के समांतर या संपाती है तो इसका समीकरण $x = x_1$ के रूप का होता है, जहाँ संपाती होने की स्थिति में $x_1 = 0$ लिया जाता है। ये दोनों ही समीकरण प्रश्न में दिये हुए समीकरण के रूप में सन्निहित हैं अतः इस प्रकार वांछित परिणाम सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 4 रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब एवं बिन्दु $(1, 2)$ से जाने वाले रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब जिस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है उसका ढाल m है। दी हुई रेखा $y = (-1)\,x - 7$ का ढाल -1 है। इसलिए रेखाओं के लम्ब होने की शर्त का उपयोग करते हुए हम $m \times (-1) = -1$ या $m = 1$ (क्यों) प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार रेखा का वांछित समीकरण $y - 1 = (1)\,(x - 2)$ या $y - 1 = x - 2$ या $x - y - 1 = 0$ है।

उदाहरण 5 रेखा $3x + 4y = 9$ एवं $6x + 8y = 15$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल रेखा $3x + 4y = 9$ एवं $6x + 8y = 15$ के समीकरणों को पुनः

$3x + 4y - 9 = 0$ एवं $3x + 4y - \dfrac{15}{2} = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

क्योंकि इन रेखाओं का ढाल एक समान है और इसलिए ये एक दूसरे के समांतर हैं। इसलिए इन रेखाओं के बीच की दूरी

$$\left|\frac{9 - \frac{15}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \frac{3}{10} \text{ है।}$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि चर रेखा $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ का अक्षों के बीच की दूरी के मध्य बिंदु का बिंदुपथ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{4}{p^2}$ है जहाँ p एक अचर है।

हल दी हुई रेखा के समीकरण को अंतःखंड रूप में परिवर्तित करने पर हम $\dfrac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$ प्राप्त करते हैं। यह रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष को जिन बिंदुओं पर काटती है उनके निर्देशांक क्रमशः $\left(\dfrac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ एवं $\left(0, \dfrac{p}{\sin\alpha}\right)$ प्राप्त होते हैं।

मान लीजिए, बिंदुओं $\left(\dfrac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ एवं $\left(0, \dfrac{p}{\sin\alpha}\right)$ को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु (h, k) है।

तब $h = \dfrac{p}{2\cos\alpha}$ एवं $k = \dfrac{p}{2\sin\alpha}$ (क्यों)

$\cos\alpha = \dfrac{p}{2h}$ एवं $\sin\alpha = \dfrac{p}{2k}$

दोनों ओर वर्ग करके जोड़ने पर

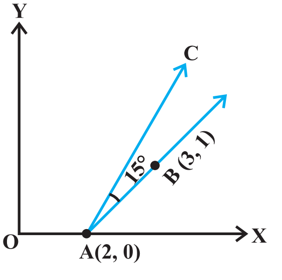
$\dfrac{p^2}{4h^2} + \dfrac{p^2}{4k^2} = 1$ या $\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{4}{p^2}$

इसलिए वांछित बिंदु पथ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{4}{p^2}$ है।

उदाहरण 7 यदि दो बिंदुओं A(2, 0) तथा B(3, 1) को मिलाने वाली रेखा को वामावर्त दिशा में A के इर्द-गिर्द 15° के कोण से घुमाया जाता है। रेखा का नई अवस्था में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: रेखा AB का ढाल $\dfrac{1-0}{3-2} = 1$ अथवा 45° है (क्यों) (आकृति को देखिए)

15° से घुमाने के बाद नई अवस्था में रेखा AC का ढाल $\tan 60° = \sqrt{3}$ है।



आकृति 10.1

इसलिए नई रेखा AC का समीकरण

$y - 0 = \sqrt{3}(x-2)$ अथवा $y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$ है।

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण (L.A.)

उदाहरण 8 यदि बिंदु A(3, 2) से जाने वाली रेखा का ढाल $\frac{3}{4}$ है, तो रेखा पर बिंदु A से 5 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु (3, 2) से जाने वाली एवं ढाल (slope) $\frac{3}{4}$ वाली रेखा का समीकरण

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3)$$

या $\quad 4y - 3x + 1 = 0$ है $\qquad$ (1)

मान लीजिए कि बिंदु (h, k) रेखा पर इस प्रकार है कि

$$(h - 3)^2 + (k - 2)^2 = 25 \qquad (2) \quad \text{(क्यों)}$$

और

$$4k - 3h + 1 = 0 \text{ भी प्राप्त है} \qquad (3) \quad \text{(क्यों)}$$

अथवा
$$k = \frac{3h-1}{4} \qquad (4)$$

k का मान (2) में रखने पर

$$25h^2 - 150h - 175 = 0 \qquad \text{(कैसे?)}$$

या
$$h^2 - 6h - 7 = 0$$

या
$$(h + 1)(h - 7) = 0 \Rightarrow h = -1, h = 7$$

h के इन मानों को (4) में रखने पर हम $k = -1$ और $k = 5$ प्राप्त करते हैं। इसलिए वांछित बिंदुओं के निर्देशांक (–1, –1) या (7, 5) हैं।

उदाहरण 9 रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली अन्य रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ पर लम्ब उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करते हैं जो कि (– 1, – 1) है। साथ ही रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ का ढाल $\frac{3}{5}$ है। इसलिए इस रेखा पर लम्ब उस रेखा का ढाल $\frac{-5}{3}$ है (क्यों)? अतः वांछित रेखा का समीकरण

$$y + 1 = \frac{-5}{3}(x + 1)$$

या
$$5x + 3y + 8 = 0 \text{ है।}$$

विकल्प: रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$5x - 6y - 1 + k(3x + 2y + 5) = 0 \text{ है} \quad (1)$$

इस रेखा का ढाल $\dfrac{-(5+3k)}{-6+2k}$ है

साथ ही रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ का ढाल $\dfrac{3}{5}$ है।

क्योंकि दोनों रेखाएँ एक दूसरे पर लंब हैं

इसलिए $\dfrac{-(5+3k)}{-6+2k} \times \dfrac{3}{5} = -1$

या $k = 45$

इसलिए वांछित रेखा का समीकरण

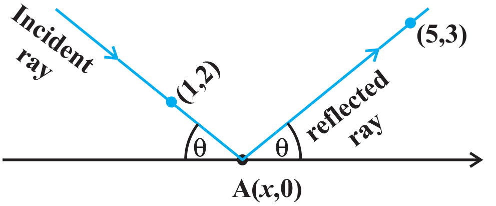
$$5x - 6y - 1 + 45\,(3x + 2y + 5) = 0$$

या $5x + 3y + 8 = 0$ है।

उदाहरण 10 बिंदु (1, 2) से आने वाली प्रकाश की किरण x-अक्ष पर बिंदु A से परावर्तित होने के पश्चात् बिंदु (5, 3) से गुजरती है। बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए आपतित किरण x-अक्ष के जिस बिंदु A से टकराती है उसके निर्देशांक $(x, 0)$ हैं। आकृति के अनुसार परावर्तित किरण का ढाल

$$\tan\theta = \frac{3}{5-x} \text{ हैं} \quad (1)$$



आकृति 10.2

साथ ही आपतित किरण का ढाल

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{-2}{x-1} \quad \text{(क्यों?)}$$

या $$-\tan\theta = \frac{-2}{x-1} \qquad (2)$$

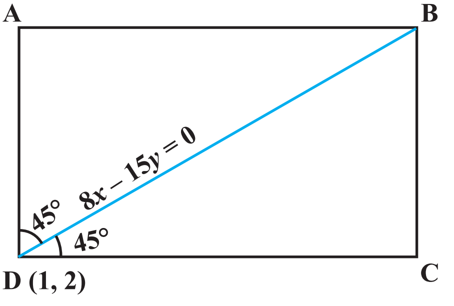
(1) तथा (2) को हल करने पर

$$\frac{3}{5-x} = \frac{2}{x-1} \quad \text{या} \quad x = \frac{13}{5}$$

अतः बिंदु A के वांछित निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ हैं।

उदाहरण 11 यदि किसी आयत का एक विकर्ण रेखा $8x - 15y = 0$ के साथ है और इसका एक शीर्ष (1, 2), पर है तो इस शीर्ष से जाने वाली आयत की भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि ABCD दिया हुआ आयत है और (1, 2) शीर्ष D के निर्देशांक हैं। हम भुजा DC एवं AD का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं।



आकृति 10.3

दिया हुआ है कि BD रेखा $8x - 15y = 0$ के साथ स्थित है इसलिए इसका ढाल $\frac{8}{15}$ (क्यों)? BD द्वारा AD एवं AC के साथ निर्मित कोण 45° है (क्यों) मान लीजिए DC का ढाल m है।

तब $$\tan 45° = \frac{m - \frac{8}{15}}{1 + \frac{8m}{15}} \qquad \text{(क्यों?)}$$

या $$15 + 8m = 15m - 8$$

या $$7m = 23 \Rightarrow m = \frac{23}{7}$$

इसलिए भुजा DC का समीकरण

$$y - 2 = \frac{23}{7}(x-1) \text{ या } 23x - 7y - 9 = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार दूसरी भुजा AD का समीकरण

$$y - 2 = \frac{-7}{23}(x-1) \text{ या } 7x + 23y - 53 = 0 \text{ है।}$$

वस्तुनिष्ठीय प्रश्न

उदाहरण संख्या 12 से 20 तक प्रत्येक के चार विकल्प हैं जिनमें से केवल एक विकल्प सही है। सही विकल्प का चयन कीजिए।

उदाहरण 12 x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ रेखा $x - y + 3 = 0$ का झुकाव है:

(A) $45°$ (B) $135°$ (C) $-45°$ (D) $-135°$

हल (A) सही उत्तर है। दी हुई रेखा के समीकरण को पुनः $y = x + 3$ के रूप में लिखा जा सकता है;

$\Rightarrow \quad m = \tan\theta = 1$, इसलिए $\theta = 45°$.

उदाहरण 13 दो रेखाएँ $ax + by = c$ एवं $a'x + b'y = c'$ एक दूसरे पर लंब हैं यदि

(A) $aa' + bb' = 0$ (B) $ab' = ba'$

(C) $ab + a'b' = 0$ (D) $ab' + ba' = 0$

हल सही उत्तर (A) है। रेखा $ax + by = c$ का ढाल $\frac{-a}{b}$ है और रेखा $a'x + b'y = c'$ का ढाल $\frac{-a'}{b'}$ है।

ये रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं यदि $\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{-a'}{b'}\right) = -1$ या $aa' + bb' = 0$ (क्यों?)

उदाहरण 14 बिंदु (1, 2) से गुजरने वाली एवं रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब उस रेखा का समीकरण है:

(A) $y - x + 1 = 0$ (B) $y - x - 1 = 0$

(C) $y - x + 2 = 0$ (D) $y - x - 2 = 0$.

हल: सही उत्तर (B) है। मान लीजिए कि रेखा का ढाल m है, तो बिंदु (1, 2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 2 = m(x-1) \text{ होगा} \tag{1}$$

साथ ही यह रेखा दी हुई रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लंब है जिसका ढाल -1 है (क्यों)

इसलिए हम $\quad m(-1) = -1$

या $\quad m = 1$ प्राप्त करते हैं

m का मान समीकरण (1) में रखने पर वांछित रेखा का समीकरण

$$y - 2 = x - 1$$

या $\quad y - x - 1 = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 15 बिंदु P (1, – 3) की रेखा $2y - 3x = 4$ से दूरी है–

(A) 13 (B) $\frac{7}{13}\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है। बिंदु P (1, – 3) की रेखा $2y - 3x - 4 = 0$ से दूरी, बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई के समान है जो कि $\left|\frac{2(-3)-3-4}{\sqrt{13}}\right| = \sqrt{13}$ है।

उदाहरण 16 बिंदु (2, 3) से रेखा $x + y - 11 = 0$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक है:

(A) (–6, 5) (B) (5, 6) (C) (–5, 6) (D) (6, 5)

हल सही विकल्प (B) है। मान लीजिए बिंदु (2, 3) से रेखा $x + y - 11 = 0$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (h, k) हैं। तब लंब रेखा का ढाल $\frac{k-3}{h-2}$ है। साथ ही दी हुई रेखा

$x + y - 11 = 0$ का ढाल -1 है। (क्यों?)

रेखाओं के परस्पर लंब होने की शर्त का उपयोग करने पर हम

$$\left(\frac{k-3}{h-2}\right)(-1) = -1 \qquad \text{(क्यों?)}$$

या $\quad k - h = 1$ प्राप्त करते हैं। (1)

क्योंकि बिंदु (h, k) दी हुई रेखा पर स्थित है

$$h + k - 11 = 0 \text{ अथवा } h + k = 11 \qquad (2)$$

(1) तथा (2) को हल करने पर हम $h = 5$ एवं $k = 6$ प्राप्त करते हैं। अत: लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (5, 6) हैं।

उदाहरण 17 किसी रेखा द्वारा y-अक्ष पर काटा गया अंत:खंड, x-अक्ष पर काटे गये अंत: खंड से दोगुना है और यह रेखा बिंदु (1, 2) से जाती है। रेखा का समीकरण है:

(A) $2x + y = 4$ (B) $2x + y + 4 = 0$

(C) $2x - y = 4$ (D) $2x - y + 4 = 0$

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए कि रेखा x-अक्ष पर अंत:खंड a काटती है, तो यह y- अक्ष पर अंत:खंड $2a$ बनाएगी। इसलिए रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1 \text{ है।}$$

यह बिंदु (1, 2) से जाती है इसलिए हम $\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}=1$ या $a=2$ प्राप्त करते हैं।

अत: वांछित रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \text{ या } 2x + y = 4 \text{ है।}$$

उदाहरण 18 एक रेखा बिंदु P(1, 2) से इस प्रकार जाती है कि अक्षों के बीच इसका अंत:खंड P पर दो समान भागों में विभाजित होता है। रेखा का समीकरण है:

(A) $x + 2y = 5$ (B) $x - y + 1 = 0$

(C) $x + y - 3 = 0$ (D) $2x + y - 4 = 0$

हल सही विकल्प (D) है। हम जानते हैं कि x–अक्ष एवं y–अक्ष पर क्रमश: a तथा b अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ है।}$$

यहाँ पर $$1=\frac{a+0}{2} \text{ एवं } 2=\frac{0+b}{2}, \qquad \text{(क्यों)}$$

जिससे हम $a = 2$ एवं $b = 4$ प्राप्त करते हैं। अत: रेखा का वांछित समीकरण

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \text{ अथवा } 2x + y - 4 = 0 \text{ है।}$$

उदाहरण 19 बिंदु (4, – 13) का रेखा $5x + y + 6 = 0$ के सापेक्ष में परावर्तित बिंदु है:

(A) (– 1, – 14) (B) (3, 4) (C) (0, 0) (D) (1, 2)

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए बिंदु (4 –13) का रेखा $5x+y+6=0$ के सापेक्ष में परावर्तन (h, k) है। बिंदुओं (h, k) एवं (4, – 13) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु

$$\left(\frac{h+4}{2}, \frac{k-13}{2}\right) \text{ है}$$

यह बिंदु दी हुई रेखा पर स्थित है, इसलिए हम

$$5\left(\frac{h+4}{2}\right)+\frac{k-13}{2}+6=0$$

या $\quad 5\,h + k + 19 = 0$ प्राप्त करते हैं। (1)

साथ ही बिंदुओं (h, k) एवं $(4, -13)$ को मिलाने वाली रेखा का ढाल $\frac{k+13}{h-4}$ है। यह रेखा दी हुई रेखा पर लंब है। अतः $(-5)\left(\frac{k+3}{h-4}\right)=-1$ (क्यों?)

$$5k + 65 = h - 4$$

या $\quad h - 5k - 69 = 0$ (2)

(1) तथा (2), को हल करने पर हम $h = -1$ एवं $k = -14$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार दिए हुए बिंदु का परावर्तन, बिंदु $(-1, -14)$ है।

उदाहरण 20 एक बिंदु इस प्रकार भ्रमण करता है कि बिंदु (4, 0) से इसकी दूरी, रेखा $x = 16$ से इसकी दूरी का आधा है। बिंदु का बिन्दुपथ है–

(A) $3x^2 + 4y^2 = 192$ (B) $4x^2 + 3y^2 = 192$

(C) $x^2 + y^2 = 192$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए कि भ्रमण करने वाले बिंदु के निर्देशांक (h, k) हैं।

तब हम $\quad \sqrt{(h-4)^2+k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h-16}{\sqrt{1^2+0}}\right)$

प्राप्त करते हैं। (क्यों?)

$$(h-4)^2 + k^2 = \frac{1}{4}(h-16)^2$$

$$4\,(h^2 - 8h + 16 + k^2) = h^2 - 32h + 256$$

या $\quad 3h^2 + 4\,k^2 = 192$

अतः अभीष्ट बिंदुपथ $3x^2 + 4y^2 = 192$ है।

10.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. बिंदु $(1, -2)$ से जाने वाली और अक्षों पर समान अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. बिंदु $(5, 2)$ से जाने वाली एवं बिन्दु $(2, 3)$ तथा $(3, -1)$ को मिलाने वाली रेखा पर लंब, एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. रेखा $y = (2 - \sqrt{3})(x + 5)$ एवं $y = (2 + \sqrt{3})(x - 7)$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

4. एक रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंडों का योग 14 है और यह बिंदु $(3, 4)$ से जाता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. रेखा $x + y = 4$ पर ऐसे बिंदु ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x + 3y = 10$ से 1 इकाई की दूरी पर स्थित है।

6. दर्शाइए कि रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ एवं $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ के बीच के कोण की स्पर्शज्या (टैंजेंट) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ है।

7. बिंदु $(1, 2)$ से जाने वाली एवं y-अक्ष के साथ $30°$ का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. रेखा $2x + y = 5$ एवं $x + 3y + 8 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली और रेखा $3x + 4y = 7$ के समांतर सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. a तथा b के किन मानों के लिए, रेखा $ax + by + 8 = 0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंड एवं रेखा $2x - 3y + 6 = 0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंड लंबाई में समान हैं परंतु चिह्नों में विपरीत हैं।

10. यदि निर्देशांक अक्षों के बीच किसी रेखा का अंत:खंड बिंदु $(-5, 4)$ द्वारा $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित किया जाता है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. एक ऐसी सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिंदु से खींचे गये लंब की लंबाई 4 इकाई है और यह रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $120°$ का कोण बनाती है।
[**संकेत**: लंब रूप का प्रयोग कीजिए, यहाँ $\omega = 30°$.]

12. किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की एक भुजा का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि उसके कर्ण का समीकरण $3x + 4y = 4$ है और कर्ण के सम्मुख शीर्ष $(2, 2)$ है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

13. यदि किसी समबाहु त्रिभुज के आधार का समीकरण $x + y = 2$ है और शीर्ष बिंदु $(2, -1)$ है, तो त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

[**संकेत**: *बिंदु* (2, –1) *से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई* (p) *ज्ञात कीजिए और* $p = l \sin 60°$ *का प्रयोग कीजिए जिसमें* l *त्रिभुज की भुजा की लंबाई है*]

14. एक चर रेखा किसी निश्चित बिंदु P से जाती है। बिंदुओं (2, 0), (0, 2) एवं (1, 1) से रेखा पर खींचे गये लंबों का बीजीय योग शून्य है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** मान लीजिए रेखा का ढाल m है। तब निर्धारित बिंदु P (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ है। लम्ब दूरियों के बीजीय योग कों शून्य के बराबर लेते हुए, हम $y - 1 = m(x - 1)$ प्राप्त करते हैं, अत: $(x_1, y_1) = (1, 1)$]

15. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एक रेखा को किस दिशा में खींचा जाए ताकि रेखा $x + y = 4$ के साथ इसका प्रतिच्छेद बिंदु दिए हुए बिंदु से $\frac{\sqrt{6}}{3}$ की दूरी पर रहे।

16. एक सरल रेखा इस प्रकार घूमती है कि अक्षों पर इसके द्वारा काटे गये अंत:खंडों के व्युत्क्रमों का योग हमेंशा अचर है। दर्शाइए कि यह रेखा निर्धारित बिंदु से जाती है।

[**संकेत:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ जहाँ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ अचर $= \frac{1}{k}$ (मान लीजिए) $\Rightarrow \frac{k}{a} + \frac{k}{b} = 1$ रेखा एक निर्धारित बिंदु (k, k) से जाती है।]

17. एक रेखा बिंदु (–4, 3) से जाती है और अक्षों के बीच अंत:खंडित रेखा दिये हुए बिंदु द्वारा 5 : 3 के अनुपात में अंत: विभाजित होता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. रेखा $x - y + 1 = 0$ एवं $2x - 3y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली ऐसी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (3, 2) से $\frac{7}{5}$ की दूरी पर है।

19. यदि किसी तल में भ्रमण करने वाले एक बिंदु की अक्षों से दूरियों का योग 1 है, तो उस बिंदु का बिंदु पथ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** दिया हुआ है, $|x| + |y| = 1$, जिससे वर्ग की चार भुजाएँ प्राप्त होती हैं]

20. दो रेखाएँ $y - \sqrt{3}\,|x| = 2$ के प्रतिच्छेद बिंदु से 5 इकाई की दूरी पर रेखाओं पर बिंदु क्रमश: P_1, P_2 स्थित हैं। P_1, P_2 से दी हुई रेखाओं के (बीच के) कोण का समद्विभाजक पर खींचे गये लंबों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** $x \geq 0$ अथवा $x < 0$ के अनुसार रेखाएँ $y = \sqrt{3}\,x + 2$ एव $y = -\sqrt{3}\,x + 2$ हैं। इन रेखाओं के बीच y-अक्ष कोण समद्विभाजक है। इन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से 5 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं P_1, P_2 से y-अक्ष पर खींचे गये लंबों के पाद बिंदु एक उभयनिष्ठ बिंदु के रूप में हैं। लंब के पाद बिंदु का y निर्देशांक $2 + 5\cos 30°$ है।]

21. यदि मूल बिंदु से रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ पर खींचे गये लंब की लंबाई P है और a^2, p^2, b^2 समांतर श्रेणी में है तो दर्शाइए कि $a^4 + b^4 = 0$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 22 से 41 तक प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए :

22. एक रेखा y-अक्ष से -3 अंत:खंड काटती है और x-अक्ष के साथ बनाये गये कोण की स्पर्शज्या (टेजेंट) $\frac{3}{5}$ है, रेखा का समीकरण है:

(A) $5y - 3x + 15 = 0$ (B) $3y - 5x + 15 = 0$

(C) $5y - 3x - 15 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

23. एक रेखा अक्षों पर समान अंत:खंड काटती है तब उस रेखा का ढाल है:

(A) -1 (B) 0 (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

24. बिंदु (3, 2) से जाने वाली एवं रेखा $y = x$ पर लंब एक सरल रेखा का समीकरण है:

(A) $x - y = 5$ (B) $x + y = 5$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

25. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एवं रेखा $y + x + 1 = 0$ पर लंब एक सरल रेखा का समीकरण है:

(A) $y - x + 1 = 0$ (B) $y - x - 1 = 0$

(C) $y - x + 2 = 0$ (D) $y - x - 2 = 0$

26. दो रेखाओं के अक्षों पर अंत:खंड क्रमश: $a, -b$ एवं $b, -a$, हैं। रेखाओं के बीच के कोण की स्पर्शज्या (टेंजेंट) है:

(A) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ (B) $\frac{b^2-a^2}{2}$

(C) $\frac{b^2-a^2}{2ab}$ (D) इनमें से कोई नहीं

27. यदि रेखा, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, बिन्दुओं (2, –3) एवं (4, –5), से गुजरती है, तो (a, b) का मान है:

(A) (1, 1) (B) (– 1, 1) (C) (1, – 1) (D) (– 1, –1)

28. रेखाओं $2x - 3y + 5 = 0$ एवं $3x + 4y = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु का रेखा $5x - 2y = 0$ से दूरी है–

(A) $\dfrac{130}{17\sqrt{29}}$ (B) $\dfrac{13}{7\sqrt{29}}$ (C) $\dfrac{130}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं।

29. रेखा $\sqrt{3}\ x + y = 1$ के साथ 60° पर झुकी हुई एवं बिंदु $(3, -2)$ से जाने वाली रेखाओं के समीकरण हैं:

(A) $y + 2 = 0,\ \sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

(B) $x - 2 = 0,\ \sqrt{3}\ x - y + 2 + 3\sqrt{3} = 0$

(C) $\sqrt{3}\ x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

(D) इनमें से कोई नहीं।

30. बिंदु $(1, 0)$ से जाने वाली एवं मूल बिंदु से $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ की दूरी पर स्थित रेखाओं के समीकरण हैं:

(A) $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0,\ \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

(B) $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0,\ \sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$

(C) $x + \sqrt{3}\ y - \sqrt{3} = 0,\ x - \sqrt{3}\ y - \sqrt{3} = 0$

(D) इनमें से कोई नहीं।

31. रेखाओं $y = mx + c_1$ एवं $y = mx + c_2$ के बीच की दूरी है–

(A) $\dfrac{c_1 - c_2}{\sqrt{m^2 + 1}}$ (B) $\dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1 + m^2}}$ (C) $\dfrac{c_2 - c_1}{\sqrt{1 + m^2}}$ (D) 0

32. बिंदु $(2, 3)$ से रेखा $y = 3x + 4$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक हैं:

(A) $\left(\dfrac{37}{10}, \dfrac{-1}{10}\right)$ (B) $\left(\dfrac{-1}{10}, \dfrac{37}{10}\right)$ (C) $\left(\dfrac{10}{37}, -10\right)$ (D) $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

33. यदि अक्षों के बीच अंत:खंडित किसी रेखा के भाग का मध्य बिंदु $(3,2)$ है, तो रेखा का समीकरण होगा:

(A) $2x + 3y = 12$ (B) $3x + 2y = 12$ (C) $4x - 3y = 6$ (D) $5x - 2y = 10$

34. बिंदु $(1, 2)$ से जाने वाली एवं रेखा $y = 3x - 1$ के समांतर रेखा का समीकरण है:

(A) $y + 2 = x + 1$ (B) $y + 2 = 3(x + 1)$

(C) $y - 2 = 3(x - 1)$ (D) $y - 2 = x - 1$

35. रेखाओं $x = 0, y = 0, x = 1$ एवं $y = 1$ द्वारा निर्मित वर्ग के विकर्णों के समीकरण हैं:

(A) $y = x; \quad y + x = 1$ (B) $y = x;s \quad x + y = 2$

(C) $2y = x;s \quad y + x = \frac{1}{3}$ (D) $y = 2x;s \quad y + 2x = 1$

36. एक सरल रेखा को निर्धारित करने के लिए कितने ज्यामितीय प्राचलों की आवश्यकता होती है:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

37. बिंदु (4, 1) क्रमागत रूप से निम्नलिखित दो रूपांतरणों में से गुजरता है:

(i) रेखा $y = x$ पर परावर्तन

(ii) धनात्मक x-अक्ष के साथ 2 इकाई का स्थानांतरण तब बिंदु के अंतिम निर्देशांक हैं:

(A) (4, 3) (B) (3, 4) (C) (1, 4) (D) $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

38. रेखाओं $4x + 3y + 10 = 0, 5x - 12y + 26 = 0$ एवं $7x + 24y - 50 = 0$ से समदूरस्थ एक बिंदु के निर्देशांक हैं:

(A) (1, –1) (B) (1, 1) (C) (0, 0) (D) (0, 1)

39. एक रेखा बिंदु (2, 2) से जाती है और रेखा $3x + y = 3$ पर लंब है। रेखा का y-अंतः खंड है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$

40. रेखाओं $3x + 4y + 2 = 0$ एवं $3x + 4y + 5 = 0$ के बीच की दूरी को, रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ निम्नलिखित में से किस अनुपात में बाँटती हैं:

(A) 1 : 2 (B) 3 : 7 (C) 2 : 3 (D) 2 : 5

41. एक समबाहु त्रिभुज का केंद्रक मूल बिंदु है और एक भुजा का समीकरण $x + y - 2 = 0$ है। उस त्रिभुज का एक शीर्ष है:

(A) (–1, –1) (B) (2, 2) (C) (–2, –2) (D) (2, –2)

[**संकेत:** *मान लीजिए कि* ABC समबाहु त्रिभुज है जिसका शीर्ष A (m, k) है और D (α, β), भुजा BC पर स्थित एक बिंदु है। तब $\frac{2\alpha + h}{3} = 0 = \frac{2\beta + k}{3}$ साथ ही, $\alpha + \beta - 2 = 0$ एवं $\left(\frac{k-0}{h-0}\right) \times (-1) = -1$]

प्रश्न संख्या 42 से 47 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

42. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं, तो सरल रेखा $ax + by + c = 0$ हमेंशा ________ से जायेगी।

43. बिंदु $(1, -2)$ से जाने वाली एवं अक्षों से समान अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण ________ है।

44. बिंदु $(3, 2)$ से जाने वाली और रेखा $x - 2y = 3$ के साथ $45°$ का कोण बनाने वाली रेखाओं के समीकरण ________ हैं।

45. बिंदु $(3, 4)$ एवं $(2, -6)$ रेखा $3x - 4y - 8 = 0$ के ________ पर स्थित है।

46. एक बिंदु इस प्रकार भ्रमण करता है कि बिंदु $(2, -2)$ से इसकी दूरी का वर्ग, संख्यात्मक रूप में, रेखा $5x - 12y = 3$ से उसकी दूरी, के समान है। उसके बिंदु पथ का समीकरण ________ है।

47. अक्षों के बीच अंत:खंडित रेखा $x \sin\theta + y \cos\theta = p$ के मध्य बिंदु का बिंदु पथ ________ है।

बताईए कि प्रश्न संख्या 48 से 56 तक दिये हुए कथन सत्य हैं अथवा असत्य। उत्तर की पुष्टि कीजिए–

48. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक पूर्णांक हैं तो त्रिभुज समबाहु नहीं हो सकता।

49. बिंदु A $(-2, 1)$, B $(0, 5)$, C $(-1, 2)$ संरेख हैं।

50. बिंदु $(a \cos^3\theta, a \sin^3\theta)$ से जाने वाली एवं सरल रेखा $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = a$ पर लंब रेखा का समीकरण $x \cos\theta - y \sin\theta = a \sin 2\theta$ है।

51. सरल रेखा $5x + 4y = 0$, सरल रेखाओं $x + 2y - 10 = 0$ एवं $2x + y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाती है।

52. एक समबाहु त्रिभुज का शीर्ष $(2, 3)$ है और शीर्ष के सम्मुख भुजा का समीकरण $x + y = 2$ है, तो त्रिभुज की शेष दो भुजाएँ $y - 3 = (2 \pm \sqrt{3})(x - 2)$ हैं।

53. बिंदु $(3, 5)$ को, रेखा $4x + y - 1 = 0$ एवं $7x - 3y - 35 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से, मिलाने वाली रेखा का समीकरण बिंदु $(0, 0)$ एवं बिन्दु $(8, 34)$ से समदूरस्थ हैं।

54. रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ इस प्रकार भ्रमण करती है कि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, जहाँ c अचर है। मूल बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु का बिंदुपथ $x^2 + y^2 = c^2$ है।

55. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में है, तो रेखायें $ax + 2y + 1 = 0$, $bx + 3y + 1 = 0$ एवं $cx + 4y + 1 = 0$ संगामी हैं।

56. बिंदुओं $(3, -4)$ एवं $(-2, 6)$ को मिलाने वाली रेखा, बिंदुओं $(-3, 6)$ एवं $(9, -18)$ को मिलाने वाली रेखा पर लंब है।

प्रश्न संख्या 57 से 59 तक स्तंभ C_1 के अंतर्गत दिए हुए प्रश्न स्तंभ C_2 के अंतर्गत दिए हुए उचित उत्तर के साथ मिलान कीजिए –

57.

स्तंभ C_1	स्तंभ C_2
(a) बिंदु P एवं Q, रेखा $x + 5y = 13$ पर स्थित हैं और रेखा $12x - 5y + 26 = 0$ से 2 इकाई की दूरी पर स्थित हैं। P एवं Q के निर्देशांक हैं:	(i) $(3, 1), (-7, 11)$
(b) रेखा $4x + 3y - 10 = 0$ से एक इकाई की दूरी पर रेखा $x + y = 4$ पर स्थित बिंदु के निर्देशांक हैं:	(ii) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$
(c) यदि $AP = PQ = QB$ तो $A(-2, 5)$ एवं $B(3, 1)$ को मिलाने वाली रेखा पर स्थित बिंदु P एवं Q के निर्देशांक हैं:	(iii) $\left(1, \frac{12}{5}\right), \left(-3, \frac{16}{5}\right)$

58. यदि रेखाएँ $(2x + 3y + 4) + \lambda(6x - y + 12) = 0$ निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करती हैं तो λ का मान हैं

स्तंभ C_1	स्तंभ C_2
(a) y-अक्ष के समांतर है।	(i) $\lambda = -\frac{3}{4}$
(b) $7x + y - 4 = 0$ पर लंब है।	(ii) $\lambda = -\frac{1}{3}$
(c) $(1, 2)$ से जाती है।	(iii) $\lambda = -\frac{17}{41}$
(d) x-अक्ष के समांतर है।	(iv) $\lambda = 3$

59. रेखायें $2x - 3y = 0$ एवं $4x - 5y = 2$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली तथा निम्नलिखित प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाली रेखा का समीकरण है।

स्तंभ C_1	**स्तंभ C_2**
(a) बिंदु (2, 1) से जाने वाली	(i) $2x - y = 4$
(b) रेखा $x + 2y + 1 = 0$ पर लंब है	(ii) $x + y - 5 = 0$
(c) रेखा $3x - 4y + 5 = 0$ के समांतर है	(iii) $x - y - 1 = 0$
(d) अक्षों पर समान रूप से झुकी हुई है	(iv) $3x - 4y - 1 = 0$

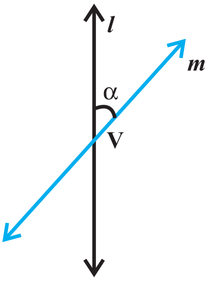
अध्याय 11

शंकु परिच्छेद

11.1 समग्र अवलोकन (Overview)

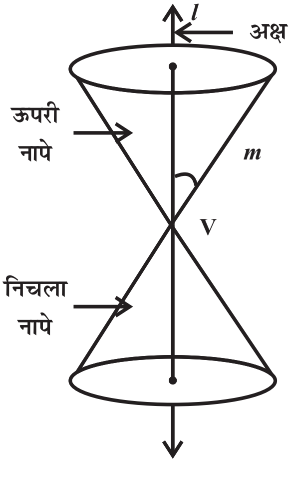
11.1.1 शंकु के परिच्छेद (*Sections of a cone*)

मान लीजिए कि l एक स्थिर उर्ध्वाधर रेखा है और m एक दूसरी रेखा है जो इस रेखा को स्थिर बिन्दु V पर प्रतिच्छेद करती है और इसके साथ एक कोण α बनाती है। (आकृति 11.1).

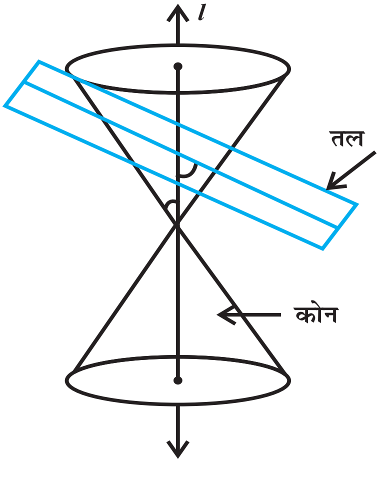


आकृति 11.1

अब हम रेखा m को रेखा l के परित: इस प्रकार घुमाते हैं कि m की सभी स्थितियों में कोण α अचर रहता है। इस प्रकार उत्पन्न पृष्ठ एक लंब वृतीय खोखला द्विशंकु है जिसे हम अब से शंकु ही कहेंगे और ये दोनों दिशाओं में अनिश्चित दूरी तक बढ़ रहा है। (आकृति 11.2)



आकृति 11.2



आकृति 11.3

बिन्दु V को शीर्ष कहते हैं और स्थिर रेखा l शंकु का अक्ष कहलाती है। घूमने वाली रेखा m शंकु की जनक कहलाती है। शीर्ष शंकु को दो भागों में विभक्त करता है जिन्हें नापे (Nappes) कहा जाता है।

यदि हम एक तल और शंकु का परिच्छेद लेते हैं तो इस प्रकार प्राप्त परिच्छेद एक, शंकु परिच्छेद कहलाता है। अत: शंकु परिच्छेद ऐसे वक्र हैं जिन्हें एक लम्बवृतीय शंकु और एक तल के परिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है।

शंकु के उर्ध्वाधर अक्ष और परिच्छेदी तल के बीच बने कोण और परिच्छेदी तल की स्थितियों के अनुसार विभिन्न प्रकार के शंकु प्राप्त होते हैं। मान लीजिए परिच्छेदी तल, शंकु के उर्ध्वाधर अक्ष के साथ β कोण बनाता है (आकृति 11.3) तल का शंकु के साथ परिच्छेदन या तो शंकु के शीर्ष पर हो सकता है या नापे के दूसरे किसी भाग पर ऊपर या नीचे हो सकता है। तब तल, शंकु के नापे (शीर्ष के अतिरिक्त) को काटता है तो हमें निम्नांकित स्थितियाँ प्राप्त होती हैं–

(a) जब $\beta = 90^o$, तो परिच्छेद एक वृत होता है।

(b) जब $\alpha < \beta < 90^o$, तो परिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है।

(c) जब $\beta = \alpha$ तो परिच्छेदा एक परवलय होता है।

[*उपरोक्त तीनों परिस्थितियों में तल शंकु के एक नापे को पूर्णत: आर-पार काटता है।*]

(d) जब $0 \leq \beta < \alpha$; तो तल शंकु के दोनों नेप्स को काटता है और परिच्छेद वक्र अतिपरवलय होता है। वास्तव में, ये वक्र, आजकल बाहरी अंतरिक्ष के अन्वेषण और परमाणु कणों के व्यवहार की खोज के लिए महत्वपूर्ण साधन है।

हम शंकु परिच्छेदों को तलीय वक्रों के रूप में लेते हैं। इस उद्देश्य के लिए अन्य समान परिभाषा का उपयोग सुविधाजनक है जो केवल उस तल से सम्बन्ध जोड़ती है जिसमें वक्र स्थित हैं और इस तल में विशिष्ट बिन्दुओं एवं रेखाओं, जिन्हें नाभियां एवं नियंताएं कहते हैं, के साथ सम्बन्ध जोड़ती है। इस उपगमन के अनुसार परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय को तल के एक निश्चित बिन्दु (जिसे नाभि कहा जाता है) और एक निश्चित रेखा जिसे नियता कहा जाता है) की सहायता से परिभाषित किया जाता है।

यदि, S नाभि और l नियता हैं, तो तल के ऐसे सभी बिन्दुओं का समुच्चय जिनकी बिन्दु S से दूरी, रेखा l से दूरी के साथ एक अचर अनुपात (e) धारण करती है, शंकु परिच्छेद कहलाता है। अचर अनुपात (e) को उत्केंद्रता कहते हैं। दीर्घवृत्त के विशिष्ट स्थिति के रूप में हमें वृत्त प्राप्त होता है जिसके लिए (e) का मान शून्य होता है और इसलिए इसका अध्ययन हम विभिन्न विधि से करते हैं।

11.1.2 वृत्त (*Circle*):

वृत्त, तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता हैं जो तल के एक स्थिर बिंदु से एक निश्चित दूरी पर होते हैं। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केंद्र कहते हैं और वृत्त पर किसी भी बिंदु की केंद्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

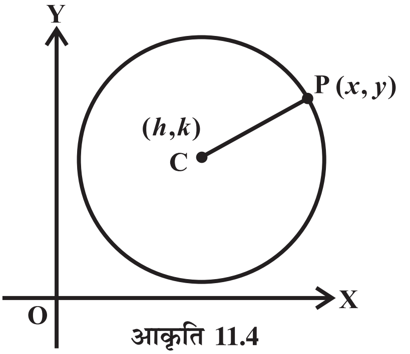
केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ है।

वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, जहाँ g, f और c अचर हैं।

(a) इस वृत्त का केंद्र $(-g, -f)$ है।

(b) इस वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ है।

मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ है।



आकृति 11.4

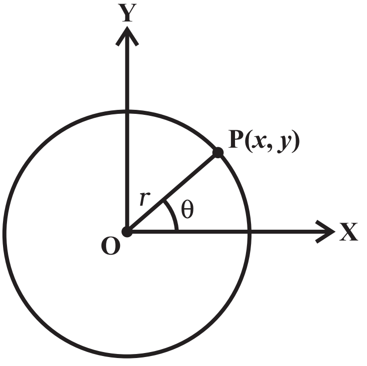
दो घात वाला व्यापक समीकरण अर्थात् $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ वृत्त को निरूपित करता है यदि (i) x^2 एवं y^2 के गुणांक एक समान हैं अर्थात् $a = b \neq 0$ एवं (ii) xy का गुणांक शून्य हैं अर्थात् $h = 0$.

वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ के प्राचलिक समीकरण $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ हैं, जहाँ θ एक प्राचल है और वृत्त $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ के प्राचलिक समीकरण

$$x - h = r\cos\theta,\ y - k = r\sin\theta$$

अथवा

$$x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta \text{ हैं।}$$

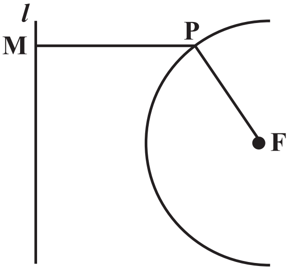


आकृति 11.5

नोट: *वृत्त के व्यापक समीकरण में तीन अचर हैं जो इस बात को दर्शाते हैंकि वृत्त को अद्वितीय रूप में ज्ञात करने के लिए कम से कम तीन प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है।*

11.1.3 *परवलय (Parabola)*

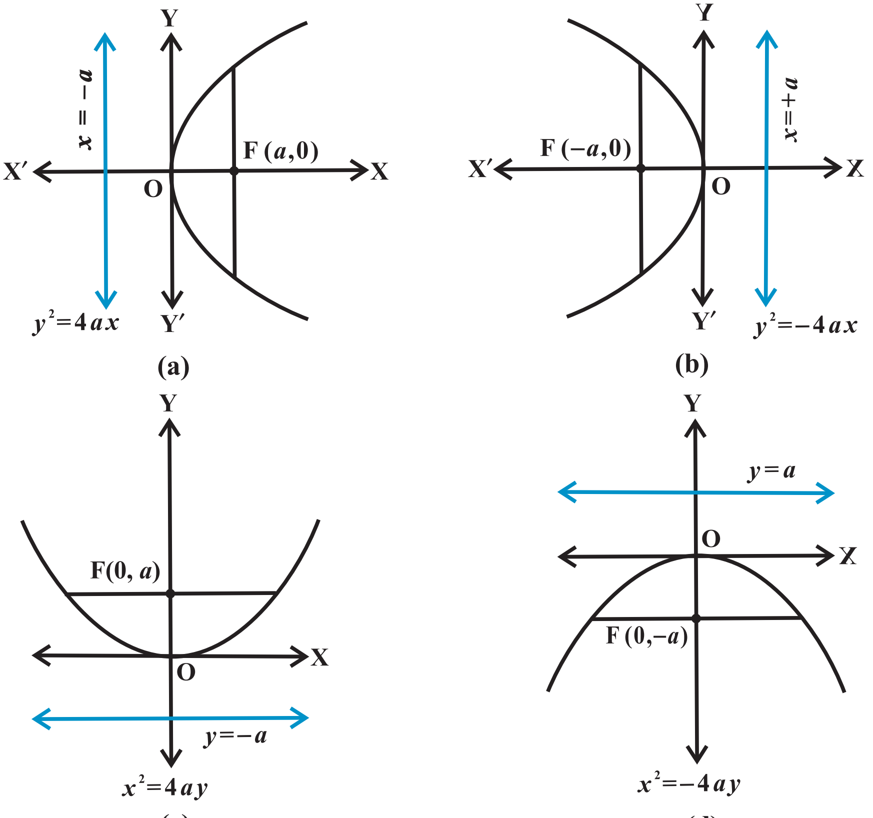
परवलय, तल के उन सभी बिन्दुओं P का समुच्चय है जो तल के एक निश्चित बिन्दु F एवं एक निश्चित सरल रेखा Q से समान दूरी पर है। निश्चित बिन्दु F को परवलय की नाभि कहते हैं और निश्चित रेखा को परवलय की नियता (directrix) कहा जाता है।



आकृति 11.6

परवलय का प्रमाणिक समीकरण (Standard equations of parabola)

आकृति 11.7(a) से (d) तक परवलय के चार सम्भावित रूपों को दर्शाया गया है।



आकृति 11.7

नाभिलंब जीवा (Latus rectum) परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय के अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को परवलय की नाभिलंब जीवा कहते हैं। (आकृति 11.17)

परवलय से सम्बन्धित मुख्य तथ्य

परवलय का रूप	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
अक्ष	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नियता	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
शीर्ष	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
नाभि	(a, 0)	(– a, 0)	(0, a)	(0, – a)
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$

बिन्दु की नाभीय दूरी (Focal distance of a point)

मान लीजिए कि परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है और $P(x, y)$ इस पर कोई बिन्दु है। बिन्दु $P(x, y)$ एवं नाभि $(a, 0)$ के बीच की दूरी बिन्दु (P) की नाभीय दूरी कहलाती है।

$$\begin{aligned} FP &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(x-a)^2 + 4ax} \\ &= \sqrt{(x+a)^2} \\ &= |x + a| \end{aligned}$$

11.1.4 दीर्घवृत्त *(Ellipse)*

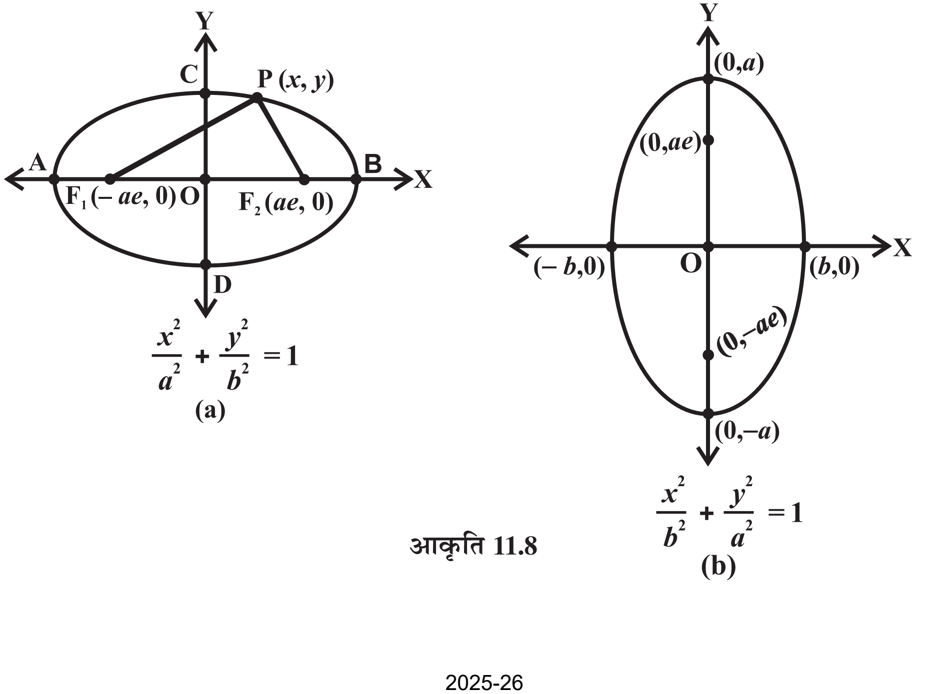
एक दीर्घवृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय है, जिसका तल में दो स्थिर बिन्दुओं से दूरियों का योग अचर होता है। विकल्पत: दीर्घवृत्त तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के किसी स्थिर बिंदु से दूरी, तल की किसी स्थिर रेखा से दूरी के साथ, एक अचर अनुपात (< 1) धारण करती है। स्थिर बिंदु को नाभि एवं स्थिर रेखा को नियता, कहते हैं अचर अनुपात $(e < 1)$ दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता कहलाता है। दीर्घवृत्त के दो मानक समीकरण इस प्रकार हैं:

(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ और (ii) $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$,

दोनों ही समीकरणों में $a > b$ एवं $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $e < 1$

(i) में दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और लघु-अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। (ii) में दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है एवं लघु-अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है। आकृति 11.8 (a) और (b)

दीर्घ वृत्त से सम्बन्धित मुख्य तथ्य



आकृति 11.8

दीर्घवृत्त का रूप	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
	$a > b$	$a > b$
दीर्घ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
दीर्घ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2a$
लघु अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
लघु अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2b$
नियताएं	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{a}{e}$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = \pm ae$	$y = \pm ae$
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
केंद्र	$(0, 0)$	$(0, 0)$

नाभीय दूरी

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु $P(x, y)$ की नाभीय दूरी, नजदीक वाली नाभि से $a - e\,|\,x|$ है और दूर वाली नाभि से $a + e\,|\,x\,|$ है।

दीघवृत्त पर स्थित किसी बिंदु की नाभीय दूरीयों का योग अचर एवं दीर्घ अक्ष की लंबाई के समान होता है।

11.1.5 *अतिपरवलय (Hyperbola)*

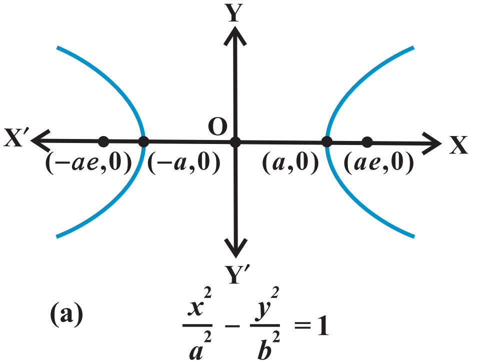
एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिन्दुओं से दूरी का अंतर अचर होता है। विकल्पतः अतिपरवलय तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के किसी स्थिर बिन्दु से दूरी, तल की किसी स्थिर रेखा से दूरी के साथ, एक अचर अनुपात (> 1) बनती है।

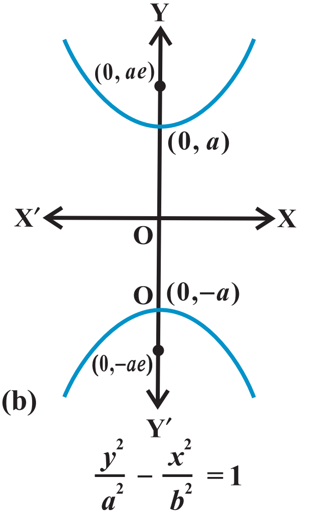
स्थिर बिंदु को नाभि, स्थिर रेखा को नियता एवं स्थिर अनुपात $(e > 1)$ को उत्केंद्रता कहते हैं। अतिपरवलय के दो मानक रूप हैं,

(i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं (ii) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

यहाँ $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$, $e > 1$.

अतिपरवलय (i) का अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है एवं संयुग्मी अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। जबकि अतिपरवलय (ii) का अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है एवं संयुग्मी अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।





आकृति 11.9

अतिपरवलय से सम्बन्धित मुख्य तथ्य

अतिपरवलय का रूप	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
अनुप्रस्थ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
संयुग्मी अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2a$
नाभियां	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm ae)$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = \pm ae$	$y = \pm ae$
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
केंद्र	$(0, 0)$	$(0, 0)$

नाभीय दूरी

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु (x, y) की नाभीय दूरी, नजदीक वाली नाभि से $e\,|\,x\,|-a$ है और दूरी वाली नाभि से $e\,|\,x\,|+a$ है।

अतिपरवलय पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अन्तर अचर एवं अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई के समान होता है।

शांकवों के प्राचलिक समीकरण (Parametric equation of conics)

	शांकव	**प्राचलिक समीकरण**
(i)	परवलय : $y^2 = 4ax$	$x = at^2,\ y = 2at;\ -\infty < t < \infty$
(ii)	दीर्घवृत्त : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta;\ 0 \le \theta \le 2\pi$
(iii)	अतिपरवलय : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$, जहाँ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

11.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण

उदाहरण 1 वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ की त्रिज्या एवं केंद्र ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए समीकरण को $(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8$ के रूप में लिखा जा सकता है।

पूर्ण वर्ग बनाने पर हम

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 1 + 4$ अथवा

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$, प्राप्त करते हैं। वृत्त के मानक समीकरण के साथ इसकी तुलना करने पर हम देखते हैं कि वृत्त का केंद्र $(1, -2)$ एवं त्रिज्या $\sqrt{13}$ है।

उदाहरण 2 यदि $x^2 = -8y$ किसी परवलय का समीकरण है, तो नाभि के निर्देशांक, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समीकरण $x^2 = -4ay$ के रूप का है जिसमें a धनात्मक है।

इसलिए परवलय की नाभि ऋणात्मक y-अक्ष पर है और यह परवलय नीचे की तरफ खुलता है। दिए हुए समीकरण को, मानक रूप से तुलना करने पर हम $a = 2$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए नाभि के निर्देशांक $(0, -2)$ हैं। नियता का समीकरण $y = 2$ है एवं नाभिलंब जीवा की लम्बाई $4a$ अर्थात् 8 है।

उदाहरण 3 यदि एक दीर्घवृत्त का समीकरण $9x^2 + 25y^2 = 225$, है, तो दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष, उत्केंद्रता, नाभियाँ एवं शीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल 225 से भाग करने पर दिए हुए समीकरण को मानक रूप में निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

इससे हम $a = 5$ एवं $b = 3$ प्राप्त करते हैं। अत: $9 = 25(1 - e^2)$, इसलिए $e = \frac{4}{5}$ क्योंकि x^2 का हर बड़ा है इसलिए दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है एवं लघु-अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। नाभियाँ $(4, 0)$ एवं $(-4, 0)$ हैं। शीर्ष $(5, 0)$ एवं $(-5, 0)$ हैं।

उदाहरण 4 एक ऐसे दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ पर है और एक नियता का समीकरण $x = \frac{36}{5}$ है।

हल हमें प्राप्त है, $ae = 5$, $\frac{a}{e} = \frac{36}{5}$ जिससे हम $a^2 = 36$ or $a = 6$ इसलिए $e = \frac{5}{6}$

अब $b = a\sqrt{1-e^2} = 6\sqrt{1-\frac{25}{36}} = \sqrt{11}$ अत: दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ है।

उदाहरण 5 अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के लिए शीर्ष, नाभियां एवं उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

हल अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसलिए $a = 4$, $b = 3$ एवं $9 = 16\,(e^2 - 1)$ एवं $e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$ इस प्रकार $e = \frac{5}{4}$ अत: शीर्ष, $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$ पर है और नाभियाँ $(\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$ पर हैं।

उदाहरण 6 एक ऐसे अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(0, \pm 6)$ पर हैं एवं $e = \frac{5}{3}$.

हल क्योंकि शीर्ष y-अक्ष पर हैं (मध्य बिन्दु मूल बिन्दु पर है) इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ है।

क्योंकि शीर्ष $(0, \pm 6)$ हैं इसलिए $a = 6, b^2 = a^2 (e^2 - 1) = 36 \left(\frac{25}{9} - 1\right) = 64$ अतः अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ है और नाभियां $(0, \pm ae) = (0, \pm 10)$ हैं।

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण

उदारहण 7 बिन्दुओं (20, 3), (19, 8) और (2, –9) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। वृत्त का केंद्र एवं त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए निर्देशांकों को वृत्त के व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर हम

$$40g + 6f + c = -409$$
$$38g + 16f + c = -425$$
$$4g - 18f + c = -85$$ प्राप्त करते हैं।

इन तीन समीकरणों से हम $g = -7, f = -3$ एवं $c = -111$ प्राप्त करते हैं।

अतः वृत्त का समीकरण

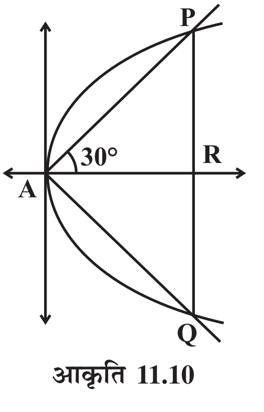
$$x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0$$

अथवा $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 13^2$ है।

इसलिए वृत्त का केंद्र (7, 3) एवं त्रिज्या 13 है।

उदाहरण 8 परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज इस प्रकार बनाया जाता है कि त्रिभुज का एक शीर्ष, परवलय के शीर्ष पर है। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है, समबाहु त्रिभुज को APQ से निर्दिष्ट किया गया है जिसकी समान भुजाओं की लम्बाई l है (मान लीजिए)



आकृति 11.10

यहाँ $AP = l$ इसलिए $AR = l \cos 30°$

$$= l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

साथ ही $PR = l \sin 30° = \frac{l}{2}$.

अतः $\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}\right)$, परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित बिन्दु P के निर्देशांक है।

इसलिए $$\frac{l^2}{4} = 4a\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow l = 8\,a\sqrt{3}$$

इस प्रकार, परवलय $y^2 = 4ax$ के अंतर्गत बनाई गई समबाहु त्रिभुज की भुजा की अभीष्ट लम्बाई $8\,a\sqrt{3}$ है।

उदारहण 9 एक ऐसे दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–3, 1) से जाता है एवं उसकी उत्केंद्रता $\sqrt{\frac{2}{5}}$ है। दीर्घ अक्ष x-अक्ष पर है और केंद्र मूल बिन्दु पर है।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (–3, 1) से गुजरने वाले दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

इसलिए, $$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$$

अथवा $$9b^2 + a^2 = a^2\ b^2$$

अथवा $$9a^2\ (1^2 - e^2) + a^2 = a^2\ a^2\ (1 - e^2) \quad (\text{Using } b^2 = a^2\ (1 - e^2))$$

अथवा $$a^2 = \frac{32}{3}$$

फिर से $$b^2 = a^2\ (1 - e^2) = \frac{32}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{32}{5}$$

अत: दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$$

अथवा $$3x^2 + 5y^2 = 32.$$

उदाहरण 10 एक ऐसे अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (± 6, 0) पर है और किसी एक नियता का समीकरण $x = 4$ है।

हल जैसा कि, शीर्ष बिन्दु x-अक्ष पर हैं और उनका मध्य बिन्दु मूल बिन्दु है, इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के रूप का होना चाहिए।

यहाँ $b^2 = a^2\ (e^2 - 1)$ शीर्ष $(\pm\, a, 0)$ हैं एवं नियताएं $x = \pm\,\frac{a}{e}$ से प्राप्त होती है।

इस प्रकार $a = 6,\ \dfrac{a}{e} = 4$ इसलिए $e = \dfrac{3}{2}$ जिससे $b^2 = 36\left(\dfrac{9}{4} - 1\right) = 45$ प्राप्त होता है।

परिणामत: अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{45} = 1$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 11 से 16 तक प्रत्येक के लिए चार सम्भावित विकल्प हैं, जिनमें से एक सही है। दिए गये चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए

उदाहरण 11 मूल बिन्दु से 1 इकाई की दूरी पर प्रत्येक निर्देशांक अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का प्रथम चतुर्थांश में समीकरण है:

(A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$

हल सही विकल्प (A) है। क्योंकि दिया हुआ समीकरण $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह समीकरण एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है जिसका केंद्र (1, 1) है, एवं त्रिज्या 1 ईकाई है। यह वृत्त दोनों अक्षों का मूल बिन्दु से 1 ईकाई की दूरी पर स्पर्श करता है।

उदाहरण 12 रेखाओं $3x + y = 14$ एवं $2x + 5y = 18$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले उस वृत का समीकरण जिसका केंद्र (1,–2) है।

(A) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

हल सही विकल्प (A) है, $3x + y - 14 = 0$ एवं $2x + 5y - 18 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु $x = 4,\ y = 2$ अर्थात् (4, 2) है।

इसलिए वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{9+16} = 5$

अत: वृत्त का समीकरण

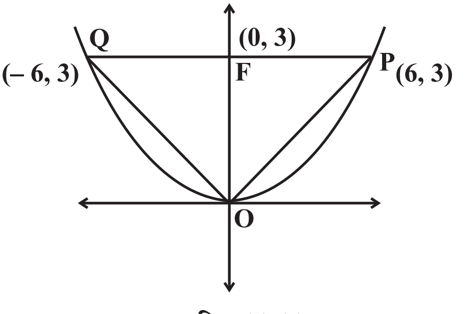
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

अथवा $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ है।

उदारहण 13 परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को नाभिलम्ब जीवा के अंत्य बिन्दुओं से मिलाने पर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है।

(A) 12 वर्ग इकाई (C) 18 वर्ग इकाई

(B) 16 वर्ग इकाई (D) 24 वर्ग इकाई



आकृति 11.11

हल सही विकल्प (C) है, आकृति में OPQ उस त्रिभुज को निरूपित करता है जिसका क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

$= \dfrac{1}{2}$ PQ × OF $= \dfrac{1}{2}$ (12 × 3) = 18 वर्ग इकाई

उदाहरण 14 परवलय $y^2 = 6x$ के शीर्ष को इसके ऐसे बिन्दुओं, जिनका भुज (x-निर्देशांक) 24 है, से मिलाने पर, प्राप्त रेखाओं के समीकरण हैं –

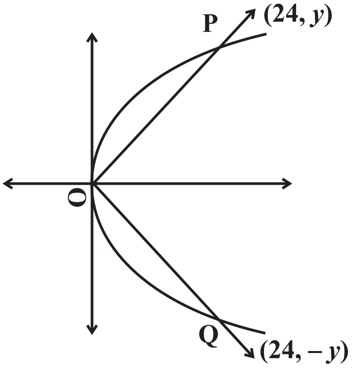
(A) $y \pm 2x = 0$

(B) $2y \pm x = 0$

(C) $x \pm 2y = 0$

(D) $2x \pm y = 0$

हल सही विकल्प (B) है। मान लीजिए परवलय $y^2 = 6x$ पर P एवं Q दो बिन्दु है जिनके भुज 24 हैं और O को P एवं Q से मिलाने पर OP, OQ दो रेखाएँ हैं।



आकृति 11.12

अत: $y^2 = 6 \times 24 = 144$

अथवा $y = \pm 12.$

इसलिए P एवं Q के निर्देशांक क्रमश: (24, 12) एवं (24, –12) हैं।

अत: $y = \pm \frac{12}{24}x \quad 2y \quad x$ अभीष्ट रेखाएं है।

उदारहण 15 एक दीर्घ वृत्त का केंद्र मूल बिन्दू है एवं दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर है, यह बिन्दुओं (–3, 1) एवं (2, –2) से जाता है। उस दीर्घवृत्त का समीकरण हैं:

(A) $5x^2 + 3y^2 \ \ 32$ (B) $3x^2 + 5y^2 = 32$

(C) $5x^2 - 3y^2 = 32$ (D) $3x^2 + 5y^2 + 32 = 0$

हल (B) सही विकल्प है। मान लीजिए, दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है। दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार, $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ एवं $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$

इनसे हमें $a^2 = \frac{32}{3}$ एवं $b^2 = \frac{32}{5}$ प्राप्त होता है। दीर्घ वृत्त का अभीष्ट समीकरण $3x^2 + 5y^2 = 32$ है।

उदारहण 16 एक अतिपरवलय का केंद्र मूल बिन्दु पर है एवं इसके अनुप्रस्थ अक्ष जो x-अक्ष के अनुदिश है, की लम्बाई 7 है। यह अतिपरवलय बिन्दु (5, –2) से जाता है। अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{196}{51}y^2 = 1$ (B) $\frac{49}{4}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$

(C) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (C) है। मान लीजिए $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ अतिपरवलय को निरूपित करता है। दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई अर्थात् $2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$ यह भी दिया हुआ है कि बिन्दु (5, –2) अतिपरवलय पर स्थित है। इसलिए हम

$$\frac{4}{49}(25)-\frac{4}{b^2} = 1$$ प्राप्त करते हैं। इससे हमें

$b^2 = \frac{196}{51}$ प्राप्त होता है। अत: अतिपरवलय का समीकरण

$\frac{4}{49}x^2-\frac{51}{196}y^2 = 1$ है।

बताइए उदारहण 17 एवं 18 में दिए हुए कथन सत्य है अथवा नहीं। उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उदारहण 17 एक वृत्त पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक $(2 + 4 \cos\theta, -1 + 4 \sin\theta)$ है, जहाँ θ प्राचल है। उस वृत्त का समीकरण $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ है।

हल सत्य, दिए हुए प्रतिबंधों से हम

$$x = 2 + 4 \cos\theta \Rightarrow (x-2) = 4 \cos\theta$$

अथवा $y = -1 + 4 \sin\theta \Rightarrow y + 1 = 4 \sin\theta$. प्राप्त करते हैं। वर्ग करने पर एवं जोड़ने पर हमें

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ प्राप्त होता है।

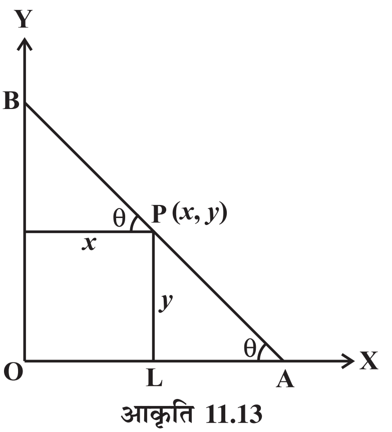
उदाहरण 18 दी हुई लम्बाई की एक छड़ इस प्रकार घूमती है कि इसके अन्तिम छोर, परस्पर लंब दो निश्चित सरल रेखाओं पर ही रहते हैं। छड़ पर लिया हुआ कोई भी बिन्दु दीर्घवृत्त को दर्शाता है।

हल सत्य, मान लीजिए, सलाख पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि $PA = a$ एवं $PB = b$ आकृति 11.13.

$$x = OL = b\cos\theta$$

एवं $$y = PL = a\sin\theta$$

इनसे हमें $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$, प्राप्त होता है और यह एक दीर्घवृत्त है।



आकृति 11.13

उदारहण संख्या 19 से 23 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदारहण 19 बिन्दु (2, 2) पर केंद्र एवं बिन्दु (4, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ________ है।

हल क्योंकि वृत्त (4, 5) से जाता है और इसका केंद्र (2, 2) है इसलिए इसकी त्रिज्या $\sqrt{(4-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}$ है। अतः अभीष्ट उत्तर $(x-2)^2+(y-2)^2=13$ है।

उदारहण 20 एक वृत्त की त्रिज्या 3 ईकाई है और इसका केंद्र रेखा, $y = x - 1$ पर स्थित है। यदि यह वृत्त बिन्दु (7, 3) से जाता है, तो इसका समीकरण _________ है।

हल: मान लीजिए वृत्त का केंद्र (h, k) है। तब $k = h - 1$ इसलिए वृत्त का समीकरण

$$(x-h)^2+[y-(h-1)]^2=9 \qquad \ldots (1)$$

दिया हुआ है कि वृत्त का केंद्र (7, 3) से जाता है इसलिए हम,

$$(7-h)^2+(3-(h-1))^2 = 9$$

अथवा $(7-h)^2+(4-h)^2 = 9$

अथवा $h^2-11h+28 = 0$ प्राप्त करते हैं।

अथवा $(h-7)(h-4) = 0 \quad \Rightarrow h = 4$ अथवा $h = 7$

अतः वृत्त के अभीष्ट समीकरण, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

अथवा $x^2+y^2-14x-12y+76 = 0$

उदाहरण 21 एक दीर्घवृत्त का अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और इसका केंद्र मूल बिन्दु पर है। इसके नाभिलंब जीवा की लम्बाई 10 इकाई है। यदि नाभियों के बीच की दूरी = लघु अक्ष की लम्बाई, तो दीर्घवृत्त का समीकरण _________ है।

हल दिया हुआ है कि $\dfrac{2b^2}{a}=10$ एवं $2ae = 2b \Rightarrow b = ae$

हम यह भी जानते हैं कि $b^2 = a^2(1-e^2)$

अथवा $2a^2e^2 = a^2 \Rightarrow e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ($b = ae$ प्रयोग करने पर)

अतः $a = b\sqrt{2}$

फिर से $\dfrac{2b^2}{a} = 10$

अथवा $b = 5\sqrt{2}$ इस प्रकार हम $a = 10$ प्राप्त करते हैं।

अतः दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{50}=1$ है।

उदाहरण 22 एक परवलय की नाभि, बिन्दु (2, 3) है एवं रेखा $x - 4y + 3 = 0$ उसकी नियता है। उस परवलय का समीकरण __________ है।

हल परवलय की परिभाषा का उपयोग करते हुए हम

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \left|\frac{x-4y+3}{\sqrt{17}}\right| \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

$$17(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13) = x^2 + 16y^2 + 9 - 8xy - 24y + 6x$$

अथवा $16x^2 + y^2 + 8xy - 74x - 78y + 212 = 0$ प्राप्त होता है।

उदारहण 23 बिन्दुओं (3, 0) एवं $(3\sqrt{2}, 2)$ से जाने वाले अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की उत्केंद्रता __________ है।

हल दिया हुआ है कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ बिन्दुओं (3, 0) एवं $(3\sqrt{2}, 2)$ से जाता है इसलिए हम $a^2 = 9$ एवं $b^2 = 4$ प्राप्त करते हैं।
इससे हमें $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ अथवा

$$4 = 9(e^2 - 1)$$

अथवा $$e^2 = \frac{13}{9}$$

अथवा $$e = \frac{\sqrt{13}}{3} \text{ प्राप्त होता है।}$$

11.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक वृत्त की त्रिज्या a है और यह प्रथम चतुर्थांश में दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. दर्शाइए कि $x = \frac{2at}{1+t^2}$ एवं $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ द्वारा देय बिन्दु (x, y), t के सभी वास्तविक मानों के लिए एक वृत्त पर स्थित है जहाँ a कोई भी दी हुई वास्तविक संख्या है और $-1 \le t \le 1$.
3. यदि कोई वृत्त बिन्दुओं $(0, 0)$, (a, o) एवं (o, b) से जाता है तो इसके केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को स्पर्श करता है और जिसका केंद्र (1, 2) है।

5. यदि रेखाएं $3x - 4y + 4 = 0$ एवं $6x - 8y - 7 = 0$ एक वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** दी हुई समांतर रेखाओं के बीच की दूरी से हम वृत्त का व्यास प्राप्त करते हैं]

6. तीसरे चतुर्थांश में स्थित एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दोनों अक्षों एवं रेखा $3x - 4y + 8 = 0$ को स्पर्श करता है।

[**संकेत:** माना a वृत की त्रिज्या है, तब $(-a, -a)$ वृत के केंद्र होंगे और दी गई रेखा की केंद्र से लम्ब दूरी, वृत की त्रिज्या है।

7. यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ के व्यास एक छोर $(3, 4)$, पर है, तो व्यास के दूसरे छोर के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. एक वृत्त का केंद्र $(1, -2)$ पर है और यह $3x + y = 14$, $2x + 5y = 18$ से जाता है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. यदि रेखा $y = \sqrt{3}\ x + k$ वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ को स्पर्श करती है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** वृत की त्रिज्या वृत के केंद्र से लम्ब दूरी के बराबर है।]

10. वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$ के संकेंद्री एवं इससे दुगने क्षेत्रफल के वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** सकेंद्री वृतों के केंद्र समान होते हैं।]

11. यदि किसी दीर्घ वृत्त की नाभिलंब जीवा, लघु अक्ष के आधे के समान हैं, तो इसकी उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

12. दिये गये दीर्घ वृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ की उत्केंद्रता एवं नाभियां ज्ञात कीजिए।

13. यदि किसी दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता $\frac{5}{8}$ है और नाभियों के बीच की दूरी 10 है, तो दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा ज्ञात कीजिए।

14. एक दीर्घ वृत्त की उत्केंद्रता $\frac{2}{3}$ है, नाभिलंब जीवा 5 है एवं केंद्र $(0\ ,\ 0)$ है। दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

15. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ की नियताओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

16. परवलय $y^2 = 8x$ पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरी 4 है। उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

17. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष एवं परवलय पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात कीजिए। यदि रेखाखंड x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है।

18. यदि एक परवलय का शीर्ष एवं नाभि क्रमश: $(0, 4)$ एवं $(0, 2)$ पर हैं, तो उसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. यदि रेखा $y = mx + 1$ परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
[**संकेत:** परवलय एवं रेखा के समीकरण को हल करने पर हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त होता है और स्पर्शिता के प्रतिबंध का उपयोग करने पर m का मान प्राप्त होता है।]

20. यदि एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\sqrt{2}$ है और इसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 हैं, तो अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

21. अतिपरवलय $9y^2 - 4x^2 = 36$ की उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

22. एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\frac{3}{2}$ है और इसकी नाभियाँ $(\pm 2, 0)$ पर हैं, अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

23. यदि रेखाएं $2x - 3y = 5$ एवं $3x - 4y = 7$ किसी ऐसे वृत्त के व्यास हैं जिसका क्षेत्रफल 154 वर्ग इकाई है, तो वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

24. एक वृत्त का केंद्र सरल रेखा $y - 4x + 3 = 0$ पर स्थित हैं और यह वृत्त बिन्दुओं $(2, 3)$ एवं $(4, 5)$ से होकर जाता है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

25. एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(3, -1)$ है और जो रेखा $2x - 5y + 18 = 0$ से 6 इकाई लम्बी एक जीवा काटता है।
[**संकेत:** वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए, केंद्र से दी हुई रेखा पर लंब दूरी ज्ञात कीजिए।]

26. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ को $(5, 5)$ पर स्पर्श करता है।

27. 3 इकाई त्रिज्या वाला एक वृत्त बिन्दु $(7, 3)$ से जाता है और इसका केंद्र रेखा $y = x - 1$ पर स्थित है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

28. निम्नलिखित परवलयों में से प्रत्येक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(a) नियता $x = 0$, नाभि $(6, 0)$ (b) शीर्ष $(0, 4)$, नाभि $(0, 2)$

(c) नाभि $(-1, -2)$, नियता $x - 2y + 3 = 0$

29. उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनकी बिन्दुओं $(3, 0)$ एवं $(9, 0)$ से दूरियों का योग 12 है।

30. उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दु $(0, 4)$ से दूरी, रेखा $y = 9$ से दूरी का $\frac{2}{3}$ है।

31. दर्शाइए कि ऐसे सभी बिन्दुओं का समुच्चय, जिनकी $(4, 0)$ एवं $(-4, 0)$ से दूरी का अन्तर हमेंशा 2 है, एक अतिपरवलय को निरूपित करता है।

32. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि दिया हुआ है:

(a) शीर्ष $(\pm 5, 0)$, नाभि $(\pm 7, 0)$ (b) शीर्ष $(0, \pm 7)$, $e = \frac{4}{3}$

(c) नाभि $(0, \pm \sqrt{10})$, बिन्दु $(2, 3)$ से जाता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बताइए कि प्रश्न संख्या 33 से 40 तक के कथनों में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा असत्य है?

33. रेखा $x + 3y = 0$, वृत्त $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ का व्यास है।

34. बिन्दु $(2, -7)$ से वृत्त $x^2 + y^2 - 14x - 10y - 151 = 0$ की न्यूनतम दूरी 5 इकाई है।

[**संकेत:** न्यूनतम दूरी त्रिज्या एवं केंद्र से दिए हुए बिन्दु के बीच की दूरी का अंतर है]

35. यदि रेखा $lx + my = 1$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा है, तो बिन्दु (l, m) वृत्त पर स्थित हैं।

[**संकेत:** केंद्र से रेखा की दूरी, वृत्त की त्रिज्या के समान है।]

36. बिन्दु $(1, 2)$ वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ के अन्दर स्थित हैं।

37. रेखा $lx + my + n = 0$, परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करेगी यदि $ln = am^2$.

38. यदि P दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर एक बिन्दु है जबकि S एवं S′ दीर्घवृत्त की नाभियाँ है, तो PS + PS′ = 8.

39. रेखा $2x + 3y = 12$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$ को बिन्दु $(3, 2)$ पर स्पर्श करती है।

40. रेखाओं $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3}k = 0$ एवं $\sqrt{3}kx + ky - 4\sqrt{3} = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ k के विभिन्न मानों के लिए एक ऐसा अतिपरवलय है जिसकी उत्केंद्रता 2 है।

[**संकेत :** दिए हुए समीकरणों में से k को विलुप्त कीजिए।]

प्रश्न संख्या 41 से 46 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

41. एक वृत्त का केंद्र $(3, -4)$ है और यह रेखा $5x + 12y - 12 = 0$ को स्पर्श करता है। वृत्त का समीकरण ________ है।

[**संकेत:** वृत त्रिज्या, वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखा की लम्ब दूरी है।]

42. रेखाएँ $y = x + 2$, $3y = 4x$ और $2y = 3x$ किसी त्रिभुज की भुजाएँ हैं। इस त्रिभुज को परिगत (Circumscribing) करने वाला वृत्त का समीकरण __________________ है।

43. एक अंतहीन रस्सी को दो पिनों के ऊपर से निकालकर एक दीर्घवृत्त का निर्धारण किया जाता है। यदि अक्षों की लम्बाई 6 सेमी एवं 4 सेमी हैं, तो रस्सी की लम्बाई एवं पिनों के बीच की दूरी ____________है।

44. एक दीर्घवृत्त की नाभियाँ (0, 1), (0, –1) है और लघु अक्ष की लम्बाई 1 इकाई है। दीर्घ वृत्त का समीकरण ______________ है।

45. एक परवलय की नाभि (–1, –2) पर है और नियता $x - 2y + 3 = 0$ है। परवलय का समीकरण ____________ है।

46. एक अतिपरवलय के शीर्ष $(0, \pm 6)$ पर हैं और उत्केंद्रता $\frac{5}{3}$ है। अति परवलय का समीकरण एवं नाभियां क्रमश: ______________ एवं ________________ हैं।

प्रश्न संख्या 47 से 59 तक दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए –

47. बिन्दु (1, 2) पर केन्द्रित एवं बिन्दु (4, 6) से जाने वाले वृत्त का क्षेत्रफल है:–

(A) 5π (B) 10π (C) 25π (D) इनमें से कोई नहीं

48. दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले एवं बिन्दु (3, 6) से जाने वाले वृत्त का समीकरण है:–

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. यदि एक वृत्त मूल बिन्दु एवं बिन्दु (2, 3) से जाता है और उसका केंद्र y-अक्ष पर है, तो वृत्त का समीकरण है:–

(A) $x^2 + y^2 + 13y = 0$ (B) $3x^2 + 3y^2 + 13x + 3 = 0$

(C) $6x^2 + 6y^2 - 13x = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 13x + 3 = 0$

50. एक वृत्त का केंद्र मूल बिन्दु पर है और यह एक ऐसे समबाहु त्रिभुज के शीर्षों से जाता है जिसकी माध्यिका की लम्बाई $3a$ है। वृत्त का समीकरण है–

(A) $x^2 + y^2 = 9a^2$ (B) $x^2 + y^2 = 16a^2$

(C) $x^2 + y^2 = 4a^2$ (D) $x^2 + y^2 = a^2$

[**संकेत:** त्रिभुज का केंद्रक और वृत्त का केंद्र संपाती है। वृत्त की त्रिज्या, माध्यिका की लम्बाई का $\frac{2}{3}$ गुना है।]

51. यदि किसी परवलय की नाभि (0, –3) है और इसकी नियता $y = 3$ है, तो इसका समीकरण है:

(A) $x^2 = -12y$ (B) $x^2 = 12y$ (C) $y^2 = -12x$ (D) $y^2 = 12x$

52. यदि परवलय $y^2 = 4ax$, बिन्दु (3, 2) से जाता है, तो इसके नाभिलंब जीवा की लम्बाई है:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 4

53. यदि एक परवलय का शीर्ष, बिन्दु (–3, 0) है और नियता, रेखा $x + 5 = 0$ है, तो इसका समीकरण है:

(A) $y^2 = 8(x + 3)$ (B) $x^2 = 8(y + 3)$

(C) $y^2 = -8(x + 3)$ (D) $y^2 = 8(x + 5)$

54. एक दीर्घवृत्त की नाभि (1, –1), नियता $x - y - 3 = 0$ और उत्केंद्रता $\frac{1}{2}$ है। दीर्घवृत्त का समीकरण है:

(A) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$

(B) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 7 = 0$

(C) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y - 7 = 0$

(D) इसमें से कोई नहीं

55. दीर्घ वृत्त $3x^2 + y^2 = 12$ के नाभिलंब जीवा की लम्बाई हैं:

(A) 4 (B) 3 (C) 8 (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

56. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a < b)$, की उत्केंद्रता e है, तो

(A) $b^2 = a^2(1 - e^2)$ (B) $a^2 = b^2(1 - e^2)$

(C) $a^2 = b^2(e^2 - 1)$ (D) $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

57. एक अति परवलय के नाभिलंब जीवा की लम्बाई 8 इकाई है और इसका संयुग्मी अक्ष नाभियों के बीच की दूरी के आधे के समान है। उस अतिपरवलय की उत्केंद्रता है:

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) इनमें से कोई नहीं है

58. एक अतिपरवलय की नाभियों के बीच की दूरी 16 है और इसकी उत्केंद्रता $\sqrt{2}$ है। अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $x^2 - y^2 = 32$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (C) $2x - 3y^2 = 7$ (D) इनमें से कोई नहीं

59. यदि एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\frac{3}{2}$ है और नाभियां $(\pm 2, 0)$ पर हैं, तो अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = \frac{4}{9}$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = \frac{4}{9}$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं है

अध्याय 12

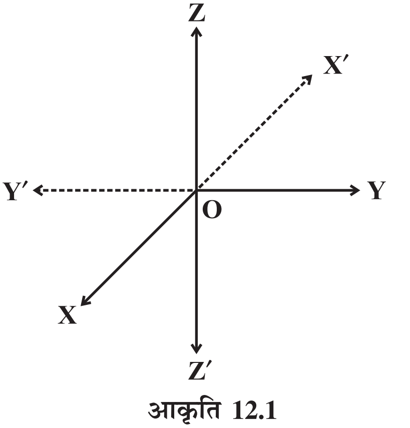
त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

12.1 समग्र अवलोकन (Overview)

12.1.1 *निर्देशांक अक्ष एवं निर्देशांक तल (Coordinate axes and coordinate planes)*

मान लीजिए X′OX, Y′OY, Z′OZ तीन परस्पर लंब रेखाएं हैं जो बिंदु O से इस प्रकार जाती हैं कि X′OX एवं Y′OY कागज के तल पर स्थित हैं और Z′OZ कागज के तल पर लंब है। ये तीन रेखाएं समकोणिक अक्ष कहलाती हैं (रेखाएं X′OX, Y′OY एवं Z′OZ क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष एवं z-अक्ष कहलाती हैं।) हम इस निर्देशांक निकाय को त्रिविमीय अंतरिक्ष अथवा केवल अंतरिक्ष कहते हैं।

इन तीन अक्षों को एक साथ युग्म रूप में लेने पर xy, yz एवं zx-तलों अर्थात् तीन निर्देशांक तलों को दर्शाते हैं। प्रत्येक तल अंतरिक्ष को दो भागों में विभक्त करता है और तीन निर्देशांक तल एक साथ मिलकर अंतरिक्ष को आठ क्षेत्रों (भागों), अर्थात (i) OXYZ (ii) OX′YZ (iii) OXY′Z (iv) OXYZ′ (v) OXY′Z′ (vi) OX′YZ′ (vii) OX′Y′Z (viii) OX′Y′Z′ (आकृति 12.1), में बाँटते हैं। ये आठ भाग अष्टांशक (Octant) कहलाते हैं।



आकृति 12.1

मान लीजिए P एक ऐसा बिंदु है जो निर्देशांक तल में नहीं बल्कि अंतरिक्ष में स्थित है। बिंदु P से निर्देशांक तलों yz, zx एवं xy के समांतर ऐसे तल खींचिए जो निर्देशांक अक्षों को क्रमशः बिंदुओं A, B एवं C पर मिलें।

वे तीन तल इस प्रकार है:

(i) ADPF || yz-तल (ii) BDPE || xz-तल (iii) CFPE || xy-तल

ये तल एक समकोणिक षट्फलकीय को दर्शाते हैं जिसमें समकोणिक फलों के तीन युग्म (A D P F, O B E C), (B D P E, C F A O) एवं (A O B D, FPEC) होते हैं (आकृति 12.2)

12.1.2 *अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक (Coordinate of a point in space)*

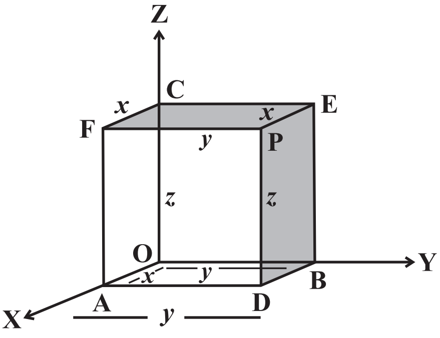
त्रिविमीय अंतरिक्ष में किसी स्वेच्छ बिंदु P के निर्देशांक (x_0, y_0, z_0) होते हैं, यदि

(1) yz-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल x-अक्ष को $(x_0, 0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

(2) zx-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल y-अक्ष को $(0, y_0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

(3) xy-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल z-अक्ष को $(0, 0, z_0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

अंतरिक्ष निर्देशांक (x_0, y_0, z_0), बिंदु P के कार्तीय निर्देशांक अथवा समकोणिक निर्देशांक कहलाते हैं। इसके अतिरिक्त हम कह सकते हैं कि तल ADPF (आकृति 12.2) x-अक्ष पर लंब है अथवा x-अक्ष तल ADPF पर लंब है और इस प्रकार x-अक्ष तल ADPF की प्रत्येक रेखा पर लंब है। इसलिए PA एवं OX परस्पर लम्ब हैं। अतः बिंदु A, बिंदु P से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और इस पाद बिंदु A की, बिंदु O से दूरी, बिंदु P का x-निर्देशांक है। इसी प्रकार हम कह सकते हैं कि B एवं C किन्तु P से क्रमशः y-अक्ष एवं z-अक्ष पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदु हैं। इन पाद बिंदुओं B एवं C को बिंदु O से दूरियां बिंदु P के क्रमशः y एवं z निर्देशांक है।



आकृति 12.2

अतः बिंदु P के निर्देशांक $x, y\ z$ बिंदु P की तीन निर्देशांक तलों yz, zx एवं xy से क्रमशः दूरियां हैं।

12.1.3 एक बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न (*Sign of coordinates of a point*)

OX, OY, OZ के अनुदिश अथवा समांतर मापी गई दूरी धनात्मक ली जाती है एवं OX′, OY′, OZ′ के अनुदिश अथवा समांतर मापी गई दूरी ऋणात्मक ली जाती है, तीन परस्पर लंब निर्देशांक तल अंतरिक्ष को आठ भागों में विभक्त करते हैं जिनमें से प्रत्येक भाग अष्टांशक (octant) कहलाता है। किसी बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न उस अष्टांशक (octant) पर निर्भर करते हैं जिसमें वह बिंदु स्थित है। प्रथम अष्टांशक (octant) में सभी निर्देशांक धनात्मक होते हैं और सातवें अष्टांशक (octant) में सभी निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं। तीसरे अष्टांशक (octant) में x, y निर्देशांक ऋणात्मक एवं z धनात्मक होते हैं। पाँचवें अष्टांशक (octant) में x, y धनात्मक एवं z ऋणात्मक होते हैं। चतुर्थ अष्टांशक (octant) में x, z धनात्मक एवं y ऋणात्मक होते हैं। छठे अष्टांशक (octant) में x, z ऋणात्मक एवं y धनात्मक होते हैं। दूसरे अष्टांशक (octant) में x ऋणात्मक एवं y, z धनात्मक होते हैं।

अष्टांशक → निर्देशांक ↓	I OXYZ	II OX′YZ	III OX′Y′Z	IV OXY′Z	V OXYZ′	VI OX′YZ′	VII OX′Y′Z′	VIII OXY′Z′
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

12.1.4 *दूरी सूत्र (Distance formula)*

दो बिंदुओं P (x_1, y_1, z_1) एवं Q (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ से प्राप्त होती है।

बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) एवं (x_2, y_2, z_2) से निर्देशांक तलों के समांतर खींचे गए तल एक षट्फलकीय का निर्माण करते हैं। षट्फलकीय के किनारों की लम्बाई $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ एवं विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ होती है।

12.1.5 *विभाजन सूत्र (Section formula)*

बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को अंतः अथवा बाह्यत: $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक क्रमशः

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n},\right) \text{ एवं } \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right) \text{ हैं।}$$

बिंदुओं P (x_1, y_1, z_1) एवं Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \text{ हैं।}$$

एक त्रिभुज जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) एवं x_3, y_3, z_3 पर हैं, के केन्द्रक के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right) \text{ हैं।}$$

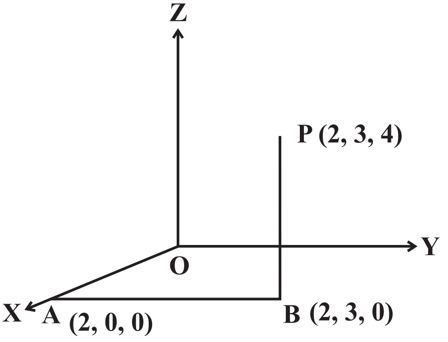
12.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण

उदाहरण 1 बिंदु (i) (2, 3, 4) (ii) (–2, –2, 3) का अंतरिक्ष में स्थान निर्धारित (locate) कीजिए।

हल

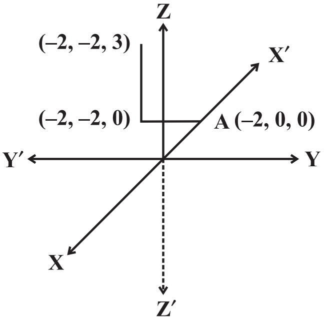
(i) बिंदु (2, 3, 4) को अंतरिक्ष में स्थान निर्धारित (locate) करने के लिए हम बिंदु O से x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश 2 इकाई आगे बढ़ते हैं मान लीजिए यह बिंदु A(2, O, O) है। इस बिंदु A से y-अक्ष की धनात्मक दिशा के समांतर 3 इकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु



आकृति 12.3

B(2, 3, 0) है। इस बिंदु B से z-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश 4 ईकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु P(2, 3, 4) है।

(ii) मूल बिंदु से x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश 2 इकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु A(–2, 0, 0) है। इस बिंदु A से y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के समांतर 2 इकाई दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु (–2, –2, 0), बिंदु B से z-अक्ष की धनात्मक दिशा के समांतर 3 इकाई दूरी तय कीजिए। यह हमारा अभीष्ट बिंदु Q (–2, –2, 3) है (आकृति 12.4)



आकृति 12.4

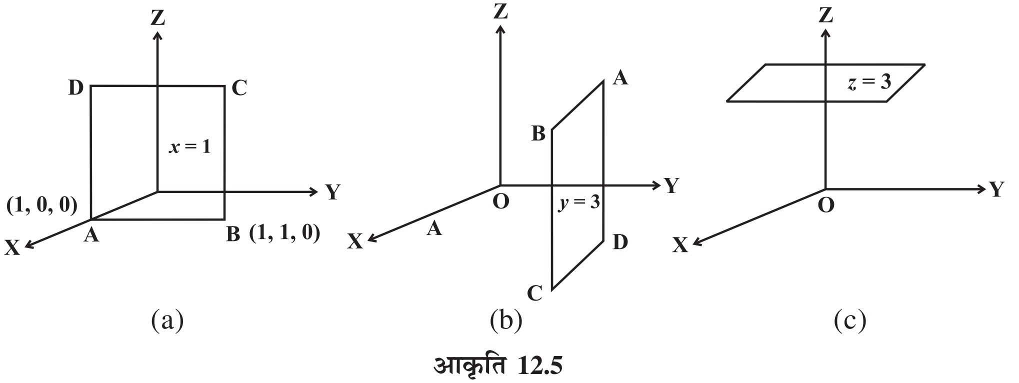
उदाहरण 2 निम्नलिखित तलों का रेखाचित्र बनाइए (i) $x = 1$ (ii) $y = 3$ (iii) $z = 3$

हल

(i) तल का समीकरण $x = 0$, yz तल को निरूपित करता है और तल का समीकरण $x = 1$, yz तल के समांतर एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो yz तल से ऊपर की तरफ 1 इकाई की दूरी पर है। अब हम yz तल के समांतर, ऊपर की तरफ एक इकाई की दूरी पर एक अन्य तल खींचते हैं। (आकृति 12.5 (*a*))

(ii) तल का समीकरण $y = 0$, xz तल को निरूपित करता है और तल का समीकरण $y = 3$, एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो xz तल के समांतर है और xz तल से ऊपर की तरफ 3 इकाई की दूरी पर स्थित है (आकृति 12.5 (*b*))

(iii) तल का समीकरण $z = 0$, xy तल को निरूपित करता है और $z = 3$, xy तल के समांतर ऊपर की दिशा में 3 ईकाई की दूरी पर एक अन्य तल को निरूपित करता है। (आकृति 12.5 (c))

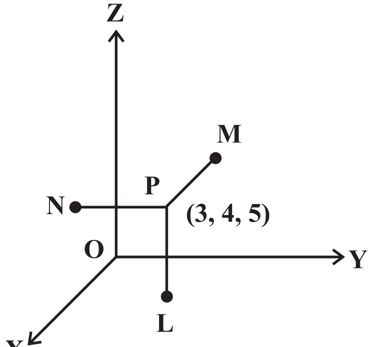


आकृति 12.5

उदाहरण 3 मान लीजिए बिंदु P (3, 4, 5) से *x, y* एवं z अक्ष पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः L, M एवं N हैं। L, M एवं N के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदु P से *x*-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है इसलिए इसके *y* एवं *z* निर्देशांक शून्य हैं। अतः L के निर्देशांक (3, 0, 0) हैं। इसी प्रकार M एवं N के निर्देशांक (0, 4, 0) एवं (0, 0, 5) हैं।

उदाहरण 4 मान लीजिए L, M, N किसी बिंदु P(3, 4, 5) से क्रमशः *xy, yz* एवं *zx* तलों पर खींचे गए लंब-खंडों के पाद बिंदु हैं। L, M एवं N के निर्देशांक क्या हैं?

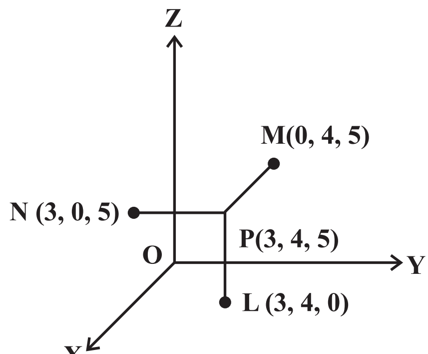


आकृति 12.6

हल क्योंकि L बिंदु P से *xy* तल पर खींचे गए लंबखंड का पाद बिंदु है और *xy* तल पर *z* निर्देशांक शून्य है, इसलिए L के निर्देशांक (3, 4, 0) हैं। इसी प्रकार हम M (0, 4, 5) एव N (3, 0, 5) ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 5 मान लीजिए L, M, N किसी बिंदु P(3, 4, 5) से क्रमशः *xy, yz* एवं *zx* तलों पर खींचे गए लंबखंडों के पाद बिंदु है। इन बिंदुओं L, M, N का बिंदु P से दूरियां ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि L बिंदु P से *xy* तल पर खींचे गए लंबखंड का पाद बिंदु है। इसलिए बिंदु के निर्देशांक (3, 4, 0) है। बिंदु (3, 4, 5) एवं बिंदु (3, 4, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है। इसी प्रकार हम *yz* एवं *zx* तल पर खींचे गए लंबखंडों की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं जो क्रमशः 3 इकाई एवं 4 इकाई है।



आकृति 12.7

उदाहरण 6 दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि बिंदु P (2, 4, 6), Q (– 2, – 2, – 2) एवं R (6, 10, 14) संरेख हैं।

हल तीन बिंदु संरेख होते हैं यदि दो दूरियों का योग तीसरी दूरी के समान है।

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2+(-2-4)^2+(-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$QR = \sqrt{(6+2)^2+(10+2)^2+(14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$$

$$PR = \sqrt{(6-2)^2+(10-4)^2+(14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

क्योंकि QR = PQ + PR इसलिए दिए हुए बिंदु संरेख हैं।

उदारहण 7 चार बिंदुओं O (0, 0, 0), A (l, 0, 0), B (0, m, 0) एवं C (0, 0, n) से समदूरस्थ एक बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए P (x, y, z) वांछित बिंदु है। तब OP = PA = PB = PC

अब, OP = PA $\Rightarrow OP^2 = PA^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x - l)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$

इसी प्रकार, OP = PB $\Rightarrow y = \frac{m}{2}$ और OP = PC $\Rightarrow z = \frac{n}{2}$

अतः वांछित बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ हैं।

उदाहरण 8 बिंदुओं A (3, 2, 2) तथा B (5, 5, 4) से समदूरस्थ, x-अक्ष पर स्थित एक बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल x-अक्ष पर बिंदु P (x, 0, 0) के रूप का होगा। क्योंकि बिंदु A तथा B बिंदु P से समदूरस्थ हैं, इसलिए $PA^2 = PB^2$ अर्थात्

$$(x - 3)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (0 - 4)^2$$

$$\Rightarrow 4x = 25 + 25 + 16 - 17 \text{ अर्थात् } x = \frac{49}{4}.$$

अतः A तथा B से समदूरस्थ, x-अक्ष पर स्थित बिंदु $\left(\frac{49}{4}, 0, 0\right)$ है।

उदाहरण 9 y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) से $\sqrt{10}$ की दूरी पर है।

हल मान लीजिए y-अक्ष पर P कोई बिंदु हैं। इसलिए यह P(0, y, 0) के रूप में है।

बिंदु (1, 2, 3), बिंदु P(0, y, 0) से $\sqrt{10}$ की दूरी पर है।

इसलिए $\sqrt{(1-0)^2+(2-y)^2+(3-0)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$

अतः (0, 2, 0) अभीष्ट बिंदु है।

उदाहरण 10 यदि बिंदुओं (2, 3, 5) एवं (5, 9, 7) से निर्देशांक अक्षों के समांतर खींचे गए तलों से एक षट्फलकीय बनाया गया है, तो उस षट्फलकीय के किनारों एवं विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल षट्फलकीय के किनारों की लम्बाई 5 – 2, 9 – 3, 7 – 5 अर्थात् 3, 6, 2 हैं।

विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{3^2+6^2+2^2} = 7$ इकाई है।

उदाहरण 11 दर्शाइए कि बिंदु (0, 7, 10), (–1, 6, 6) एवं (– 4, 9, 6) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल मान लीजिए दिए हुए तीन बिंदु P (0, 7, 10), Q (–1, 6, 6) एवं R (– 4, 9, 6) हैं।

यहां $PQ = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$

$QR = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$

$PR = \sqrt{16+4+16} = 6$

अब $PQ^2 + QR^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = (PR)^2$

इसलिए Δ PQR एक समकोण त्रिभुज है। साथ ही, PQ = QR अतः Δ PQR समद्विबाहु है।

उदाहरण 12 दर्शाइए कि बिंदु (5, –1, 1), (7, – 4, 7), (1 – 6, 10) एवं (–1, – 3, 4) एक सम चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल मान लीजिए A (5, – 1, 1), B (7, – 4, 7), C(1, – 6, 10) एवं D (– 1, – 3, 4), किसी चतुर्भुज के चार शीर्ष हैं।

$AB = \sqrt{4+9+36} = 7$, $BC = \sqrt{36+4+9} = 7$, $CD = \sqrt{4+9+36} = 7$,

$DA = \sqrt{23+4+9} = 7$

ध्यान दीजिए कि AB = BC = CD = DA) ABCD एक समचतुर्भुज है।

उदारहण 13 ज्ञात कीजिए कि बिंदुओं (2, 4, 5) एवं (3, 5, – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को *xz*-तल किस अनुपात में बाँटता है।

हल मान लीजिए *xz* तल, बिंदुओं P (2, 4, 5) एवं Q (3, 5, – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को $k : 1$ के अनुपात में बिंदु $R(x, y, z)$ विभाजित करता है।

$$x=\frac{3k+2}{k+1},\ y=\frac{5k+4}{k+1},\ z=\frac{-4k+5}{k+1}$$

क्योंकि बिंदु R, *x*, *y* तल में स्थित हैं इसलिए इसका *y*-निर्देशांक शून्य होना चाहिए

अर्थात् $$\frac{5k+4}{k+1} = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{5}$$

अतः अभीष्ट अनुपात –4: 5 है अर्थात् तल दिए हुए रेखाखंड को 4 : 5 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

उदाहरण 14 एक बिंदु P, बिंदु A (– 2, 0, 6) से बिंदु B (10, – 6, – 12) के बीच रास्ते के $\frac{5}{6}$ वें भाग पर स्थित है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

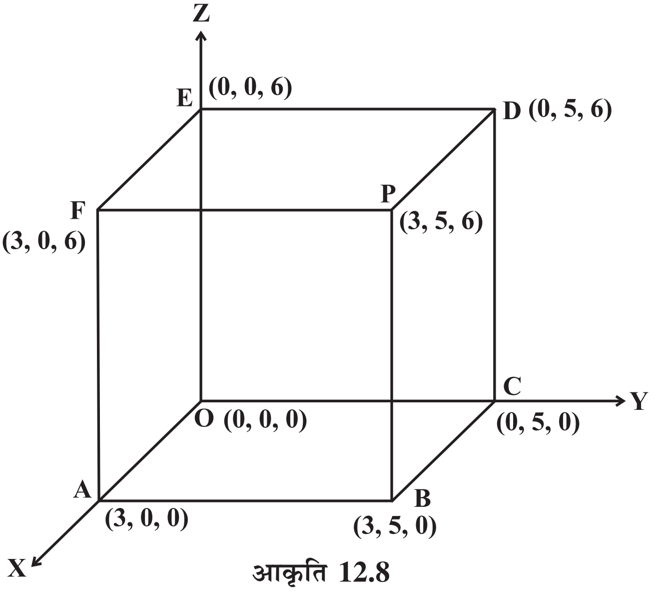
हल मान लीजिए P (*x*, *y*, *z*) वांछित बिंदु हैं अर्थात् P, AB को 5 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। इसलिए

$$\mathrm{P}\,(x, y, z) = \left(\frac{5\times10+1\times-2}{5+1}, \frac{5\times-6+1\times0}{5+1}, \frac{5\times-12+1\times6}{5+1}\right) = (8, -5, -9)$$

उदाहरण 15 एक समकोणिक षट्फलकीय के शीर्ष एवं किनारा ज्ञात कीजिए यदि उसका एक शीर्ष (3, 5, 6) प्रथम अष्टांशक में है, एक शीर्ष मूल बिंदु पर है और उसके किनारे *x*, *y* एवं *z* अक्षों के अनुदिश हैं।

हल: षट्फलकीय के छः तल निम्न प्रकार हैं–

तल OABC, *xy*-तल में स्थित है। इस तल में स्थित प्रत्येक बिंदु का *z* निर्देशांक शून्य है। इस तल में *xy* का समीकरण $z = 0$, तल PDEF, *xy* तल के समांतर एवं ऊपर की तरफ 6 ईकाई की दूरी पर स्थित है। इस तल का समीकरण $z = 6$ है। तल ABPF, तल $x = 3$ का निरूपित करता है। तल OCDE, *yz*-तल में स्थित है और इस तल का समीकरण $x = 0$ है। तल AOEF, *xz* तल में स्थित है। इस तल में स्थित प्रत्येक बिंदु का *y*-निर्देशांक शून्य है। इसलिए इस तल का समीकरण $y = 0$ है।



आकृति 12.8

तल BCDP, तल AOEF के समांतर $y = 5$ की दूरी पर है।

किनारा OA, *x*-अक्ष पर स्थित है *x*-अक्ष का समीकरण $y = 0$ एवं $z = 0$ है।

किनारा OC एवं OE क्रमशः *y*-अक्ष एवं *z*-अक्ष पर स्थित हैं। *y*-अक्ष के समीकरण $z = 0, x = 0$ है। *z*-अक्ष

का समीकरण $x = 0,\ y = 0$ है। बिंदु P (3, 5, 6) की x-अक्ष से लंबवत् दूरी $\sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$ है। बिंदु P (3, 5, 6) की y-अक्ष एवं z-अक्ष से दूरियाँ क्रमशः $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$ एवं $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ हैं। बिंदु P (3, 5, 6) से निर्देशांक अक्षों पर खींचे गए लम्बों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक A, C एवं E है। बिंदु P(3, 5, 6) से निर्देशांक तलों xy, yz एवं zx पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक क्रमशः (3, 5, 0), (0, 5, 6) एवं (3, 0, 6) है। हम यह भी देखते हैं कि बिंदु P की तलों xy, yz एवं zx से लंबवत् दूरियाँ क्रमशः 6, 5 एवं 3 हैं।

उदाहरण 16 मान लीजिए तीन बिंदु A (3, 2, 0), B (5, 3, 2) एवं C (– 9, 6, – 3), एक त्रिभुज बनाते हैं। $\angle$BAC का कोण समद्विभाजक AD, भुजा BC को D पर मिलता है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए:

$$AB=\sqrt{(5-3)^2+(3-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+1+4} = 3$$

$$AC=\sqrt{(-9-3)^2+(6-2)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{144+16+9} = 13$$

क्योंकि AD, $\angle$BAC का कोण समद्विभाजक है इसलिए हम $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{13}$ प्राप्त करते हैं।

अर्थात् बिंदु D, BC को 3 : 13 के अनुपात में विभाजित करता है। इस प्रकार D के निर्देशांक

$$\left(\frac{3(-9)+13(5)}{3+13}, \frac{3(6)+13(3)}{3+13}, \frac{3(-3)+13(2)}{3+13}\right)=\left(\frac{19}{8}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$$ हैं।

उदाहरण 17 yz-तल में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो तीन बिंदुओं A (2, 0 3) B (0, 3, 2) एवं C (0, 0, 1) से समदूरस्थ है।

हल क्योंकि yz तल में स्थित किसी भी बिंदु का x-निर्देशांक शून्य है। इसलिए P (0, y, z), yz-तल में एक बिंदु हैं और PA = PB = PC

PA = PB $\Rightarrow (0-2)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2 = (0-0)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2$

अर्थात् $\qquad z - 3y = 0 \qquad (1)$

एवं PB = PC $\Rightarrow y^2 + 9 - 6y + z^2 + 4 - 4z = y^2 + z^2 + 1 - 2z$

अर्थात् $\qquad 3y + z = 6 \qquad (2)$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर

हम $y = 1, z = 3$ प्राप्त करते हैं। इसलिए बिंदु P के निर्देशांक (0, 1, 3) हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 18 से 23 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए: (M.C.Q)

उदाहरण 18 बिंदु P (3, 4, 5) से y-अक्ष पर खींचे गए लंब की लम्बाई है:

(A) 10 (B) $\sqrt{34}$ (C) $\sqrt{113}$ (D) $5\sqrt{2}$

हल मान लीजिए बिंदु P से y-अक्ष पर खींचे गए लम्ब का पाद बिंदु l है इसलिए इसके x एवं z निर्देशांक शून्य हैं अर्थात् (0, 4, 0) इसलिए बिंदुओं (0, 4, 0) एवं (3, 4, 5) के बीच की दूरी $\sqrt{9+25}$ अर्थात् $\sqrt{34}$ है।

उदाहरण 19 बिंदु P (6, 7, 8) की xy-तल से लम्बवत् दूरी है:

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं है।

हल मान लीजिए बिंदु P(6, 7, 8) से xy तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है और इस पाद बिंदु L की P से दूरी, P के Z निर्देशांक के समान है। अर्थात् 8 ईकाई है।

उदाहरण 20 बिंदु P (6, 7, 8) से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है। बिंदु L के निर्देशांक है:

(A) (6, 0, 0) (B) (6, 7, 0) (C) (6, 0, 8) (D) इनमें से कोई

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदु P से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और xy-तल में z निर्देशांक शून्य है। इसलिए L के निर्देशांक (6, 7, 0) हैं।

उदाहरण 21 किसी बिंदु (6, 7, 8) से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है। L के निर्देशांक हैं:

(A) (6, 0, 0) (B) (0, 7, 0) (C) (0, 0, 8) (D) कोई नहीं

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदुओं से P से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और y एवं z-निर्देशांक शून्य हैं। अत: L के निर्देशांक (6, 0, 0) हैं।

उदाहरण 22 एक बिंदु, जिसके लिए $y = 0, z = 0$, का बिंदु पथ है:

(A) x-अक्ष का समीकरण (B) y-अक्ष का समीकरण

(C) z-अक्ष का समीकरण (D) इनमें से कोई नहीं

हल जिस बिंदु के लिए $y = 0, z = 0$ उसका बिंदुपथ x-अक्ष है क्योंकि x-अक्ष पर y एवं z दोनों शून्य होते हैं।

उदाहरण 23 बिंदु L, बिंदु P (3, 4, 5) से xz तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है। बिंदु L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) (3, 4, 0)

हल क्योंकि L, बिंदु P (3, 4, 5) से xz-तल पर डालें गए लंब का पाद बिंदु है और xz तल में स्थित सभी बिंदुओं का y निर्देशांक शून्य है। इसलिए लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (3, 0, 5) है।

उदाहरण संख्या 24 से 28 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदाहरण 24 एक रेखा xy तल के समांतर है, यदि रेखा पर स्थित सभी बिंदुओं के ________ समान है।

हल xy तल के समांतर रेखा पर सभी बिंदुओं के z निर्देशांक समान होते हैं।

उदाहरण 25 समीकरण $x = b$ ______ तल के समांतर एक तल को निरूपित करता है।

हल क्योंकि $x = 0$, yz तल को निरूपित करता है इसलिए $x = b$, yz तल के समांतर मूलबिंदु से b इकाई की दूरी पर एक अन्य तल को निरूपित करता है।

उदाहरण 26 y-अक्ष से बिंदु P (3, 5, 6) की लंबवत् दूरी ______ है।

हल क्योंकि M, बिंदु P से y-अक्ष पर डाले गए लंब का पाद बिंदु है। इसलिए इसके x एवं z निर्देशांक शून्य हैं। M के निर्देशांक (0, 5, 0) हैं। P की y-अक्ष से लंबवत दूरी $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$ है।

उदाहरण 27 L, बिंदु P (3, 4, 5) से zx तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है। L के निर्देशांक ______ हैं।

हल क्योंकि, L बिंदु P से zx-तल पर बनाए गए लंब का पाद बिंदु है और zx तल में प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक शून्य है। अत: L के निर्देशांक (3, 0, 5) हैं।

उदाहरण 28 बिंदु P (a, b, c) से z-अक्ष पर बनाए गए लंब के पाद बिंदु की P से दूरी ______ है।

हल P (a, b, c) से z-अक्ष पर बनाए गए लंब के निर्देशांक (0, 0, c) इसलिए बिंदु P (a, b, c) एवं बिंदु (0, 0, c) के बीच की दूरी $\sqrt{a^2+b^2}$ है।

बताइए कि उदाहरण संख्या 29 से 36 तक के कथन सत्य है अथवा असत्य है–

उदाहरण 29 y-अक्ष एवं z-अक्ष संयुक्त रूप से एक तल का निर्धारण करते हैं जिसे yz तल कहा जाता है।

उदाहरण सत्य

उदारहण 30 बिंदु (4, 5, – 6) छठे अष्टांशक में स्थत हैं।

हल असत्य, बिंदु (4, 5, – 6) 5वें अष्टांशक में है।

उदाहरण 31 x-अक्ष, दो तलों xy-तल एवं xz तल का प्रतिच्छेदन है।

हल सत्य

उदाहरण 32 तीन परस्पर लंब तल अंतरिक्ष को आठ अष्टांशक में विभाजित करते हैं।

हल सत्य

उदाहरण 33 तल का समीकरण $z = 6$ एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो xy-तल के समांतर है और जिसका z अंत:खंड 6 इकाई है।

हल सत्य

उदाहरण 34 तल का समीकरण $x = 0$, yz-को निरूपित करता है।

हल सत्य

उदाहरण 35 x-अक्ष का बिंदु, जिसका x-निर्देशांक x_0 है, को $(x_0, 0, 0)$ के रूप में लिखा जाता है।

हल सत्य

उदाहरण 36 $x = x_0$, yz-तल के समांतर एक तल को निरूपित करता है।

हल सत्य

उदाहरण 37 स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत दिए प्रश्नों में से प्रत्येक को, स्तम्भ C_2 के अन्तर्गत दिए गए सही उत्तर से मिलान कीजिए।

	स्तम्भ C_1		**स्तम्भ C_2**
(a)	यदि एक त्रिभुज का केन्द्रक मूल बिंदु पर है और दो शीर्ष (3, – 5, 7) एवं (–1, 7, – 6) हैं, तो तीसरा शीर्ष है:	(i)	समांतर चतुर्भुज
(b)	यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (1, 2, – 3), (3, 0, 1) एवं (–1, 1, – 4) हैं तो उसका केन्द्रक हैं:	(ii)	(–2, –2, –1)
(c)	बिंदु (3, – 1, – 1), (5, – 4, 0), (2, 3, – 2) एवं (0, 6, – 3) किसके शीर्ष हैं?	(iii)	समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
(d)	बिंदु A(1, –1, 3), B (2, – 4, 5) एवं C (5, – 13, 11) हैं:	(iv)	(1, 1, – 2)
(e)	बिंदु A (2, 4, 3), B (4, 1, 9) एवं C (10, – 1, 6) किसके शीर्ष हैं?	(v)	संरेख

हल (a) मान लीजिए A (3, – 5, 7), B (– 1, 7, – 6), C (x, y, z) ऐसे त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, जिसका केन्द्रक (0,0,0) है।

$$\text{इसलिए } (0, 0, 0) = \left(\frac{3-1+x}{3}, \frac{-5+7+y}{3}, \frac{7-6+z}{3}\right) \Rightarrow \frac{x+2}{3}=0,\ \frac{y+2}{3}=0,\ \frac{z+1}{3}=0.$$

अत: $x = -2$, $y = -2$ एवं $z = -1$ इसलिए (a) $\leftrightarrow$ (ii)

(b) मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और DEF क्रमश: BC, CA एवं AB के मध्य बिंदु हैं। हम जानते हैं कि त्रिभुज ABC का केंद्रक = त्रिभुज DEF का केंद्रक

Δ का केन्द्रक $\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+0+1}{3}, \frac{-3+1-4}{3}\right)$ अर्थात् (1, 1, – 2) है।

अत: (b) $\leftrightarrow$ (iv)

(c) विकर्ण AC का मध्य बिंदु $\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$ है।

विकर्ण BD का मध्य बिंदु $\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-4+6}{2}, \frac{0-3}{2}\right)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$ है।

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को बराबर भागों में बांटते हैं। इसलिए (c) $\leftrightarrow$ (i)

(d) $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (-4+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{14}$

$|BC| = \sqrt{(5-2)^2 + (-13+4)^2 + (11-5)^2} = 3\sqrt{14}$

$|AC| = \sqrt{(5-1)^2 + (-13+1)^2 + (11-3)^2} = 4\sqrt{14}$

अब $|AB| + |BC| = |AC|$ अत: बिंदु A, B, C संरेख है। इसलिए (d) $\leftrightarrow$ (v)

(e) $AB = \sqrt{4+9+36} = 7$

$BC = \sqrt{36+4+9} = 7$

$CA = \sqrt{64+25+9} = 7\sqrt{2}$

अब $AB^2 + BC^2 = AC^2$ इस प्रकार ABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है। अत: (e) $\leftrightarrow$ (iii)

12.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित बिंदुओं का स्थान निर्धारित (Locate) कीजिए:

   (i) (1, – 1, 3), (ii) (– 1, 2, 4)

   (iii) (– 2, – 4, –7) (iv) (– 4, 2, – 5).

2. निम्नलिखित बिंदुओं में से प्रत्येक के लिए उस अष्टांश (octane) का नाम लिखिए जिसमें वह बिंदु स्थित है:

   (i) (1, 2, 3), (ii) (4, – 2, 3), (iii) (4, –2, –5) (iv) (4, 2, –5)

   (v) (– 4, 2, 5) (vi) (–3, –1, 6) (vii) (2, – 4, – 7) (viii) (– 4, 2, – 5).

3. एक बिंदु P से x, y एवं z अक्ष पर बनाए गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः A, B, C हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A, B, C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(i) (3, 4, 2) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5)

4. एक बिंदु P से xy, yz एवं zx तल पर बनाए गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः A, B एवं C हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A, B, C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदु P है–

(i) (3, 4, 5) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5).

5. बिंदु, (2, 0, 0) एवं (–3, 0, 0) एक दूसरे से कितनी दूरी पर हैं?

6. मूल बिंदु से बिंदु (6, 6, 7) तक की दूरी ज्ञात कीजिए।

7. दर्शाइए कि यदि $x^2 + y^2 = 1$, तो बिंदु $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\,)$ मूल बिंदु से 1 इकाई की दूरी पर है।

8. दर्शाइए कि बिंदु A (1, – 1, 3), B (2, – 4, 5) एवं C(5, – 13, 11) संरेख है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन क्रमागत शीर्ष A (6, – 2, 4), B (2, 4, – 8), C (–2, 2, 4) है। चौथे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य बिंदु समान होते हैं।]

10. दर्शाइए कि त्रिभुज ABC, जिसके शीर्ष A (0, 4, 1), B (2, 3, – 1) एवं C (4, 5, 0) हैं, एक समकोण त्रिभुज है।

11. एक ऐसे त्रिभुज का तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रक मूल बिंदु है और दो शीर्ष (2, 4, 6) एवं (0, –2, –5) हैं।

12. एक त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए यदि उसकी भुजाओं के मध्य बिंदु D (1, 2, – 3), E (3, 0, 1) एवं F (– 1, 1, – 4) हैं।

13. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (5, 7, 11), (0, 8, 5) एवं (2, 3, – 1) हैं। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

14. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्ष A (1, 2, 3), B (– 1, – 2, – 1) एवं C (2, 3, 2) हैं। चौथा शीर्ष D ज्ञात कीजिए।

15. ऐसे बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं A (2, 1, – 3) तथा B (5, – 8, 3) को मिलाने वाले रेखा खंड को समत्रिभाजित करते हैं।

16. यदि एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A (a, 1, 3), B (– 2, b, – 5) एवं C (4, 7, c) हैं तथा केन्द्रक मूल बिंदु पर है, तो a, b, c के मान ज्ञात कीजिए।

17. मान लीजिए कि A (2, 2, – 3), B (5, 6, 9) एवं C (2, 7, 9) एक त्रिभुज के शीर्ष हैं। कोण A का अंतः समद्विभाजक BC को बिंदु D पर मिलाता है। D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

18. दर्शाइए कि तीन बिंदु A (2, 3, 4), B (–1, 2, – 3) एवं C (– 4, 1, – 10) संरेख हैं। बिंदु C द्वारा AB को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

19. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (1, 5, – 1), (0, 4, – 2) एवं (2, 3, 4) हैं। त्रिभुज के शीर्ष तथा केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (0, – 1, – 7), (2, 1, – 9) एवं (6, 5, – 13) संरेख हैं। प्रथम बिंदु द्वारा अन्य दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करने का अनुपात ज्ञात कीजिए।

21. दो इकाई भुजा वाले एक घन के शीर्ष क्या हैं, यदि उसका एक शीर्ष मूल बिंदु के संपाती है, और मूल बिंदु से जाने वाली तीन भुजाएं मूलबिंदु से जाने वाली अक्षों की धनात्मक दिशाओं के संपाती हैं।

वस्तुनिष्ठीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 22 *से* 34 *तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए–* (M.C.Q.)

22. बिंदु P(3, 4, 5) की yz-तल से दूरी है:

(A) 3 इकाई (B) 4 इकाई (C) 5 इकाई (D) 550 इकाई

23. बिंदु P (3, 4, 5) से y-अक्ष पर बनाए गए पाद लम्ब की लम्बाई है।

(A) $\sqrt{41}$ (B) $\sqrt{34}$ (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं।

24. बिंदु (3, 4, 5) की मूल बिंदु से दूरी है:

(A) $\sqrt{50}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

25. यदि बिंदुओं (a, 0, 1) और (0, 1, 2) के बीच की दूरी $\sqrt{27}$ है, तो a का मान है:

(A) 5 (B) ± 5 (C) – 5 (D) इनमें से कोई नहीं

26. x-अक्ष निम्नलिखित में से कौन से दो तलों का प्रतिच्छेन है:

(A) xy एवं xz (B) yz एवं zx (C) xy एवं yz (D) इनमें से कोई नहीं

27. y-अक्ष का समीकरण है:

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $y = 0, z = 0$ (C) $z = 0, x = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. बिंदु (–2, –3, –4) निम्नलिखित में से किस अष्टांशक (octant) में स्थित है:

(A) प्रथम (B) सातवां

(C) दूसरा (D) आठवां

29. एक तल, yz तल के समांतर है इसलिए यह लम्ब है:

(A) x-अक्ष पर (B) y-अक्ष पर (C) z-अक्ष पर (D) इनमें से कोई नहीं

30. एक बिंदु, जिसके लिए $y = 0, z = 0$, का बिंदुपथ है:

(A) x-अक्ष का समीकरण (B) y-अक्ष का समीकरण

(C) z-अक्ष का समीकरण (D) इनमें से कोई नहीं

31. एक बिंदु, जिसके लिए $x = 0$, का बिंदुपथ है:

(A) xy-तल (B) yz-तल (C) zx-तल (D) इनमें से कोई नहीं

32. यदि बिंदुओं (5, 8, 10) एवं (3, 6, 8) से, निर्देशांक तलों के समांतर तल खींचकर एक षट्फलकीय बनाया जाता है, तो उसके विकर्ण की लम्बाई है:

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

33. L, बिंदु P (3, 4, 5) से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है, बिंदु L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) कोई नहीं

34. किसी बिंदु (3, 4, 5) से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L हैं। L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 0) (C) (0, 0, 5) (D) कोई नहीं

प्रश्न संख्या 35 से 49 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

35. तीन अक्ष OX, OY, OZ बनाते हैं _________

36. तीन तल समकोणिक षट्फलकीय को दर्शाते हैं, जिसमें _________ समकोणिक फल होते हैं।

37. किसी बिंदु के निर्देशांक _________ से क्रमागत अक्षों पर लंबवत् दूरी होती है।

38. तीन निर्देशांक तल अंतरिक्ष को _________ भागों में विभाजित करते हैं।

39. यदि कोई बिंदु P, yz तल में स्थित है, तो yz तल में उस बिंदु के निर्देशांक _________ के रूप में होंगे।

40. yz तल का समीकरण _________ है।

41. यदि बिंदु P, z-अक्ष पर स्थित है, तो P के निर्देशांक _________ के रूप में होंगे।

42. z-अक्ष का समीकरण _________ है।

43. एक रेखा xy तल के समांतर है, यदि रेखा के सभी बिंदुओं का _________ समान है।

44. एक रेखा x-अक्ष के समांतर है यदि रेखा के सभी बिंदुओं का _________ समान है।

45. $x = a$ एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो _________ के समांतर है।

46. yz-तल के समांतर तल _________ के लंबवत है।

47. एक समकोणिक कमरे की विमाएं 10, 13 एवं 8 इकाई है। उस कमरे में सीधे फैलाई जा सकने वाली रस्सी की अधिकतम लम्बाई _______ है।

48. यदि बिंदुओं $(a, 2, 1)$ एवं $(1, -1, 1)$)के बीच की दूरी 5 है, तो a का मान ________ है।

49. यदि एक त्रिभुज की भुजाओं AB, BC, CA के मध्य बिंदु क्रमश: D $(1, 2, -3)$, E $(3, 0, 1)$ एवं F $(-1, 1, -4)$ हैं, तो त्रिभुज ABC का केन्द्रक _________ है।

50. स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत दिए हुए प्रत्येक प्रश्न का स्तम्भ C_2 के अन्तर्गत दिए गए सही उत्तर के साथ मिलान कीजिए।

स्तम्भ C_1	**स्तम्भ C_2**
(a) xy-तल में	(i) प्रथम अष्टांशक
(b) बिंदु (2, 3,4) स्थित है।	(ii) yz-तल
(c) ऐसे बिंदु जिनका x निर्देशांक शून्य हैं उनका बिंदुपथ है:	(iii) z-निर्देशांक शून्य है
(d) एक रेखा x-अक्ष के समांतर है यदि और केवल यदि	(iv) z-अक्ष
(e) यदि $x = 0, y = 0$ को संयुक्त रूप से लेने पर निरूपित करते हैं	(v) xy-तल के समांतर तल
(f) $z = c$ जिस तल को निरूपित करता है वह है:	(vi) यदि रेखा के सभी बिंदुओं के y एवं z निर्देशांक समान है।
(g) तल $x = a$, और तल $y = b$ जिस रेखा को निरूपित करते हैं वह है:	(vii) बिंदु से क्रमागत अक्षों पर
(h) एक बिंदु के निर्देशांक मूल बिंदु से लंब के पाद बिंदु तक की दूरी है	(viii) z - अक्ष के समांतर
(i) अंतरिक्ष में एक गेंद जिससे घिरा हुआ ठोस क्षेत्र है वह है	(ix) चक्रिका (डिस्क)
(j) तल में वृत्त से घिरा हुआ क्षेत्र कहलाता है।	(x) गोला

अध्याय 13

सीमा और अवकलज

13.1 समग्र अवलोकन (Overview)

13.1.1 *एक फलन की सीमा (Limit of a Function)*

माना f, अंतराल I में परिभाषित एक फलन है। हम अंतराल I के किसी बिन्दु a पर फलन f की सीमा की अवधारणा का अध्ययन करेंगे।

हम कहते हैं कि $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है, जिसने a के बाईं ओर निकट मानों के लिए f के मान दिए हैं। वह मान a पर f की बाएँ पक्ष की सीमा कहलाती है।

हम कहते हैं कि $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है जिसने a के दाईं ओर निकट मानों के लिए f के मान दिये हैं। यह मान a पर f की दाएँ पक्ष की सीमा कहलाती है।
यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x\to a} f(x)$ से निर्दिष्ट करते हैं।

सीमाओं के गुणधर्म (Some properties of limits)

मान लीजिए कि f और g दो ऐसे फलन हैं कि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या α के लिए

$$\lim_{x\to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x)$$

(iv) $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)]$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ दिया हुआ है } g(x) \neq 0$$

बहुपदों एवं परिमेय फलनों की सीमाएं यदि f एक बहुपदी फलन है, तो $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है और

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ से प्राप्त होती है।}$$

एक महत्वपूर्ण सीमा

एक महत्वपूर्ण बहुत उपयोगी सीमा नीचे दी हुई है:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

टिप्पणी: *यदि 'a' धनात्मक है, तो उपरोक्त व्यंजक सभी परिमेय संख्याओं n के लिए प्रमाणित है।*

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएं

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का मान ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित सीमाओं का उपयोग करेंगे:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

13.1.2 *अवकलज (Derivatives):* कल्पना कीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है, तो

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \ldots (1)$$

अवकलज कहलाता है यदि (1) के दाईं तरफ की सीमा अस्तित्व में है।

फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions) क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों को निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते हैं जैसा कि नीचे दिया हुआ है:

मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलज परिभाषित हैं। तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उनके अवकलजों का अन्तर है।

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम से प्राप्त होता है:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)$$

इसको Leibnitz के दो फलनों के गुणन के नियम से सम्बन्ध जोड़ा जाता है।

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफलनियम से प्राप्त होता है (जहां कहीं हर का फलन शून्य नहीं है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x) - f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{(g(x))^2}$$

13.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न

उदाहरण 1 मान ज्ञात कीजिए: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right]$

हल हम पाते हैं

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x(x-1)-2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-5x+6}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right] \quad [x-2 \neq 0]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x-3}{x(x-1)}\right] = \frac{-1}{2}$$

उदारहण 2 मान ज्ञात कीजिए: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

हल $y = 2 + x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि जब $x \to 0,\ y \to 2$

इसलिए $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{y\to 2}\frac{y^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{y-2} = \frac{1}{2}(2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण 3 यदि $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^n - 3^n}{x - 3} = 108$, तो धनात्मक पूर्णांक n ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^n - 3^n}{x - 3} = n(3)^{n-1}$$

इसलिए $\quad n(3)^{n-1} = 108 = 4\,(27) = 4(3)^{4-1}$

तुलनात्मक दृष्टि से हम $n = 4$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

हल $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि जब $y \to 0, x \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{y \to 0} [\sec(\frac{\pi}{2} - y) - \tan(\frac{\pi}{2} - y)]$$

$$= \lim_{y \to 0} (\operatorname{cosec} y - \cot y)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{\cos y}{\sin y} \right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1 - \cos y}{\sin y} \right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{since, } \sin^2 \frac{y}{2} = \frac{1 - \cos y}{2} \\ \sin y = 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} \end{array} \right)$$

$$= \lim_{\frac{y}{2} \to 0} \tan \frac{y}{2} = 0$$

उदाहरण 5 मान ज्ञात कीजिए: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}$

हल (i) हम पाते हैं

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\dfrac{(2+x+2-x)}{2}\sin\dfrac{(2+x-2+x)}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2\sin x}{x}$$

$$= 2\cos 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2\cos 2\left(\text{as}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

उदाहरण 6 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = ax + b$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ a तथा b शून्येतर अचर हैं।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{bh}{h} = b$$

उदाहरण 7 प्रथम सिद्धान्त की सहायता से $f(x) = ax^2 + bx + c$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ, a, b, c शून्येत्तर अचर हैं।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{bh+ah^2+2axh}{h} = \lim_{h\to 0} ah+2ax+b = b+2ax$$

उदाहरण 8 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = x^3$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3xh(x+h) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h^2 + 3x(x+h)) = 3x^2$$

उदाहरण 9 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

उदाहरण 10 प्रथम सिद्धांत से, $f(x) = \sin x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\frac{(2x+h)}{2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x.1 = \cos x$$

उदाहरण 11 प्रथम सिद्धांत से $f(x) = x^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

हल परिभाषा के अनुसार,

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

द्विपद प्रमेय के उपयोग से हमें $(x + h)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} h + ... + {}^nC_n h^n$, प्राप्त है।

अतः
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(nx^{n-1} + ... + h^{n-1}]}{h} = nx^{n-1}.$$

उदाहरण 12 $2x^4 + x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = 2x^4 + x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^4) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 2 \times 4x^{4-1} + 1x^0$$

$$= 8x^3 + 1$$

इसलिए
$$\frac{d}{dx}(2x^4 + x) = 8x^3 + 1.$$

उदाहरण 13 $x^2 \cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $y = x^2 \cos x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \cos x)$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 (-\sin x) + \cos x\,(2x)$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 14 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

हल ध्यान दीजिए:

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = (2 \sin x - 1)(\sin x + 1)$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = (2 \sin x - 1)(\sin x - 1)$$

इसलिए,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \qquad \text{(as } 2 \sin x - 1 \neq 0\text{)}$$

$$= \frac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6} - 1} = -3$$

उदाहरण 15 मान ज्ञात कीजिए $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

हल हमें प्राप्त है

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\left(4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 16 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

हल हम पाते हैं $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{a+2x-3x}{\left(\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(a-x)\ \sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)(3a+x-4x)}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3\times 2\sqrt{3a}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

उदाहरण 17 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-1}$

हल हम पाते हैं: $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{(a+b)}{2}x\right)\sin\dfrac{(a-b)x}{2}}{2\sin^2\dfrac{cx}{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{(a+b)x}{2}\cdot\sin\dfrac{(a-b)x}{2}}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{cx}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{(a+b)x}{2}}{\dfrac{(a+b)x}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{a+b}\right)}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{(a-b)x}{2}}{\dfrac{(a-b)x}{2}\cdot\dfrac{2}{a-b}}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{cx}{2}\right)^2\times\dfrac{4}{c^2}}{\sin^2\dfrac{cx}{2}}$$

$$=\left(\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{a-b}{2}\times\dfrac{4}{c^2}\right)=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$$

उदाहरण 18 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2\sin(a+h)-a^2\sin a}{h}$

हल हमें प्राप्त है $\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2\sin(a+h)-a^2\sin a}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(a^2+h^2+2ah)[\sin a\cos h+\cos a\sin h]-a^2\sin a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{a^2\sin a(\cos h-1)}{h}+\dfrac{a^2\cos a\sin h}{h}+(h+2a)(\sin a\cos h+\cos a\sin h)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{a^2\sin a\left(-2\sin^2\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h^2}{2}}\cdot\dfrac{h}{2}\right]+\lim_{h\to 0}\dfrac{a^2\cos a\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(h+2a)\sin(a+h)$$

$= a^2 \sin a \times 0 + a^2 \cos a\,(1) + 2a \sin a$

$= a^2 \cos a + 2a \sin a.$

उदाहरण 19 प्रथम सिद्धांत से $f(x) = \tan(ax + b)$, का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan\big(a\,(x+h)+b\big) - \tan\,(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sin\,(ax+ah+b)}{\cos\,(ax+ah+b)} - \dfrac{\sin\,(ax+b)}{\cos\,(ax+b)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\,(ax+ah+b)\cos\,(ax+b) - \sin\,(ax+b)\cos\,(ax+ah+b)}{h\cos\,(ax+b)\cos\,(ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a\sin\,(ah)}{a \cdot h\cos\,(ax+b)\cos\,(ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a}{\cos\,(ax+b)\cos\,(ax+ah+b)} \lim_{ah \to 0} \frac{\sin ah}{ah} \quad [\text{as } h \to 0 \;\, ah \to 0]$$

$$= \frac{a}{\cos^2\,(ax+b)} = a\sec^2\,(ax+b).$$

उदाहरण 20 $f(x) = \sqrt{\sin x}$, का अवकलज प्रथम सिद्धांत की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\sin\,(x+h)} - \sqrt{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{\sin\,(x+h)} - \sqrt{\sin x}\right)\left(\sqrt{\sin\,(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}{h\left(\sqrt{\sin\,(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2}\cot x\sqrt{\sin x}$$

उदाहरण 21 $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 22 *से* 28 *तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.)

उदाहरण 22 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x(1+\cos x)}$ का मान है:

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) –1

हल सही उत्तर (B) है।

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

उदारहण 23 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ का मान है:

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) अस्तित्वहीन है।

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{y \to 0}\left[\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\right] \left(\frac{\pi}{2}-x = \text{लेने पर}\right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = \lim_{y \to 0} \tan\frac{y}{2} = 0$$

उदाहरण 24 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ बराबर है:

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) अस्तित्वहीन है

हल सही उत्तर (D) है।

क्योंकि R.H.S = $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

एवं L.H.S = $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

उदाहरण 25 $\lim\limits_{x \to 1} [x-1]$, का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है? जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है।

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) does not exists

हल सही उत्तर (D) है।

क्योंकि R.H.S = $\lim\limits_{x \to 1^+} [x-1] = 0$

एवं L.H.S = $\lim\limits_{x \to 1^-} [x-1] = -1$

उदाहरण 26 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ का मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) अस्तित्वहीन है

हल सही उत्तर (A) है।

क्योंकि $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ एवं $-1 \le \sin \frac{1}{x} \le 1$ (सैंडविच प्रमेय के अनुसार)

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

उदाहरण 27 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

हल सही उत्तर (C) है। क्योंकि $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

उदाहरण 28 यदि $f(x) = x \sin x$, तो $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि $f'(x) = x \cos x + \sin x$

इसलिए $$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=1$$

13.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

मान ज्ञात कीजिए:

1. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ **2.** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ **3.** $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

4. $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}{x}$ **5.** $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^6-1}{(1+x)^2-1}$ **6.** $\lim_{x\to a}\frac{(2+x)^{\frac{5}{2}}-(a+2)^{\frac{5}{2}}}{x-a}$

7. $\lim_{x\to1}\frac{x^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **8.** $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}$

9. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4}{x^2+3\sqrt{2}x-8}$ **10.** $\lim_{x\to1}\frac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}$ **11.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^2}$

12. $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^5+243}$ **13.** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x-3}{2x-1}-\frac{4x^2+1}{4x^2-1}\right)$

14. Find 'n', if $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=80$, $n\in\mathbf{N}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

19. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{1-\cos nx}$

20. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{1-\cos 6x}}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$

21. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

22. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+3x}{2x+\tan 3x}$

24. $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

25. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cot^2 x-3}{\operatorname{cosec} x-2}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin 3x+\sin 5x}{x}$

28. यदि $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to k}\frac{x^3-k^3}{x^2-k^2}$ तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न संख्या 29 से 42 तक प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

29. $\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x}$

30. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

31. $(3x+5)(1+\tan x)$

32. $(\sec x-1)(\sec x+1)$

33. $\frac{3x+4}{5x^2-7x+9}$

34. $\frac{x^5-\cos x}{\sin x}$

35. $\frac{x^2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin x}$

36. $(ax^2+\cot x)(p+q\cos x)$

37. $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ **38.** $(\sin x + \cos x)^2$ **39.** $(2x-7)^2 (3x+5)^3$

40. $x^2 \sin x + \cos 2x$ **41.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **42.** $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

प्रश्न संख्या 43 से 46 तक प्रत्येक फलन का प्रथम सिद्धांत की सहायता से x के सापेक्ष अवकलन कीजिए–

43. $\cos(x^2+1)$ **44.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **45.** $x^{\frac{2}{3}}$ **46.** $x \cos x$

प्रश्न संख्या 47 से 53 तक प्रत्येक सीमा का मान ज्ञात कीजिए–

47. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x+\sin 2\alpha\, x)}{\cos 2\beta x-\cos 2\alpha x}\cdot x$

49. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^3 x-\tan x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ **50.** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}$

51. दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{x-4}$ अस्तित्वहीन है।

52. मान लीजिए $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x} & \text{जब } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3 & \text{जब } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ और यदि $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f(\frac{\pi}{2})$, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

53. मान लीजिए $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leq 1\\ cx^2 & x>-1\end{cases}$, और यदि $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ अस्तित्व में है तो 'c' का मान ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 54 से 76 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए ($M.C.Q$).

54. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ का मान है:

(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) –2

55. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos x}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}$ (D) 1

56. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ का मान है:

(A) n (B) 1 (C) $-n$ (D) 0

57. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ का मान है:

(A) 1 (B) $\frac{m}{n}$ (C) $-\frac{m}{n}$ (D) $\frac{m^2}{n^2}$

58. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4\theta}{1 - \cos 6\theta}$ का मान है:

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) –1

59. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$ का मान है:

(A) $\frac{-1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

60. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$ का मान है:

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) –1

61. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2}{\tan x - 1}$ का मान है:

(A) 3 (B) 1 (C) 0 (D) $\sqrt{2}$

62. $\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2x-3)}{2x^2+x-3}$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{-1}{10}$ (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

63. यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin[x]}{[x]}, & [x] \neq 0 \\ 0 & ,[x] = 0 \end{cases}$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निर्दिष्ट करता है, तो

$\lim_{x\to 0} f(x)$ का मान है:

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) इनमें से कोई नहीं

64. $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$ का मान है:

(A) 1 (B) –1 (C) अस्तित्वहीन है (D) इनमें से कोई नहीं

65. मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 < x < 2 \\ 2x+3, & 2 \le x < 3 \end{cases}$, यदि $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ एवं $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ एक द्विघात समीकरण के मूल है, तो वह द्विघात समीकरण है:

(A) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (B) $x^2 - 7x + 8 = 0$

(C) $x^2 - 14x + 49 = 0$ (D) $x^2 - 10x + 21 = 0$

66. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - x}{3x - \sin x}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

67. मान लीजिए $f(x) = x - [x]; \in \mathbf{R}$, तो $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) –1

68. यदि $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ at $x = 1$ का मान है:

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) 0

69. यदि $f(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 1 (D) 0

70. यदि $y = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है:

(A) $\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (B) $\frac{-4x}{x^2-1}$ (C) $\frac{1-x^2}{4x}$ (D) $\frac{4x}{x^2-1}$

71. यदि $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ के लिए $x = 0$ का मान है:

(A) –2 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) अस्तित्वहीन

72. यदि $y = \frac{\sin(x+9)}{\cos x}$, तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान है:

(A) $\cos 9$ (B) $\sin 9$ (C) 0 (D) 1

73. यदि $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{100}}{100}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) $\frac{1}{100}$ (B) 100 (C) अस्तित्वहीन (D) 0

74. यदि किसी अचर a के लिए $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$, तो $f'(a)$ का मान है:

(A) 1 (B) 0 (C) अस्तित्वहीन (D) $\frac{1}{2}$

75. यदि $f(x) = x^{100} + x^{99} + \ldots + x + 1$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) 5050 (B) 5049 (C) 5051 (D) 50051

76. यदि $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots - x^{99} + x^{100}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) 150 (B) –50 (C) –150 (D) 50

प्रश्न संख्या 77 से 80 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

77. यदि $f(x) = \frac{\tan x}{x - \pi}$, तो $\lim_{x \to \pi} f(x)$ = _______________

78. यदि $\lim_{x \to 0}\left(\sin mx \cot \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 2$, तो m = _______________

79. यदि $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, तो $\frac{dy}{dx}$ = _______________

80. $\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{[x]}$ = _______________

अध्याय 14

गणितीय विवेचन

14.1 समग्र अवलोकन (Overview)

यदि कोई वस्तु या तो काली है या सफ़ेद है और यदि वह काली नहीं है, तो तर्क (logic) हमें इस निष्कर्ष की ओर प्रेरित करता है कि वह वस्तु निश्चित ही सफ़ेद है। ध्यान दीजिए कि प्रदत्त परिकल्पना (hypotheses) से तार्किक विवेचन, यह उद्घाटित (reveal) नहीं कर सकता कि 'काली' या 'सफ़ेद' का अर्थ क्या है या कोई वस्तु दोनों ही क्यों नहीं हो सकती है? वस्तुत: तर्कशास्त्र किसी विशेष अर्थ अथवा संदर्भ के उल्लेख किए बिना, विवेचन के व्यापक (general) प्रतिरूप (पैटर्न) का अध्ययन है।

14.1.1 *कथन (Statements)*

कथन एक वाक्य है जो या तो सत्य होता है या असत्य परन्तु एक ही साथ दोनों नहीं होता है।

टिप्पणी: कोई वाक्य कथन नहीं हो सकता यदि

(i) वह विस्मयादिबोधक है

(ii) वह एक आदेश या प्रार्थना है

(iii) वह प्रश्नवाचक है

(iv) उसमें अनिश्चित समय जैसे 'आज', 'कल', 'बीता हुआ' आदि का उल्लेख है।

(v) उसमें अनिश्चित स्थान जैसे 'यहाँ', 'वहाँ', 'सभी जगह (सर्वत्र)' आदि का उल्लेख होता है।

(vi) उसमें सर्वनाम जैसे 'वह', 'वे' आदि का उल्लेख है।

उदाहरण 1

(i) वाक्य "नई दिल्ली भारत में है।" सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(ii) वाक्य "प्रत्येक आयत एक वर्ग है।" असत्य है। अत: यह एक कथन है।

(iii) वाक्य "दरवाज़ा बंद कीजिए।" को सत्य या असत्य निर्धारित नहीं किया जा सकता है (वस्तुत:, यह एक आदेश है)। अत: इसे कथन नहीं कहा जा सकता है।

(iv) वाक्य "आपकी आयु कितनी है?" को सत्य या असत्य निर्धारित नहीं किया जा सकता है (वस्तुत:, यह प्रश्नवाचक है)। अत: यह एक कथन है।

(v) वाक्य "x एक प्राकृत संख्या है।" की सत्यता या असत्यता x के मान पर निर्भर है। अतः इसे एक कथन नहीं माना (समझा) जा सकता है। तथापि (however) कुछ पुस्तकों में इसे मुक्त (open) कथन कहा गया है।

टिप्पणी : किसी कथन की 'सत्यता' या 'असत्यता' को उसका सत्यमान (Truth value) कहते हैं।

14.1.2 सरल कथन (*Simple statement*) एक कथन सरल कथन कहलाता है, यदि उसे दो या दो से अधिक कथनों में खण्डित नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 2 कथन '2 एक सम संख्या है।', 'किसी वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।' और 'चंडीगढ़, हरियाणा की राजधानी हैं।' सभी एक सरल कथन हैं।

14.1.3 *संयुक्त कथन* (*Compound statements*) एक संयुक्त कथन वह है, जो दो या दो से अधिक सरल कथनों से मिल कर बना होता है।

उदाहरण 3 कथन 'संख्या 11 विषम तथा अभाज्य दोनों ही है।' को दो सरल कथनों '11 एक विषम संख्या है।' तथा ''11 एक अभाज्य संख्या है।'' में खण्डित किया जा सकता है। अतः यह एक संयुक्त कथन है।

टिप्पणी : वे सरल कथन, जिनके संयोजन से एक संयुक्त कथन बनता है, संयुक्त के घटक (Component) कथन कहलाते हैं ।

14.1.4 *आधारभूत (आधारीय) तार्किक संयोजक* (*Basic logical connectives*) सरल कथनों को मिलाकर नए कथनों या संयुक्त कथनों की रचना करने की अनेक विधियाँ हैं। वे शब्द जो सरल कथनों को सम्मिलित या परिवर्तित करके नए कथनों या संयुक्त कथनों की रचना करते हैं, संयोजक कहलाते हैं। आधारीय संयोजक (तार्किक) 'संयोजन (conjunction)' अंगरेज़ी शब्द and (और) के संगत है; 'वियोजन (disjunction)' शब्द 'or (या)' के संगत है तथा 'निषेधन (negation)' शब्द 'not (नहीं)' के संगत है।

हम संयोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\wedge$' वियोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\vee$' तथा निषेधन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\sim$' का प्रयोग आद्योपान्त (throughout) करते रहेंगे।

टिप्पणी: निषेधन को एक संयोजक कहते हैं, यद्यपि यह दो या दो से अधिक कथनों को मिलाता नही है। वास्तव में यह किसी कथन का केवल रूपान्तरण (modification) कर देता है।

14.1.5 *संयोजन* (*Conjunction*) यदि दो सरल कथन p तथा q शब्द 'और (and)' द्वारा सम्बद्ध हों, तो परिणामी संयुक्त कथन "p और q" को p तथा q का संयोजन कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में "$p \wedge q$" लिखते हैं।

उदाहरण 4 निम्नलिखित सरल कथनों का संयोजन कीजिए।

p : दिनेश एक लड़का है।

q : नगमा एक लड़की है।

हल कथन p तथा q का संयोजन

$p \wedge q$: दिनेश एक लड़का है और नगमा एक लड़की है। के द्वारा व्यक्त होता है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित कथन का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

"जैक और जिल पहाड़ी के ऊपर गए।"

हल प्रदत्त कथन निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

"जैक पहाड़ी के ऊपर गया और जिल पहाड़ी के ऊपर गई।"

मान लीजिए कि p : जैक पहाड़ी के ऊपर गया। तथा q : जिल पहाड़ी के ऊपर गई। तब प्रतीकात्मक रूप में दिया गया कथन $p \wedge q$ है।

दो सरल कथनों p तथा q के संयोजक $p \wedge q$ के सत्यापन के संबंध में निम्नलिखित नियम हैं:

(D_1) : कथन $p \wedge q$ का सत्यामान T (सत्य) होता है, जब-जब (whenever) p तथा q दोनों के सत्यमान T होते हैं।

(D_2) : कथन $p \wedge q$ का सत्यमान F (असत्य) होता है, जब-जब या तो p या q या दोनों के सत्यमान F होते हैं।

उदाहरण 6 निम्नलिखित चार कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 6$.

(ii) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 5$.

(iii) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 5$.

(iv) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 6$.

हल उपर्युक्त (D_1) तथा (D_2) को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं कि कथन (i) का सत्यमान F है, क्योंकि कथन "$2 + 3 = 6$" का सत्यमान F है। साथ ही, कथन (ii) का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों कथनों ''दिल्ली भारत में है।'' तथा "$2 + 3 = 5$" के सत्यमान T हैं।

इसी प्रकार दोनों कथनों (iii) तथा (iv) के सत्यमान F हैं।

14.1.6 *वियोजन (Disjunction)* : यदि दो सरल कथन p तथा q शब्द 'या (or)', द्वारा सम्बद्ध हों तो परिणामी संयुक्त कथन "p या q" को p तथा q का वियोजन कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में "$p \vee q$" लिखते हैं।

उदाहरण 7 निम्नलिखित सरल कथनों के वियोजन की रचना कीजिए:

p : सूर्य चमकता है।

q : वर्षा होती है।

हल कथन p तथा q का वियोजन निम्नलिखित प्रकार है:

$p \vee q$: सूर्य चमकता है या वर्षा होती है।

दो सरल कथन p तथा q के वियोजन के सत्यमान के संबंध में निम्नलिखित नियम हैं:

(D_3) : कथन $p \vee q$ का सत्यमान F होता है जब p तथा q दोनों के सत्यमान F होते हैं।

(D_4) : कथन $p \vee q$ का सत्यमान T होता है, जब या तो p या q या दोनों के सत्यमान T होते हैं।

उदारहण 8 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) भारत एशिया में हैं या $2 + 2 = 4$.

(ii) भारत एशिया में है या $2 + 2 = 5$.

(iii) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 4$.

(iv) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 5$.

हल उपर्युक्त (D_3) तथा (D_4) को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं कि केवल अंतिम कथन का सत्यमान F है, क्योंकि उसके दोनों ही उप-कथनों ''भारत यूरोप में है।'' तथा "$2 + 2 = 5$" के सत्यमान F हैं। शेष (i) से (iii) तक के सभी कथनों का सत्यमान T है, क्योंकि इन कथनों के उप-कथनों में से कम से कम एक का सत्यमान T है।

14.1.7 *निषेधन (Negation)* :

किसी कथन के असफल होने को व्यक्त करने वाले एक निश्चयात्मक कथन को अथवा किसी कथन के खण्डन (अस्वीकृति) को उस कथन का निषेधन कहते हैं। किसी कथन के निषेधन की रचना सामान्यत: उस कथन में किसी उपयुक्त स्थान पर शब्द ''नहीं'' की प्रविष्टि द्वारा अथवा उस कथन के पहले (प्रारंभ में) कथन ''यह वस्तुस्थिति नहीं है कि'' अथवा ''यह असत्य है कि'' को लगा कर लिया जाता है।

किसी कथन p के निषेधन को प्रतीकात्मक रूप में "$\sim p$" लिखते हैं।

उदाहरण 9 कथन 'p : नई दिल्ली एक शहर है' का निषेधन लिखिए।

हल p का निषेधन निम्नलिखित प्रकार है:

$\sim p$: नई दिल्ली एक शहर नहीं है।

या $\sim p$: यह वस्तुस्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक शहर है।

या $\sim p$: यह असत्य है, कि नई दिल्ली एक शहर है।

किसी कथन p के निषेधन $\sim p$ के सत्यमान के सम्बंध में निम्नलिखित नियम हैं-

(D_5) : $\sim p$ का सत्यमान T होता है, जब-जब p का सत्यमान F हो।

(D_6) : $\sim p$ का सत्यमान F होता है, जब-जब p का सत्यमान T हो।

उदाहरण 10 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक के निषेधन का सत्यमान लिखिए:

(i) p : प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

(ii) q : पृथ्वी एक तारा है।

(iii) $r : 2 + 3 < 4$

हल (D_5) तथा (D_6) को ध्यान में रखते हुए, हम देखते हैं, कि $\sim p$ का सत्यमान F है, क्योंकि p का सत्यमान T है। इसी प्रकार $\sim q$ तथा $\sim r$ के सत्यमान T हैं, क्योंकि दोनों कथनों q तथा r के सत्यमान F हैं।

14.1.8 *संयुक्त कथनों के निषेधन*

14.1.9 *संयोजन का निषेधन* : स्मरण कीजिए कि संयोजन $p \wedge q$ दो घटक कथनों p तथा q से बना है, जिन दोनों का अस्तित्व एक साथ (simultaneously) होता है। अत: संयोजन के निषेधन का अर्थ, दो घटक कथनों में से कम से कम एक का निषेधन है।

(D_7) : संयोजन $p \wedge q$ का निषेधन, p के निषेधन तथा q के निषेधन का वियोजन होता है। समतुल्यत: हम लिखते हैं, कि

$$\sim (p \wedge q) = \ \sim p \ \vee \sim q$$

उदाहरण 11 निम्नलिखित संयोजन में से प्रत्येक का निषेधन लिखिए:

(a) पेरिस फ्राँस में है और लन्दन इंगलैण्ड में है।

(b) $2 + 3 = 5$ और $8 < 10$.

हल

(a) मान लीजिए कि, p : पेरिस फ्राँस में है तथा q : लन्दन इंगलैण्ड में है। तो (a) में व्यक्त संयोजन $p \wedge q$ है।

अब $\sim p$: पेरिस फ्राँस में नहीं है।

तथा $\sim q$: लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

अतएव (D_7), के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन नीचे व्यक्त है:

$\sim (p \wedge q)$: पेरिस फ्रांस में नहीं है या लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

(b) यदि $p : 2 + 3 = 5$ तथा $q : 8 < 10$, तो (b) में दिया संयोजन $p \wedge q$ है।

अब $\sim p : 2 + 3 \neq 5$ तथा $\sim q : 8 \not< 10$, तब (D_7) के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$-(p \wedge q) : (2 + 3 \neq 5)$ या $(8 \not< 10)$

14.1.10 *वियोजन का निषेधन* स्मरण कीजिए कि वियोजन $p \vee q$ दो घटक कथनों p तथा q से बना है, जो इस प्रकार हैं कि या तो p या q या दोनों का अस्तित्व है। इसलिए वियोजन के निषेधन का अर्थ p तथा q दोनों का ही एक साथ निषेधन है।

अतः प्रतीकात्मक रूप में

(D_8) : वियोजन $p \vee q$ का निषेधन, p के निषेधन तथा q के निषेधन का संयोजन होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं, कि

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

उदाहरण 12 निम्नलिखित वियोजन में से प्रत्येक का निषेधन लिखिए:

(a) राम कक्षा X में है या रहीम कक्षा XII में है।

(b) 7, 4 से बड़ा है या 6, 7 से छोटा है।

हल

(a) मान लीजिए कि p : राम कक्षा X में है तथा q : रहीम कक्षा XII में है, तो (a) में व्यक्त वियोजन $p \vee q$ है।

अब $\sim p$: राम कक्षा X में नहीं है।

$\sim q$: रहीम कक्षा XII में नहीं है।

अतएव (D_8) के प्रयोग से, $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$\sim (p \vee q)$: राम कक्षा X में नहीं है और रहीम कक्षा XII में नहीं है।

(b) मान लीजिए कि p : 7, 4 से बड़ा है तथा q : 6, 7 से छोटा है।

तब (D_8) के प्रयोग से $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$\sim (p \vee q)$: 7 , 4 से बड़ा नहीं है और 6, 7 से छोटा नहीं है।

14.1.11 *निषेधन का निषेधन* (*Negation of a negation*) जैसा कि पहले ही कहा जा चुका है कि निषेधन एक संयोजक नहीं है किंतु मात्र एक रूपांतरण (modifier) है। यह किसी प्रदत्त कथन को केवल रूपांतरित कर देता है तथा केवल एक अकेले (एकाकी) सरल या संयुक्त कथन पर लागू होता है। इसलिए, (D_5) तथा (D_6) को ध्यान में रखते हुए किसी कथन p के लिए,

(D_9) : किसी कथन के निषेधन का निषेधन स्वयं मूल कथन ही होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं कि,

$$\sim (\sim p) = p$$

14.1.12 *सप्रतिबंध कथन* (*The conditional statement*) स्मरण कीजिए कि, यदि p तथा q कोई दो कथन हों, तो **p तथा q** को संयोजक ''यदि ...... तो'' द्वारा जोड़ने पर प्राप्त संयुक्त कथन ''यदि p तो q'' को एक सप्रतिबंध कथन अथवा एक अंतर्भाव *(implication)* कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में $p \to q$ अथवा $p \Rightarrow q$ लिखते हैं। यहाँ, p को सप्रतिबंध कथन ($p \Rightarrow q$) की परिकल्पना (hypothesis) अथवा पूर्वपद (anticedent) तथा q को निष्कर्ष (conclusion) अथवा परपद (Consequent) कहते हैं।

टिप्पणी : सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को अन्य अनेक प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। इसके लिए प्रचलित कुछ अभिव्यक्तियाँ निम्नलिखित हैं:

(a) यदि p, तो q.

(b) q यदि p.

(c) p केवल यदि q.

(d) p पर्याप्त है q के लिए।

(e) q अनिवार्य है p के लिए।

ध्यान दीजिए कि सप्रतिबंध कथन $p \to q$ इस बात को प्रकट करता है कि जब-जब यह ज्ञात है कि p सत्य है, तब यह अर्थ अनिवार्यत: निकलता है कि q भी सत्य है।

उदारहण 13 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सप्रतिबंध कथन भी हैं:

(i) यदि $2 + 2 = 5$, तो रेखा को आइसक्रीम मिलेगी।

(ii) यदि आप रात्रि का भोजन (dinner) करेंगे, तो आपको मिष्ठान (dessert) मिलेगा।

(iii) यदि जॉन कठिन परिश्रम करता है, तो आज वर्षा होगी।

(iv) यदि ABC एक त्रिभुज है, तो $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

उदारहण 14 कथन $p \to q$ को शब्दों में व्यक्त कीजिए, जहाँ

p : आज वर्षा हो रही है।

$q : 2 + 3 > 4$

हल अभीष्ट सप्रतिबंध कथन निम्नलिखित है:

"यदि आज वर्षा हो रही है, तो $2 + 3 > 4$"

14.1.13 *सप्रतिबंध कथन का प्रतिधनात्मक (Contrapositive of a conditional statement)*

कथन "$(\sim q) \to (\sim p)$" को कथन $p \to q$ का प्रतिधनात्मक कथन कहते हैं।

उदाहरण 15 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को उसके समतुल्य प्रतिधनात्मक रूप में लिखिए:

(i) यदि मेरी कार मरम्मत की दूकान में है, तो मैं बाजार नहीं जा सकता हूँ।

(ii) यदि करीम किले तक नहीं तैर सकता है, तो वह तैर कर नदी नहीं पार कर सकता है।

हल (i) मान लीजिए कि, "p : मेरी कार मरम्मत की दुकान में है।" तथा "q : मैं बाजार नहीं जा सकता हूँ।"

तब दिया हुआ कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \to q$ है। अतएव इसका प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \to \sim p$ है।

अब $\sim p$: मेरी कार मरम्मत की दूकान में नहीं है। तथा

तथा $\sim q$: मैं बाजार जा सकता हूँ।

अत: प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक, निम्नलिखित है,

"यदि मैं बाजार जा सकता हूँ, तो मेरी कार मरम्मत की दुकान में नहीं है।"

(ii) (i) के हल के अनुसार सरल करने पर, कथन (ii) का प्रतिधनात्मक निम्नलिखित हैं:

"यदि करीम तैरकर नदी पार कर सकता है, तो वह किले तक तैर सकता है।"

14.1.14 *सप्रतिबंध कथन का विलोम (Converse of a conditional statement)* : सप्रतिबंध कथन "$q \to p$" को सप्रतिबंध कथन "$p \to q$" का विलोम कहते हैं।

उदाहरण 16 निम्नलिखित कथनों का विलोम लिखिए:

(i) यदि $x < y$, तो $x + 5 < y + 5$

(ii) यदि ABC एक समबाहु त्रिभुज है, तो ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल (i) मान लीजिए कि,

$p : x < y$

$q : x + 5 < y + 5$

इसलिए कथन $p \to q$ का विलोम

"यदि $x + 5 < y + 5$, तो $x < y$" है।

(ii) प्रदत्त कथन का विलोम,

"यदि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है तो ABC एक समबाहु त्रिभुज है।"

14.1.15 *द्विप्रतिबंधित कथन (The biconditional statement)* यदि दो कथन p तथा q संयोजक "यदि और केवल यदि" द्वारा जुड़े हों, तो परिणामी संयुक्त कथन "p यदि और केवल यदि q", p तथा q का द्विप्रतिबन्धित कथन कहलाता है तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ लिखते हैं।

उदाहरण 17 निम्नलिखित कथनों के द्विप्रतिबंधित कथन बनाइए:

p : एक, सात से कम है।

q : दो, आठ से कम है।

हल p तथा q का द्विप्रतिबन्ध (biconditional) निम्नलिखित है: "एक, सात से कम है, यदि और केवल यदि दो, आठ से कम है।"

उदाहरण 18 निम्नलिखित द्विप्रतिबन्ध को प्रतीकात्मक रूप में परिवर्तित कीजिए:

"ABC एक समबाहु त्रिभुज है, यदि और केवल यदि, यह समकोणिक है।"

हल मान लीजिए कि, p : ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

q : ABC एक समकोणिक त्रिभुज है, तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ द्वारा व्यक्त होता है।

14.1.16 परिमाणात्मक/मात्रात्मक वाक्यांश (सूक्ति) (*Quantifiers*) "एक ऐसे का अस्तित्व है (there exists)" तथा "प्रत्येक के लिए (for every)- प्रकार के सूक्तियों को परिमाणात्मक वाक्यांश कहते हैं।

हमें अनेक ऐसे गणितीय कथन मिलते हैं जिनमें ये सूक्तियाँ होती हैं। उदाहरण के लिए निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए,

p : प्रत्येक अभाज्य संख्या x के लिए, $\sqrt{x}$ एक अपरिमेय संख्या है।

q : एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर (समान) हों।

14.1.17 *कथनों की वैधता (Validity of statements)* किसी कथन की वैधता का अर्थ यह जाँचने से है कि कब वह कथन सत्य है तथा कब असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि उस कथन में कौन से संयोजक, परिमाणात्मक वाक्यांश तथा प्रतिबंध का प्रयोग किया गया है।

(i) संयोजक 'और' से प्रयुक्त कथन की वैधता

कथन $r : p \wedge q$ को सत्य प्रमाणित करने के लिये, सिद्ध कीजिए कि कथन p सत्य है और कथन q सत्य है।

(ii) संयोजक 'या' से प्रयुक्त कथन की वैधता

कथन $r : p \vee q$ को सत्य प्रमाणित करने के लिए, सिद्ध कीजिए कि या तो कथन p सत्य है या कथन q सत्य है।

(iii) वाक्यांश ''यदि...... तो'' से प्रयुक्त कथन की वैधता

कथन r : "यदि p, तो q ", की सत्यता प्रमाणित करने के लिए, हम निम्नलिखित विधियाँ अपना (adopt) सकते हैं:

(a) प्रत्यक्ष विधि : p को सत्य मानिए और सिद्ध कीजिए कि q सत्य है, अर्थात् $p \Rightarrow q$

(b) प्रतिधनात्मक: $\sim q$ को सत्य मानिए और सिद्ध कीजिए कि $\sim p$ सत्य है, अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$

(c) विरोधोक्ति विधि : p को सत्य और q को असत्य मानिए तथा मान्यता से एक विरोधोक्ति (Contradiction) प्राप्त कीजिए।

(d) प्रत्युदाहरण द्वारा : किसी दिए हुए कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए हम प्रत्युदाहरण (counter example) देते हैं। निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए,

"r : सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।" अब r असत्य है, क्योंकि संख्या 2 अभाज्य है और यह एक सम संख्या है।

14.1.18 वाक्यांश ''यदि और केवल यदि'' से प्रयुक्त कथन की वैधता

कथन "$r : p$ यदि और केवल यदि q" को सत्य प्रमाणित करने के लिए, हम निम्नलिखित प्रकार अग्रसर होते हैं,

चरण (Step) 1: सिद्ध कीजिए कि यदि p सत्य है, तो q सत्य है।

चरण (Step) 2: सिद्ध कीजिए कि यदि q सत्य है, तो p सत्य है।

14.2 हल किए हुये उदाहरण

लघुउत्तरीय प्रश्न

उदारहण 1 निम्नलिखित कथनों में से कौन संयुक्त कथन हैं?

(i) "2 एक सम संख्या और एक अभाज्य संख्या दोनों ही है।"

(ii) "9 न तो एक सम संख्या है न ही एक अभाज्य संख्या है।"

(iii) "राम और रहीम दोस्त हैं।"

हल

(i) प्रदत्त कथन को दो सरल कथनों ''2 एक सम संख्या है'' और ''2 एक अभाज्य संख्या है'' में विखंडित किया जा सकता है, जो संयोजक ''और'' द्वारा जुड़े हैं। अत: यह एक संयुक्त कथन है।

(ii) प्रदत्त कथन को निम्नलिखित दो सरल कथनों में विखंडित किया जा सकता है;
"9 एक सम संख्या नहीं है'' और '' 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है'', जो संयोजक ''और'' द्वारा जुड़े हैं। अत: यह एक संयुक्त कथन है।

(iii) प्रदत्त कथन को दो (या अधिक) सरल कथनों में विखंडित नहीं किया जा सकता है, इसलिए यह एक संयुक्त कथन नहीं है।

उदारहण 2 निम्नलिखित संयुक्त कथनों में घटक कथनों तथा संयोजकों को पहचानिए:

(a) वर्षा हो रही है या सूर्य चमक रहा है।

(b) 2 एक धन संख्या या एक ऋण संख्या है।

हल

(a) घटक कथन निम्नलिखित हैं:

p : वर्षा हो रही है।

q : सूर्य चमक रहा है।

तथा संयोजक ''या'' है।

(b) घटक कथन निम्नलिखित हैं:

p : 2 एक धन संख्या है।

q : 2 एक ऋण संख्या है।

तथा संयोजक ''या'' है।

उदाहरण 3 निम्नलिखित कथनों का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

(i) 2 और 3 अभाज्य संख्याएँ हैं।

(ii) बाघ गिर वन या राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं।

हल

(i) प्रदत्त कथन निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है: ''2 एक अभाज्य संख्या है और 3 एक अभाज्य संख्या है।''

मान लीजिए कि,

p : 2 एक अभाज्य संख्या है।

q : 3 एक अभाज्य संख्या है, तो दिया हुआ कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \wedge q$ है।

(ii) दिया हुआ कथन निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है–

"बाघ गिर वन में पाए जाते हैं या बाघ राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं।"

मान लीजिए कि,

p : बाघ गिर वन में पाए जाते हैं।

q : बाघ राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं। तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \vee q$ है।

उदाहरण 4 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) 9 एक सम पूर्णांक है या $9 + 1$ सम है।

(ii) $2 + 4 = 6$ या $2 + 4 = 7$

(iii) दिल्ली भारत की राजधानी है और इस्लामाबाद पाकिस्तान की राजधानी है।

(iv) प्रत्येक आयत एक वर्ग है और प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

(v) सूर्य एक तारा है या सूर्य एक ग्रह है।

हल (D_1), (D_2), (D_3) तथा (D_4) को ध्यान में रखते हुए, हम देखते हैं कि केवल कथन (iv) का सत्यामान F है, क्योंकि पहला घटक कथन, नामतः (namely), "प्रत्येक आयत एक वर्ग है।" असत्य है। पुन:, कथनों (i), (ii) तथा (v) में कम से कम एक घटक कथन सत्य है। अतएव इन कथनों का सत्य मान T है।

साथ ही कथन (iii) का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों ही घटक कथन सत्य हैं।

उदाहरण 5 कथन "हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है।" का निषेधन लिखिए।

हल मान लीजिए कि p : हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है। इस कथन का निषेधन निम्नलिखित हैं:

$\sim p$: यह असत्य है कि हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है

अथवा

$\sim p$: प्रत्येक वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय नहीं है।

उदाहरण 6 निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(a) p : सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(b) q : 9 संख्या 4 का एक गुणज है।

(c) r : किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ होती हैं।

हल

(a) यहाँ $\sim p$: यह असत्य है कि सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

अथवा

$\sim p$: एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समबाहु त्रिभुज नहीं है।

अथवा

$\sim p$: सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।

(b) $\sim q$: 9 संख्या 4 का एक गुणज नहीं है।

(c) $\sim r$: यह असत्य है कि किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ हैं।

अथवा

$\sim r$: किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ नहीं होती हैं।

उदाहरण 7 निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) सुरेश भोपाल में रहता है या वह मुम्बई में रहता है।

(ii) $x + y = y + x$ और 29 एक अभाज्य संख्या है।

हल

(i) मान लीजिए कि,

p : सुरेश भोपाल में रहता है। तथा q : सुरेश मुम्बई में रहता है। तब वियोजन $p \vee q$ है।

अब $\sim p$: सुरेश भोपाल में नहीं रहता है।

$\sim q$: सुरेश मुम्बई में नहीं रहता है।

इसलिए (D_8) के प्रयोग द्वारा $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है,

$\sim (p \vee q)$: सुरेश भोपाल में नहीं रहता है और वह मुम्बई में नहीं रहता है।

(ii) मान लीजिए कि, $p : x + y = y + x$ तथा q : 29 एक अभाज्य संख्या है। तब संयोजन (ii) $p \wedge q$ है।

अब $\sim p : x + y \neq y + x$ तथा $\sim q$: 29 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

अतएव (D_7) के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन निम्नलिखित है,

$\sim (p \wedge q) : x + y \neq y + x$ या 29 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को सप्रतिबंध कथन के रूप में पुनः लिखिए:

(i) मोहन एक अच्छा विद्यार्थी होगा, यदि वह मेहनत से अध्ययन करे।

(ii) रमेश को डेज़र्ट (भोजनोपरांत मिष्ठान) मिलेगा, केवल यदि वह रात्रि-भोज करे।

(iii) जब आप गाते हैं, मेरे कानों को तकलीफ़ होती है।

(iv) भारतीय टीम के किसी क्रिकेट मैच को जीतने के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है कि, चयन समिति एक हरफनमौला (all-rounder) खिलाड़ी का चयन करे।

(v) तारा को नई दिल्ली की सैर करने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है कि, वह राष्ट्रपति भवन देखने जाए।

हल

(i) यह कथन "q यदि p" के रूप का है, जहाँ

p : मोहन मेहनत से अध्ययन करे।

q : वह एक अच्छा विद्यार्थी होगा।

यह कथन, कथन ''यदि p, तो q'' का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (b) 14.1.12)। अतएव, प्रदत्त कथन का समतुल्य सूचीकरण (formation) निम्नलिखित है,

"यदि मोहन मेहनत से अध्ययन करे, तो वह एक अच्छा विद्यार्थी होगा।"

(यहाँ ध्यान दीजिए कि p में 'वह' को मोहन से तथा q में 'मोहन' को 'वह' से बदल दिया गया है।)

(ii) प्रदत्त कथन "p केवल यदि q" का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (c) 14.1.12)। अतएव, दिए हुए कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है, 'यदि रमेश रात्रि-भोज करे तो उसे डेज़र्ट मिलेगा।''

(iii) यहाँ 'जब' का अर्थ 'यदि' है और इस प्रकार प्रदत्त कथन का सूत्रीकरण नीचे दिया है, ''यदि आप गाते हैं, तो मेरे कानों को तकलीफ़ होती हैं।''

(iv) दिया हुआ कथन "q का अनिवार्य है p के लिए" के रूप में है, जहाँ

p : भारतीय टीम किसी क्रिकेट मैच को जीतती है।

q : चयन समिति एक हरफनमौला खिलाड़ी का चयन करती है। जो कथन ''यदि p, तो q'' का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (e) 14.1.12)। अतएव, प्रदत्त कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है,

''यदि भारतीय टीम किसी क्रिकेट मैच को जीतती है, तो चयन समिति ने एक हरफनमौला खिलाड़ी का चयन किया है।''

(v) दिया हुआ कथन "p पर्याप्त है q के लिए" के रूप का है, जहाँ

p : तारा राष्ट्रपति भवन देखने जाती है।

q : वह नई दिल्ली की सैर करती है, जो कथन ''यदि p, तो q" का एक समतुल्य रूप है *(टिप्पणी (d) 14.1.12)। अतः प्रदत्त कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है, ''यदि तारा राष्ट्रपति भवन देखने जाती है, तो वह दिल्ली की सैर करती है।''*

उदाहरण 9 कथन $p \rightarrow q$ है q को हिन्दी भाषा में व्यक्त कीजिए? जहाँ

p : आज वर्षा हो रही है।

$q : 2 + 3 > 4.$

हल सप्रतिबंध कथन नीचे दिया है,

"यदि आज वर्षा हो रही है, तो $2 + 3 > 4$".

उदाहरण 10 निम्नलिखित कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए:

यदि $x = 7$ और $y = 4$" तो $x + y = 11$.

हल मान लीजिए कि. $p : x = 7$ और $y = 4$ तथा $q : x + y = 11$

तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \rightarrow q$ है।

उदाहरण 11 निम्नलिखित कथनों का द्विप्रतिबंधित कथन लिखिए:

p : आज अगस्त की 14 तारीख है।

q : कल स्वतंत्रता दिवस है।

हल अभीष्ट द्विप्रतिबंधित कथन $p \leftrightarrow q$ निम्नलिखित है:

''आज अगस्त की 14 तारीख है यदि और केवल यदि कल स्वतंत्रता दिवस है।''

उदारहण 12 निम्नलिखित द्विप्रतिबंधित कथन का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

"ABC एक समबाहु त्रिभुज है यदि और केवल यदि इसका प्रत्येक अंत:कोण 60° का है।"

हल मान लीजिए कि, p : ABC एक समबाहु त्रिभुज है तथा q : इसका (त्रिभुज ABC का)प्रत्येक अंत:कोण 60° का है, तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ है।

उदाहरण 13 परिमाणात्मक वाक्यांशों को पहिचानिए तथा निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर (तुल्य) होता है।

(ii) सभी सम पूर्णांकों x के लिए, x^2 भी सम होता है।

(iii) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो 6 और 9 का गुणज है।

हल (i) परिमाणात्मक वाक्यांश ''एक ऐसे का अस्तित्व है'' तथा निषेधन निम्नलिखित है,

''ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है, जो अपने वर्ग के बराबर (तुल्य) है।''

(ii) ''सभी के लिए'' परिमाणात्मक वाक्यांश है तथा इसका निषेधन निम्नलिखित है,

''एक ऐसे सम पूर्णांक x का अस्तित्व है, इस प्रकार कि x^2 सम नहीं है।

(iii) ''एक ऐसे का अस्तित्व है'' परिमाणात्मक वाक्यांश है तथा निषेधन निम्नलिखित है,

''ऐसी किसी संख्या का अस्तित्व नहीं है, जो 6 और 9 दोनों ही का गुणज है।

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है:

p : किसी भी वास्तविक संख्या x, y के लिए यदि $x = y$, तो $2x + a = 2y + a$ जहाँ $a \in \mathbf{Z}$.

हल हम कथन p को, प्रतिधनात्मक विधि तथा प्रत्यक्ष विधि द्वारा, सत्य सिद्ध करते हैं।

प्रत्यक्ष विधि : किसी भी वास्तविक संख्या x, y के लिए दिया है कि,

$x = y$

$\Rightarrow \quad 2x = 2y$

$\Rightarrow \quad 2x + a = 2y + a$ किसी $a \in \mathbf{Z}$ के लिए।

प्रतिधनात्मक विधि : किसी वास्तविक संख्या x, y के लिए कथन p का प्रतिधनात्मक कथन निम्नलिखित है, यदि $2x + a \neq 2y + a$, तो $x \neq y$, जहाँ $x \in Z$.

दिया हुआ है कि $2x + a \neq 2y + a$

$\Rightarrow \quad 2x \neq 2y$

$\Rightarrow \quad x \neq y$

उदाहरण 15 निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए:

(i) r : संख्या 100, 4 और 5 का गुणज है।

(ii) s : संख्या 60, 3 या 5 का गुणज है।

हल (i) मान लीजिए कि $p : r \wedge s$

जहाँ r : "संख्या 100, 4 का गुणज है" सत्य है।

s : "संख्या 100, 5 का गुणज है" सत्य है।

अतः p सत्य है।

(ii) मान लीजिए कि, $q : r \vee s$, जहाँ

r : "संख्या 60, 3 का गुणज है" सत्य है।

s : "संख्या 60 ,5 का गुणज है" सत्य है।

अतः q सत्य है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदारहण 16 से 18 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

उदाहरण 16 निम्नलिखित में से कौन एक कथन है?

(A) गुलाब के फूल काले हैं।

(B) अपने कार्य पर ध्यान दीजिए।

(C) समयनिष्ठ (punctual) रहिए।

(D) झूठ मत बोलिए।

हल सही उत्तर (A) है, क्योंकि (B), (C) तथा (D) न तो सत्य है और न असत्य है। वास्तव में ये सभी वाक्य 'परामर्श' हैं'

उदारहण 17 कथन ''वर्षा हो रही है और मौसम ठंडा है।''

का निषेधन निम्नलिखित में से कौन-सा है:

(A) वर्षा नहीं हो रही है और मौसम ठंडा है।

(B) वर्षा हो रही है या मौसम ठंडा नहीं है।

(C) वर्षा नहीं हो रही है या मौसम ठंडा नहीं है।

(D) वर्षा नहीं हो रही है और मौसम ठंडा नहीं है।

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि यह नियम (D_7). को संतुष्ट करता है। विकल्प (A), (B), (D), (D_7) को संतुष्ट नहीं करते हैं।

उदाहरण 18 निम्नलिखित में से कौन-सा कथन ''यदि बिल्लू अच्छे अंक प्राप्त करेगा, तो उसे एक बाइसाईकल मिलेगी'' का विलोम है?

(A) यदि बिल्लू को बाईसाईकल नहीं मिलेगी, तो वह अच्छे अंक नहीं प्राप्त करेगा।

(B) यदि बिल्लू को बाईसाईकल मिलेगी, तो वह अच्छे अंक प्राप्त करेगा।

(C) यदि बिल्लू को बाईसाईकल मिलेगी, तो वह अच्छे अंक नहीं प्राप्त करेगा।

(D) यदि बिल्लू को बाईसाईकल नहीं मिलेगी, तो वह अच्छे अंक प्राप्त करेगा।

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि कथन $q \rightarrow p$ का विलोम कथन $p \rightarrow q$ है।

14.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय प्रश्न

1. *निम्नलिखित वाक्यों में से कौन से कथन हैं? औचित्य भी दीजिए:*

(i) एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती हैं।

(ii) 0 एक सम्मिश्र संख्या है।

(iii) आसमान (आकाश) लाल है।

(iv) प्रत्येक समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय होता है।

(v) $15 + 8 > 23$.

(vi) $y + 9 = 7$.

(vii) आपका बैग (थैला) कहाँ है?

(viii) प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है।

(ix) किसी चक्रीय (cyclic) चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।

(x) $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

2. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के घटक कथनों को ज्ञात कीजिए:*

(i) संख्या 7 अभाज्य और विषम है।

(ii) चेन्नई भारत में है और तमिलनाडू की राजधानी है।

(iii) संख्या 100, संख्याओं 3, 11 और 5 से भाज्य है।

(iv) चंडीगढ़, हरियाणा और यू.पी. की राजधानी है।

(v) $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है या एक अपरिमेय संख्या है।

(vi) 0 प्रत्येक धन पूर्णांक और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

(vii) पौधे प्रकाश संश्लेषण (photosynthesis) के लिए सूर्य के प्रकाश, पानी और कार्बन-डाईऑक्साइड का प्रयोग करते हैं।

(viii) किसी समतल में स्थित दो रेखाएँ या तो एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं या वे समांतर होती हैं।

(ix) एक आयत एक चतुर्भुज होता है या एक 5-भुजाओं का बहुभुज होता है।

3. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के घटक कथन लिखिए तथा जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं?*

(i) संख्या 57, 2 या 3 से भाज्य है।

(ii) संख्या 24, 4 और 6 का गुणज है।

(iii) सभी जीवित वस्तुओं की दो आँखें और दो पैर होते हैं।

(iv) 2 एक सम संख्या और एक अभाज्य संख्या है।

4. *निम्नलिखित सरल कथनों के निषेधन लिखिए :*

(i) संख्या 17, एक अभाज्य संख्या है।

(ii) $2 + 7 = 6$.

(iii) बैगनी रंग नीला होता है।

(iv) $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

(v) 2 एक अभाज्य संख्या है।

(vi) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अभाज्य संख्या है।

(vii) गाय के चार पैर होते हैं।

(viii) किसी लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं।

(ix) सभी समरूप त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(x) किसी वृत्त का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि के समान होता है।

5. *निम्नलिखित कथनों का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए :*

(i) राहुल ने हिंदी और अंग्रेज़ी विषयों में परीक्षा पास की।

(ii) x और y सम पूर्णांक हैं।

(iii) 2, 3 और 6 संख्या 12 के गुणनखण्ड हैं।

(iv) या तो x या $x + 1$ एक विषम पूर्णांक है।

(v) एक संख्या या तो 2 या 3 से भाज्य है।

(vi) या तो $x = 2$ या $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का एक मूल है।

(vii) विद्यार्थीगण हिंदी या अंगरेज़ी को वैकल्पिक प्रश्नपत्र के रूप में ले (चुन) सकते हैं।

6. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के निषेधन लिखिए:*

(i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक और सम्मिश्र होती हैं।

(ii) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय या अपरिमेय होती हैं।

(iii) $x = 2$ और $x = 3$, द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल हैं।

(iv) किसी त्रिभुज की या तो 3-भुजाएँ या 4-भुजाएँ होती हैं।

(v) 35, एक भाज्य संख्या या एक अभाज्य संख्या है।

(vi) सभी अभाज्य पूर्णांक या तो सम होते हैं या विषम होते हैं।

(vii) $|x|$ या तो x या $-x$ के बराबर (तुल्य) होता है।

(viii) संख्या 6, 2 और 3 से भाज्य है।

7. *निम्नलिखित कथनों को सप्रतिबंध कथनों के रूप में पुन: लिखिए:*

(i) किसी विषम संख्या का वर्ग विषम होता है।

(ii) रात्रि-भोज के उपरांत आपको स्वीट डिश मिलेगी।

(iii) आप फ़ेल (असफल) हो जायेंगे, यदि आप अध्ययन नहीं करेंगे।

(iv) किसी पूर्णांक का इकाई का अंक 0 या 5 होता है, यदि वह 5 से भाज्य होता है।

(v) किसी अभाज्य संख्या का वर्ग अभाज्य नहीं होता है।

(vi) $2b = a + c$, यदि a, b और c समांतर श्रेणी (A.P.) में हैं।

8. *द्विप्रतिबंध कथन $p \leftrightarrow q$, बनाइए, जहाँ*

(i) p : किसी पूर्णांक का इकाई का अंक शून्य है।

q : वह 5 से भाज्य है।

(ii) p : एक प्राकृत संख्या n विषम है।

q : प्राकृत संख्या n, 2 से भाज्य नहीं है।

(iii) p : एक त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है।

q : एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हैं।

9. *निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्म लिखिए:*

(i) यदि $x = y$ और $y = 3$, तो $x = 3$.

(ii) यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो n एक पूर्णांक है।

(iii) यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हैं, तो त्रिभुज समबाहु है।

(iv) यदि x और y ऋण पूर्णांक हैं, तो xy धन है।

(v) यदि प्राकृत संख्या n, 6 से भाज्य है, तो n, 2 और 3 से भाज्य है।

(vi) यदि बर्फ़ गिर रही है, तो मौसम ठण्डा होगा।

(vii) यदि x एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $0 < x < 1$, तो $x^2 < 1$.

10. *निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:*

(i) यदि एक आयत 'R' एक वर्ग है, तो R एक समचतुर्भुज (rhombus) है।

(ii) यदि आज सोमवार है, तो कल मंगलवार होगा।

(iii) यदि आप आगरा जाएँ, तो आप ताजमहल निश्चित ही देखिए।

(iv) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योगफल उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है, तो वह एक समकोण त्रिभुज है।

(v) यदि किसी त्रिभुज के तीनों कोण समान हैं, तो वह एक समबाहु त्रिभुज है।

(vi) यदि $x : y = 3 : 2$, तब $2x = 3y$.

(vii) यदि S एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो S के सम्मुख कोण संपूरक हैं।

(viii) यदि x शून्य है, तो x न तो धन है और न ऋण है।

(ix) यदि दो त्रिभुज समरूप हैं, तो उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

11. *निम्नलिखित कथनों में परिमाणात्मक वाक्यांशों को पहचानिए:*

(i) एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समबाहु नहीं है।

(ii) सभी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, $xy = yx$

(iii) एक ऐसी वास्तविक संख्या का अस्तित्व है, जो एक परिमेय संख्या नहीं है।

(iv) प्रत्येक प्राकृत संख्या x के लिए, $x + 1$ भी एक प्राकृत संख्या है।

(v) सभी प्राकृत संख्याओं x जहाँ $x > 3$, x^2 संख्या 9 से बड़ा है।

(vi) एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समद्विबाहु त्रिभुज नहीं है।

(vii) सभी ऋण पूर्णांक x के लिए, x^3 भी एक ऋण पूर्णांक है।

(viii) उपर्युक्त कथनों में एक ऐसे कथन का अस्तित्व है, जो सत्य नहीं है।

(ix) 2 से भिन्न (अतिरिक्त) एक सम अभाज्य संख्या का अस्तित्व है।

(x) एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है ताकि, $x^2 + 1 = 0$.

12. प्रत्यक्ष विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि किसी परिमेय संख्या 'n' के लिए $n^3 - n$ सदैव सम है।
[संकेत: दो दशाएँ (i) n सम है, (ii) n विषम है।]

13. निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए:
(i) p : संख्या 125, 5 और 7 से भाज्य है।
(ii) q : संख्या 131, 3 या 11 का गुणज है।

14. विरोधोक्ति विधि द्वारा निम्नलिखित कथन को सिद्ध कीजिए:
p : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है।

15. प्रत्यक्ष विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि किसी भी वास्तविक संख्या x, y के लिए, यदि $x = y$, तो $x^2 = y^2$.

16. प्रतिधनात्मक विधि का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि यदि n^2 एक सम पूर्णांक है, तो n भी एक सम पूर्णांक है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 17 *से* 36 *तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए* (*M.C.Q.*)

17. निम्नलिखित में से कौन एक कथन है?
(A) x एक वास्तविक संख्या है।
(B) पंखे को बंद कर दीजिए।
(C) 6 एक प्राकृत संख्या है।
(D) मुझे जाने दीजिए।

18. निम्नलिखित में से कौन एक कथन नहीं है?
(A) धूम्रपान स्वास्थ्य के लिए हानिकारक है।
(B) $2 + 2 = 4$
(C) केवल 2 एक सम अभाज्य संख्या है।
(D) यहाँ आइए।

19. कथन "$2 + 7 > 9$ या $2 + 7 < 9$" में संयोजक है
(A) और
(B) या
(C) $>$
(D) $<$

20. कथन ''पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है और चंद्रमा, पृथ्वी का एक उपग्रह है।'' में संयोजक

(A) या

(B) पृथ्वी

(C) सूर्य

(D) और

21. कथन ''एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त (ellipse) होता है।'' का निषेधन है:

(A) एक दीर्घवृत, एक वृत्त होता है।

(B) एक दीर्घवृत्त, एक वृत्त नहीं होता है।

(C) एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त नहीं होता है।

(D) एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त होता है।

22. कथन ''7, 8 से बड़ा है'' का निषेधन है:

(A) 7, 8 के बराबर है।

(B) 7, 8 से बड़ा नहीं है।

(C) 8, 7 से कम है।

(D) इनमें से कोई नहीं।

23. कथन ''72, 2 और 3 से भाज्य है।'' का निषेधन

(A) 72, 2 से भाज्य नहीं है या 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(B) 72, 2 से भाज्य नहीं है और 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(C) 72, 2 से भाज्य है और 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(D) 72, 2 से भाज्य नहीं है और 72, 3 से भाज्य है।

24. कथन '' पौधे CO_2 ग्रहण करते हैं और O_2 छोड़ते हैं'' का निषेधन है:

(A) पौधे CO_2 नहीं ग्रहण करते हैं और O_2 नहीं छोड़ते हैं।

(B) पौधे CO_2 नहीं ग्रहण करते हैं या O_2 नहीं छोड़ते हैं।

(C) पौधे CO_2 ग्रहण करते हैं और O_2 नहीं छोड़ते हैं।

(D) पौधे CO_2 ग्रहण करते हैं या O_2 नहीं छोड़ते हैं।

25. कथन ''राजेश या रजनी बैंगलोर में रहते थे।'' का निषेधन है:

(A) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था या रजनी बैंगलोर में रहती है।

(B) रोजश बैंगलोर में रहता है और रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

(C) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था और रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

(D) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था या रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

26. कथन ''101, 3 का एक गुणज नहीं है।'' का निषेधन है:

(A) 101, 3 का एक गुणज है।

(B) 101, 2 का एक गुणज है।

(C) 101, एक विषम संख्या है।

(D) 101, एक सम संख्या है।

27. कथन ''यदि 7, 5 से बड़ा है तो 8, 6 से बड़ा है।'' का प्रतिधनात्मक कथन है:

(A) यदि 8, 6 से बड़ा है, तो 7, 5 से बड़ा है।

(B) यदि 8, 6 से बड़ा नहीं है, तो 7, 5 से बड़ा है।

(C) यदि 8, 6 से बड़ा नहीं है, तो 7, 5 से बड़ा नहीं है।

(D) यदि 8, 6 से बड़ा है, तो 7, 5 से बड़ा नहीं है।

28. कथन ''यदि $x > y$, तो $x + a > y + a$.'' का विलोम कथन है:

(A) यदि $x < y$, तो $x + a < y + a$.

(B) यदि $x + a > y + a$, तो $x > y$.

(C) यदि $x < y$, तो $x + a > y + a$.

(D) यदि $x > y$, तो $x + a < y + a$.

29. कथन ''यदि सूर्य नहीं चमक रहा है, तो आकाश बादलों से भरा (आच्छादित) है।'' का विलोम कथन है:

(A) यदि आकश बादलों से भरा है, तो सूर्य नहीं चमक रहा है।

(B) यदि सूर्य चमक रहा है, तो आकाश बादलों से भरा है।

(C) यदि आकाश साफ है, तो सूर्य चमक रहा है।

(D) यदि सूर्य नहीं चमक रहा है, तो आकाश बादलों से नहीं भरा है।

30. कथन ''यदि p, तो q'' का प्रतिधनात्मक कथन है:

(A) यदि q, तो p.

(B) यदि p, तो $\sim q$.

(C) यदि $\sim q$, तो $\sim p$.

(D) यदि $\sim p$, तो $\sim q$.

31. कथन ''यदि x^2 सम नहीं है, तो x सम नहीं है'', निम्नलिखित कथनों में से किसका विलोम है,

(A) यदि x^2 विषम है, तो x सम है।

(B) यदि x सम नहीं है, तो x^2 सम नहीं है।

(C) यदि x सम है, तो x^2 सम है।

(D) यदि x विषम है, तो x^2 सम है।

32. कथन ''यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है, तो चण्डीगढ़ भारत में है।'' का प्रतिधनात्मक कथन

(A) यदि चण्डीगढ़ भारत में नहीं है, तो चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी नहीं है।

(B) यदि चण्डीगढ़ भारत में है, तो चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है।

(C) यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी नहीं है, तो चण्डीगढ़ भारत की राजधानी नहीं है।

(D) यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है, तो चण्डीगढ़ भारत में नहीं है।

33. निम्नलिखित में कौन सा सप्रतिबंध कथन $p \to q$ है?

(A) q पर्याप्त है p के लिए।

(B) p अनिवार्य है q के लिए।

(C) p केवल यदि q.

(D) यदि q, तो p.

34. कथन ''3 और 4 का गुणनफल 9 है।'' का निषेधन है:

(A) यह असत्य है, कि 3 और 4 का गुणनफल 9 है।

(B) 3 और 4 का गुणनफल 12 है।

(C) 3 और 4 का गुणनपुल 12 नहीं है।

(D) यह असत्य है कि 3 और 4 का गुणनफल 9 नहीं है।

35. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन "एक (कोई) प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी होती है।" का निषेधन नहीं है:

(A) एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी नहीं होती है।

(B) यह असत्य है, कि एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी होती है।

(C) यह असत्य है कि एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी नहीं होती है।

(D) इनमें से कोई नहीं।

36. निम्नलिखित कथनों में से कौन एक संयोजन है?

(A) राम और श्याम मित्र हैं।

(B) राम और श्याम दोनों लम्बे हैं।

(C) राम और श्याम दोनों शत्रु हैं।

(D) इनमें से कोई नहीं।

37. बतलाइए कि क्या निम्नलिखित वाक्य, कथन हैं या नहीं हैं:

(i) किसी त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।

(ii) चंद्रमा, पृथ्वी एक उपग्रह है।

(iii) ईश्वर आप पर कृपा करें।

(iv) एशिया एक महाद्वीप है।

(v) आप कैसे हैं?

अध्याय 15

सांख्यिकी

15.1 समग्र अवलोकन (Overview)

आपने पूर्ववर्ती कक्षाओं में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का अध्ययन किया है जैसे कि वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य, माध्यिका एवं बहुलक। इन मापों के अतिरिक्त हमें प्राय: एक दूसरे प्रकार के माप को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है जिसे प्रकीर्णन (फैलाव) की माप कहा जाता है। यह माध्य अथवा माध्यिका जैसे मध्यवर्ती मानों से प्रेक्षणों का विचरण मापता है।

यह अध्याय माध्य विचलन, प्रसरण, मानक विचलन जैसी महत्त्वपूर्ण प्रकीर्णन की मापों का अध्ययन करने और अन्त में बारंबारता बंटनों का विश्लेषण करने से सम्बन्धित है।

15.1.1 *प्रकीर्णन की माप (Measure of Dispersion)*

(a) **परिसर (Range):** परिसर ऐसी प्रकीर्णन की माप है जिसे बहुत ही सरलता से समझा एवं ज्ञात किया जाता है परिसर इस प्रकार परिभाषित है।

परिसर = सबसे बड़ा प्रेक्षण – सबसे छोटा प्रेक्षण

(b) **माध्य विचलन (Mean Deviation)**

(i) अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्य विचलन

n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$, का उनके माध्य ($\overline{x}$) के सापेक्ष, माध्य विचलन

$$\text{M.D}\ (\overline{x}) = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n} \qquad (1)$$

उनकी माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है।

$$\text{M.D (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n} \qquad (2)$$

(ii) असतत बारंबारता बंटन का माध्य विचलन (Mean Deviation for discrete frequency distribution)

मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों में n सतत प्रेक्षण $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हैं जिनकी बारंबारताएँ क्रमश: $f_1, f_2, \ldots, f_n$, है।

इस स्थिति में $$\text{M.D}\,(\bar{x}) = \frac{\sum f_i\,|x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i\,|x_i - \bar{x}|}{\text{N}} \qquad (3)$$

$$\text{M.D (M)} = \frac{\sum f_i\,|x_i - \text{M}|}{\text{N}} \qquad (4)$$

जहाँ $\text{N} = \sum f_i$.

(iii) सतत बारंबारता बंटन (वर्गीकृत आंकड़े) का माध्य विचलन (Mean deviation for continuous frequency distribution (Grouped data)

$$\text{M.D}\,(\bar{x}) = \frac{\sum f_i\,|x_i - \bar{x}|}{\text{N}} \qquad (5)$$

$$\text{M.D (M)} = \frac{\sum f_i\,|x_i - \text{M}|}{\text{N}} \qquad (6)$$

जहाँ x_i वर्गों के मध्य बिन्दु हैं। $\bar{x}$ और M क्रमशः बंटन के माध्य एवं माध्यिका हैं।

(c) **प्रसारण (Variance) :** मान लीजिए n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है। प्रसरण को σ^2 से दर्शाया जाता है और इसे $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ से प्राप्त किया जाता है। (7)

(d) **मानक विचलन (Standard Deviation)** यदि σ^2 प्रसरण है, तो σ मानक विचलन कहलाता है और इसे

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$ से प्राप्त किया जाता है। (8)

(e) **असतत बारंबारता बंटनके लिए मानक विचलन (Standard Deviation for a discrete frequency distribution)**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}}\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}$$ से प्राप्त होता है। (9)

जहाँ x_i' s की बारंबारताएँ f_i's हैं एवं $\text{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$

(f) **सतत बारंबारता बंटन (वर्गीकृत आंकड़ा) के लिए मानक विचलन (Standard deviation of a continuous frequency distribution)**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i (x_i - \overline{x})^2} \qquad (10)$$

जहाँ x_i वर्गों के मध्य बिन्दु हैं और f_i उनकी क्रमशः बारंबारताएं हैं:
सूत्र (10) निम्न सूत्र के समान है:

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2} \qquad (11)$$

(g) **मानक विचलन के लिए अन्य सूत्र (Another formula for standard deviation)**

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2} \qquad (12)$$

जहाँ h वर्ग अंतराल की चौड़ाई है एवं $y_i = \dfrac{x_i - A}{h}$ और A कल्पित माध्य है।

15.1.2 *विचरण गुणांक (Coefficient of variation)*: कभी-कभी मानक विचलन को माध्य का समानुपात व्यक्त करते हुए, सामान्यतः, प्रतिशतता, परिवर्तनशीलता की व्याख्या करना लाभदायक होता है। प्रातिशतता के रूप में इसका समीकरण इस प्रकार है–

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$$

15.2 हल किए हुए उदारहण

लघुउत्तरीय उदाहरण (S.A.)

उदाहरण 1 निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

आकार (x):	1	3	5	7	9	11	13	15
बारंबारता (f):	3	3	4	14	7	4	3	4

हल माध्य $= \overline{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{3+9+20+98+63+44+39+60}{42} = \dfrac{336}{42} = 8$

$$\text{M.D. } (\overline{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \overline{x}|}{\sum f_i} = \frac{3(7)+3(5)+4(3)+14(1)+7(1)+4(3)+3(5)+4(7)}{42}$$

$$= \frac{21+15+12+14+7+12+15+28}{42} = \frac{62}{21} = 2.95$$

उदाहरण 2 निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

57, 64, 43, 67, 49, 59, 44, 47, 61, 59

हल माध्य ($\bar{x}$) $= \frac{57+64+43+67+49+59+61+59+44+47}{10} = \frac{550}{10} = 55$

प्रसरण (σ^2) $= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

$$= \frac{2^2 + 9^2 + 12^2 + 12^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 11^2 + 8^2}{10}$$

$$= \frac{662}{10} = 66.2$$

मानक विचलन (σ) $= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{66.2} = 8.13$

उदाहरण 3 दर्शाइए कि अवर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन ज्ञात करने के लिए नीचे दिए गए दो सूत्र एक समान हैं:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad \text{एवं} \quad \sigma' = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

हल हम पाते हैं

$$\begin{aligned}
\sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum (x_i^2 - 2\bar{x}\, x_i + \bar{x}^2) \\
&= \sum x_i^2 + \sum -2\bar{x}\, x_i + \sum \bar{x}^2 \\
&= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + (\bar{x})^2 \sum 1 \\
&= \sum x_i^2 - 2\bar{x}\,(n\bar{x}) + n\,\bar{x}^2 \\
&= \sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2
\end{aligned}$$

दोनों पक्षों को n से भाग देने पर और वर्ग मूल लेने पर हमें $\sigma = \sigma'$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 निम्नलिखित आंकड़ों का प्रसरण ज्ञात कीजिए:

वर्ग अन्तराल	बारंबारता
4 - 8	3
8 - 12	6
12 - 16	4
16 - 20	7

हल माध्य $(\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{3\times6+6\times10+4\times14+7\times18}{20} = 13$

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{\sum f_i\,(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{3(-7)^2+6(-3)^2+4(1)^2+7(5)^2}{20}$$

$$= \frac{147+54+4+175}{20} = 19$$

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण (L.A.)

उदाहरण 5 निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए माध्य, प्रसरण एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	बारंबारता
1 - 10	11
10 - 20	29
20 - 30	18
30 - 40	4
40 - 50	5
50 - 60	3

हल मान लीजिए कल्पिक माध्य A, 25.5. यहां $h = 10$

वर्ग	x_i	$y_i = \dfrac{x_i - 25.5}{10}$	f_i	$f_i\, y_i$	$f_i y_i^2$
1 - 10	5.5	–2	11	–22	44
10 - 20	15.5	–1	29	–29	29
20 - 30	25.5	0	18	0	0
30 - 40	35.5	1	4	4	4
40 - 50	45.5	2	5	10	20
50 - 60	55.5	3	3	9	27
योग			**70**	**–28**	**124**

$$x' = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{-28}{70} = -0.4$$

माध्य $= \bar{x} = 25.5 + (-10)\,(0.4) = 21.5$

प्रसरण $$(\sigma^2) = \left[\frac{h}{N}\sqrt{N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2}\right]^2$$

$$= \frac{10\times 10}{70\times 70}\,[70(124) - (-28)^2]$$

$$= \frac{70\,(124)}{7\times 7} - \frac{28\times 28}{7\times 7} = \frac{1240}{7} - 16 = 161 \quad (\text{लगभग})$$

S.D. $(\sigma) = \sqrt{161} = 12.7$

उदाहरण 6 दो कारखानों A तथा B द्वारा निर्मित बल्बों की कार्य अवधि (Life) को निम्न सारणी में दर्शाया गया है:

अवधि (घंटों में)	कारखाना A (बल्बों की संख्या)	कारखाना B (बल्बों की संख्या)
550 - 650	10	8
650 - 750	22	60
750 - 850	52	24
850 - 950	20	16
950 - 1050	16	12
योग	**120**	**120**

कार्य अवधि की दृष्टि से किस कारखाने के बल्ब अधिक संगत (Consistent) हैं।

हल यहाँ $h = 100$, मान लीजिए A (कल्पित माध्य) = 800.

कार्य अवधि (घंटों में)	माध्य मान (x_i)	$y_i = \frac{x_i - A}{10}$	कारखाना A			कारखाना B		
			f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
550 - 650	600	–2	10	–20	40	8	–16	32
650 - 750	700	–1	22	–22	22	60	– 60	60
750 - 850	800	0	52	0	0	24	0	0
850 - 950	900	1	20	20	20	16	16	16
950 - 1050	1000	2	16	32	64	12	24	48
योग			**120**	**10**	**146**	**120**	**–36**	**156**

कारखाना A के लिए

$$\text{माध्य} \quad (\bar{x}) = 800 + \frac{10}{120} \times 100 = 816.67 \text{ घंटे}$$

$$\text{S.D.} = \frac{100}{120}\sqrt{120\,(146) - 100} = 109.98$$

इसलिए विचरण गुणांक $= \dfrac{\text{S.D.}}{\bar{x}} \times 100 = \dfrac{109.98}{816.67} \times 100 = 13.47$

कारखाना B के लिए

$$\text{माध्य} = 800 + \frac{-36}{120} \times 100 = 770$$

$$\text{S.D.} = \frac{100}{120}\sqrt{120\,(156) - (-36)^2} = 110$$

इसलिए विचरण गुणांक $= \dfrac{\text{S.D.}}{\text{माध्य}} \times 100 = \dfrac{110}{770} \times 100 = 14.29$

क्योंकि कारखाना B का विचरण गुणांक, कारखाना A के विचरण गुणांक से अधिक है। कारखाना B का विचरण अधिक है अर्थात् कारखाना A के बल्ब अधिक संगत है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 7 से 9 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए: (M.C.Q)

उदाहरण 7 आँकड़ों 2, 9, 9, 3, 6, 9, 4 का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन है:

(A) 2.23 (B) 2.57 (C) 3.23 (D) 3.57

हल सही उत्तर (B) है।

$$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{4+3+3+3+0+3+2}{7} = 2.57$$

उदाहरण 8 यदि आंकड़ों 2, 4, 5, 6, 8, 17 का प्रसरण 23.33 है, तो 4, 8, 10, 12, 16, 34 का प्रसरण होगा:

(A) 23.23 (B) 25.33 (C) 46.66 (D) 48.66

हल सही उत्तर (C) है। जब प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा कर दिया जाए तो प्रसरण भी 2 सेगुणा हो जाता है।

उदाहरण 9 n मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ के समुच्चय का मानक विचलन σ है। दूसरे समुच्चय के n मानों $x_1 + k, x_2 + k, ..., x_n + k$ का मानक विचलन है:

(A) σ (B) $\sigma + k$ (C) $\sigma - k$ (D) $k\sigma$

हल सही उत्तर (A) है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण में अचर k से वृद्धि कर दी जाए तो मानक विचलन अपरिवर्तित रहता है।

15.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

आकार	20	21	22	23	24
बारंबारता	6	4	5	1	4

2. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	10	11	12	14	15
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	3	4

3. यदि n एक विषम संख्या है, तो प्रथम n प्राकृत संख्याओं का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

4. यदि n एक सम संख्या है, तो प्रथम n प्राकृत संख्याओं का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

5. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

6. एक टेस्ट को पूरा करने के लिए, समय के कुछ आँकड़ों का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात किए गए, जिनके परिणाम निम्नलिखित हैं:

प्रेक्षणों की संख्या = 25, माध्य = 18.2 सैकेण्ड, मानक विचलन = 3.25 सैकेण्ड।

तत्पश्चात् 15 प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_{15}$, का दूसरा समुच्चय उपलब्ध होता है। यह भी सैकेण्ड में है। और $\sum_{i=1}^{15} x_i = 279$ एवं $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 5524$ सभी 40 प्रेक्षणों पर आधारित मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

7. n_1 प्रेक्षणों के समुच्चय के माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः $\bar{x}_1$ एवं s_1 हैं। जबकि n_2 प्रेक्षणों के एक अन्य समुच्चय के माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः $\bar{x}_2$ एवं s_2 हैं। दर्शाइए कि $(n_1 + n_2)$ प्रेक्षणों के संयुक्त समुच्चय का मानक विचलन,

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{n_1(s_1)^2 + n_2(s_2)^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

8. दो समुहों, जिनमें प्रत्येक में 20 प्रेक्षण हैं, के मानक विचलन एक समान 5 हैं। प्रथम समूह का माध्य 17 और दूसरे समूह का माध्य 22, है। दिए हुए दो समूहों को मिलाने पर प्राप्त समूह का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का प्रसरण 160 है।

x	A	2A	3A	4A	5A	6A
f	2	1	1	1	1	1

यदि A एक धनात्मक पूर्णांक है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x	2	3	4	5	6	7
f	4	9	16	14	11	6

11. एक कक्षा में 60 विद्यार्थी हैं। एक टेस्ट में कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों को निम्नलिखित बारंबारता बंटन में दर्शाया गया है। जहाँ x एक धनात्मक पूर्णांक है। अंकों का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

अंक	0	1	2	3	4	5
बारंबारता	$x-2$	x	x^2	$(x+1)^2$	$2x$	$x+1$

12. 60 बल्बों के एक नमूने का औसत कार्य अवधि (mean life) 650 घंटे हैं एवं मानक विचलन 8 घंटे है। 80 बल्बों के एक दूसरे नमूने का औसत कार्य अवधि 660 घंटे हैं एवं मानक विचलन 7 घंटे है। समग्र रूप से मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

13. 100 वस्तुओं का माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 50 एवं 4 है। सभी वस्तुओं का योग ज्ञात कीजिए। वस्तुओं के वर्ग का योग भी ज्ञात कीजिए।

14. यदि किसी बंटन के लिए $\sum_{i=1}^{18}(x-5)=3$ $\sum_{i=1}^{18}(x-5)^2=43$ और कुल वस्तुओं की संख्या 18है, तो माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

15. नीचे लिखे निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

x	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 7$	$7 \leq x < 10$
f	6	4	5	1

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

16. निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
बारंबारता	4	6	8	5	2

17. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0 - 6	6 - 12	12 - 18	18 - 24	24 - 30
बारंबारता	4	5	3	6	2

18. निम्नलिखित बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

अंक	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
बारंबारता	1	6	6	8	8	2	2	3	0	2	1	0	0	0	1

19. 70 जारों में काफी के भार को निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है।

भार (ग्राम में)	बारंबारता
200 - 201	13
201 - 202	27
202 - 203	18
203 - 204	10
204 - 205	1
205 - 206	1

उपरोक्त बंटन का प्रसरण एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

20. किसी समांतर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d है। उस समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

21. दो विद्यार्थियों रवि एवं हसीना द्वारा 10 टेस्टों में प्राप्त अंकों को नीचे दर्शाया गया है जबकि प्रत्येक टेस्ट 100 अंकों का है:

रवि	25	50	45	30	70	42	36	48	35	60
हसीना	10	70	50	20	95	55	42	60	48	80

कौन ज्यादा बुद्धिमान है एवं कौन ज्यादा संगत है?

22. 100 प्रेक्षणों के माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 40 एवं 10 ज्ञात किए गए थे। यदि परिकलन करते समय दो प्रेक्षणों 3 एवं 27 को गलती से क्रमशः 30 एवं 70 ले लिया गया हो, तो सही मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

23. 10 पाठ्यांकों (readings) का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात करते समय एक विद्यार्थी ने सही पाठ्यांक 25 के स्थान पर गलती से पाठ्यांक 52 का उपयोग कर लिया। उसे माध्य एवं प्रसरण क्रमशः 45 एवं 16 प्राप्त हुए। सही, माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 24 से 39 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q).

24. आंकड़ों 3, 10, 10, 4, 7, 10, 5 का माध्यम के सापेक्ष माध्य विचलन है:

(A) 2 (B) 2.57 (C) 3 (D) 3.75

25. n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ का उनके माध्य $\overline{x}$ के सापेक्ष माध्य विचलन है:

(A) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$

(C) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ (D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

26. परीक्षण के समय 5 बल्बों की कार्य अवधि (Life) घंटों में निम्न प्रकार नोट की गई:

1357, 1090, 1666, 1494, 1623

उनके माध्य से माध्य विचलन (घंटों में) है:

(A) 178 (B) 179 (C) 220 (D) 356

27. गणित के एक टेस्ट में 9 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित है:

50, 69, 20, 33, 53, 39, 40, 65, 59

उपरोक्त के लिए माध्यिका से माध्य विचलन हैं

(A) 9 (B) 10.5 (C) 12.67 (D) 14.76

28. आंकड़ों 6, 5, 9, 13, 12, 8, 10 का मानक विचलन है:

(A) $\sqrt{\frac{52}{7}}$ (B) $\frac{52}{7}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 6

29. मान लीजिए n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3 ......x_n$ हैं और इनका माध्य $\overline{x}$ है। मानक विचलन का सूत्र है:

(A) $\sum(x_i - \overline{x})^2$ (B) $\dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$

(C) $\sqrt{\dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} + \overline{x}^2}$

30. 100 प्रेक्षणों का माध्य 50 है और मानक विचलन 5 है। सभी प्रेक्षणों के वर्गों का योग है:

(A) 50000 (B) 250000 (C) 252500 (D) 255000

31. मान लीजिए प्रेक्षणों a, b, c, d, e का माध्य m है और मानक विचलन s है, तो प्रेक्षणों $a + k$, $b + k$, $c + k$, $d + k$, $e + k$ का मानक विचलन है:

(A) s (B) ks (C) $s + k$ (D) $\dfrac{s}{k}$

32. मान लीजिए प्रेक्षणों x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 का माध्य m एवं मानक विचलन s है, तो प्रेक्षणों kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5 का मानक विचलन है:

(A) $k + s$ (B) $\dfrac{s}{k}$ (C) ks (D) s

33. मान लीजिए n प्रेक्षण $x_1, x_2, ... x_n$ है, एवं $w_i = lx_i + k$, $i = 1, 2, ...n$, के लिए जहां l एवं k अचर हैं। यदि, x_i's के माध्य एवं मानक विचलन क्रमश: 48 एवं 12 है, w_i's के माध्य एवं मानक विचलन क्रमश: 55 एवं 15 हैं, तो l एवं k के मान है:

(A) $l = 1.25, k = -5$ (B) $l = -1.25, k = 5$

(C) $l = 2.5, k = -5$ (D) $l = 2.5, k = 5$

34. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के लिए मानक विचलन है:

(A) 5.5 (B) 3.87 (C) 2.97 (D) 2.87

35. संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 को लीजिए। यदि प्रत्येक संख्या में 1 जोड़ दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त संख्याओं का प्रसारण है:

(A) 6.5 (B) 2.87 (C) 3.87 (D) 8.25

36. प्रथम 10 धनात्मक पूर्णांकों को लीजिए। यदि हम प्रत्येक संख्या को -1 से गुणा कर दें और इसके बाद प्रत्येक संख्या में 1 जोड़ दें, तो इस प्रकार प्राप्त संख्याओं का प्रसरण है:

(A) 8.25 (B) 6.5 (C) 3.87 (D) 2.87

37. निम्नलिखित जानकारी एक ऐसे नमूने के लिए है जिसका आकार 60 है:

$$\sum x^2 = 18000, \quad \sum x = 960$$

तो प्रसरण है:

(A) 6.63 (B) 16 (C) 22 (D) 44

38. दो बंटनों के विचरण गुणांक 50 एवं 60 है और उनके माध्य क्रमशः 30 एवं 25 हैं, तो उनके मानक विचलनों का अन्तर है:

(A) 0 (B) 1 (C) 1.5 (D) 2.5

39. किसी तापमान आंकड़े का °C में मानक विचलन 5 है। यदि आंकड़ों को °F में परिवर्तित कर दिया जाए तो, प्रसरण होगा:

(A) 81 (B) 57 (C) 36 (D) 25

प्रश्न संख्या 40 से 46 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

40. विचरण गुणांक $= \dfrac{\cdots}{\text{माध्य}} \times 100$

41. यदि x के n मानों का माध्य $\bar{x}$ है, तो $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$ हमेशा बराबर है ____________.

यदि a का मान $\bar{x}$ के अतिरिक्त कुछ भी है, तो $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ ____________ $\sum (x_i - a)^2$

42. यदि कुछ आंकड़ों का प्रसरण 121 है, तो आंकड़ों का मानक विचलन ____________ है।

43. कुछ आंकड़ों का मानक विचलन मूल बिन्दु में परिवर्तन से ____________ है परन्तु स्केल परिवर्तन पर ____________ है।

44. माध्य के सापेक्ष लिए गए चर के मानों के विचलनों के वर्ग का योग __________ है।

45. माध्यिका से मापने पर आंकड़ों का माध्य विचलन ____________ है।

46. माध्य के सापेक्ष में मानक विचलन, माध्य विचलन ____________ है।

अध्याय 16

प्रायिकता

16.1 समग्र अवलोकन (Overview)

अनिश्चितता (Uncertainty) की परिमाणात्मक माप (quantitative measure) प्रायिकता की परिभाषा है, अर्थात् वह संख्यात्मक मान, जो किसी घटना (event) के घटित (occurrence) होने के हमारे विश्वास की शक्ति को व्यक्त करे। किसी घटना की प्रायिकता सदैव 0 और 1 के बीच की एक संख्या होती है, जिसमें 0 और 1 दोनों सम्मिलित हैं। यदि किसी घटना की प्रायिकता 1 के निकट है तो उसके घटित होने की सम्भावना अधिक होती है; तथा यदि घटना की प्रायिकता 0 के निकट है तो घटना के घटित होने की सम्भावना कम होती है। यदि घटना घटित नहीं हो, तो उसकी प्रायिकता 0 होती है। यदि घटना का घटित होना निश्चित है, तो उसकी प्रायिकता 1 होती है।

16.1.1 *यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment)* किसी परीक्षण के यादृच्छिक होने का अर्थ है कि परीक्षण के एक से अधिक संभव परिणाम हैं और निश्चित रूप से यह पूर्वानुमान (prediction) लगाना संभव नहीं है कि वह परिणाम क्या होगा। उदाहरण के लिए, एक सामान्य सिक्के के उछालने के परीक्षण में, यह पूर्वानुमान तो निश्चित रूप से लगाया जा सकता है, कि सिक्का या तो चित् (head) होगा या पट् (tail) होगा लेकिन (किन्तु) यह निश्चित रूप से ज्ञात नहीं है कि चित् या पट् में से क्या होगा। यदि किसी पासे (die) को एक बार फेंका जाए, तो छः संख्याओं, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी एक संख्या प्राप्त हो सकती है, परन्तु यह निश्चित नहीं है कि कौन-सी संख्या प्राप्त होगी।

(i) **परिणाम (Outcome)** किसी यादृच्छिक परीक्षण के संभव फल (नतीजे) को परीक्षण का परिणाम कहते हैं। उदाहरणार्थ किसी सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण के कुछ परिणाम HH, HT इत्यादि हैं।

(ii) **प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)** किसी परीक्षण के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। वस्तुत: यह किसी प्रदत्त परीक्षण के लिए, प्रासंगिक सार्वत्रिक समुच्चय S होता है।

किसी सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित हैं:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ताश के पत्तों की किसी गड्डी से एक पत्ते को निकालने के परीक्षण के लिए प्रतिदर्श समष्टि, गड्डी के सभी पत्तों का समुच्चय है।

16.1.2 *घटना (Event)* प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना होती है। उदाहरण के लिए, ताश की किसी गड्डी से एक इक्का (Ace) निकालने की घटना

A = {पान का इक्का, चिड़ी का इक्का, ईंट का इक्का, हुकुम का इक्का}

16.1.3 *घटनाओं के प्रकार (Types of events)*

(i) असंभव और निश्चित घटनाएँ (Impossible and Sure Events) रिक्त समुच्चय ϕ तथा प्रतिदर्श समष्टि S भी घटनाओं को व्यक्त करते हैं। वस्तुत: ϕ को एक असंभव घटना कहते हैं और S, अर्थात्, सम्पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को एक निश्चित घटना कहते हैं।

(ii) सरल या प्रारम्भिक घटना (Simple or Elementary Event) यदि किसी घटना E में प्रतिदर्श समष्टि का केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु हो, अर्थात् किसी परीक्षण का केवल एक परिणाम हो, तो घटना को सरल या प्रारम्भिक घटने कहते हैं। दो सिक्कों को उछालनें के किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि, निम्नलिखित है,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

घटना $E_1 = \{HH\}$ जिसमें प्रतिदर्श समष्टि S का अकेला परिणाम HH है, एक सरल या प्रारंभिक घटना है। ताश की भली भाँति फेंटी हुई गड्डी से एक पत्ता निकालनें के परीक्षण में, यदि कोई विशेष पत्ता, जैसे 'हुकुम की रानी' का निकालना, एक सरल घटना है।

(iii) मिश्र घटना (Compound Event) यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु हैं, तो इसे मिश्र घटना कहते हैं, उदाहरणार्थ, $E = \{HH, HT\}$ एक मिश्र घटना है।

(iv) पूरक घटना (Complementary event) किसी प्रदत्त घटना A के सापेक्ष, A की पूरक, वह घटना है, जिसमें प्रतिदर्श समष्टि के वे सभी परिणाम हों, जो A के घटित होने से संबंधित नहीं हैं।

A की पूरक घटना को प्रतीक A' अथवा $\bar{A}$ से निरूपित करते हैं। इसे घटना 'A-नहीं' भी कहते हैं। पुन: प्रतीक $P(\bar{A})$, A के नहीं घटनो की प्रायिकता को निरूपित करता है।

$$A' = \bar{A} = S - A = \{w : w \in S \text{ और } w \notin A\}$$

16.1.4 *घटना 'A या B' (Event 'A or B')* यदि A तथा B, एक ही प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित, दो घटनाएँ हों, तो घटना 'A या B' घटना $A \cup B$ के समान होती है और इसमें वे सभी अवयव होते हैं, जो या तो A में या B में या दोनों में हों। पुन: $P(A \cup B)$, A या B (या दोनों) के घटित होने की प्रायिकता को निरूपित करता है।

16.1.5 *घटना 'A और B' (Event 'A and B')* यदि A तथा B, एक ही प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हों, तो घटना 'A और B', घटना $A \cap B$ के समान होती है और इसमें वे सभी अवयव होते हैं, जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों। पुन:, $P(A \cap B)$, A और B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता को निरूपित करता है।

16.1.6 *घटना 'A किन्तु B नहीं (अन्तर A - B) '(The Event 'A but not B' (Difference A – B))* घटना $A - B$ एक ही समष्टि S के उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A में तो है किन्तु B में नहीं, अर्थात्, $A - B = A \cap B'$.

16.1.7 *परस्पर अपवर्जी (Mutually exclusive)* किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी होती हैं, यदि इनमें से किसी एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने को अपवर्जित करता है। अत: दोनों घटनाएँ A तथा B एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं और इस प्रकार $P(A \cap B) = 0$.

टिप्पणी: किसी प्रतिदर्श समष्टि की सरल अथवा प्रारम्भिक घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं। उदाहरण के लिए, किसी पासे के फेकनने के परीक्षण की सरल घटनाएँ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ *या* $\{6\}$ *परस्पर अपवर्जी हैं।*

किसी पासे को एक बार फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए:
घटना E = पासे पर एक सम संख्या प्रकट होना और घटना F = पासे पर एक विषम संख्या प्रकट होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, क्योंकि $E \cap F = \phi$.

टिप्पणी: किसी दिए हुए प्रतिदर्श समष्टि के लिए दो या अधिक परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो सकती हैं

16.1.8 नि:शेष घटनाएँ (*Exhaustive events*) : यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S \text{ तो } E_1, E_2, ...E_n$$

को नि:शेष घटनाएँ कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी प्रतिदर्श समष्टि S की घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ नि:शेष कहलाती हैं, यदि जब कभी परीक्षण किया जाए, तो इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो।

किसी पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यहाँ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. दो घटनाओं को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित कीजिए:

A : '4 के बराबर या 4 से कम संख्या का प्रकट होना'

B : '4 के बराबर या 4 से अधिक संख्या का प्रकट होना'

अब $A : \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

इस प्रकार की घटनाएँ A तथा B नि:शेष घटनाएँ कहलाती हैं।

16.1.9 *परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ (Mutually exclusive and exhaustive events)* : यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि $E_i \cap E_j = \phi$ प्रत्येक $i \neq j$, अर्थात्, E_i और E_j युग्मत: असंयुक्त हैं तथा $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, तो घटनाएँ $E_1, E_2, ... , E_n$ परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ कहलाती हैं।

किसी पासे को फेंकने के उदाहरण पर विचार कीजिए,

यहाँ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

आइए हम तीन घटनाओं को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित करें:

A = एक पूर्ण वर्ग संख्या

B = एक अभाज्य संख्या

C = एक संख्या, जो 6 के बराबर या 6 से बड़ी है

अब $A = \{1, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, C = \{6\}$

नोट कीजिए कि $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$. इसलिए, A, B तथा C नि:शेष घटनाएँ हैं। इसके अतिरिक्त

$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$

अत: घटनाएँ युग्मत: असंयुक्त है और परस्पर अपवर्जी हैं।

प्रायिकता के पुरातन (classical) सिद्धांत का प्रयोग, उस दशा में उपयोगी होता है, जब

परीक्षण के परिणाम सम संभाव्य (Equally likely) हों। इस दशा में प्रायिकता निर्धारित करने के लिए,हम तर्क शास्त्रीय विधियों का प्रयोग कर सकते हैं। पुरातन विधि को समझने के लिए, किसी अनभिनत (fair) सिक्के के परीक्षण पर विचार कीजिए। इस परीक्षण में दो सम संभाव्य परिणाम हैं–या तो चित्त (H) या पट (T)। जब प्रारम्भिक परिणामों को सम संभाव्य मान लेते हैं, तो हमें एक समान प्रायिकता का प्रतिमान प्राप्त होता है। यदि S में k प्रारम्भिक परिणाम हैं, तो प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{k}$ निर्धारित की जाती है। इसलिए तर्कशास्त्र सुझाव देते हैं कि, P (H) द्वारा निरूपित, चित प्रकट होने की प्रायिकता $\frac{1}{2} = 0.5$ है और P (T) द्वारा निरूपित, पट प्रकट होने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2} = 0.5$ है। नोट कीजिए कि इनमें से प्रत्येक प्रायिकता का मान 0 तथा 1 के बीच है। पुनः परीक्षण के कुल परिणाम H और T हैं, अतः P (H) + P (T) = 1.

16.1.10 *प्रायिकता की पुरातन परिभाषा* *(Classical definition)* यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि के सभी परिणाम सम संभाव्य हों तो किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता निम्नलिखित अनुपात के तुल्य (बराबर) होती है:

$$\frac{\text{उस घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श समष्टि के कुल परिणामों की संख्या}}$$

मान लीजिए कि कोई घटना E, कुल n संभव सम संभाव्य तरीकों में से, h तरीकों से घटित हो सकती है, तो, P(E) द्वारा निरूपित, उस घटना के घटित होने की पुरातन प्रायिकता निम्नलिखित होती है:

$$P(E) = \frac{h}{n}$$

साथ ही P(E–नहीं) द्वारा निरूपित, E के नहीं घटने की प्रायिकता निम्नलिखित होती हैं:

$$P(\text{not } E) = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - P(E)$$

अतः $\qquad$ P (E) + P (E–नहीं) = 1

घटना 'E-नहीं' को प्रतीक $\overline{E}$ या E′ (E की पूरक) द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

अतः $\quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

16.1.11 *प्रायिकता का अभिगृहीती दृष्टिकोण* *(Axiomatic approach to probability)* : मान लीजिए कि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। प्रायिकत P एक वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत S का घात समुच्चय है, अर्थात् P(S), तथा परिसर T अंतराल [0, 1] है, अर्थात्, $P : P(S) \rightarrow [0, 1]$ और जो निम्नलिखित अभिगृहीतियों को संतुष्ट करता है:

(i) किसी घटना E के लिए, $P(E) \geq 0$.

(ii) $P(S) = 1$

(iii) यदि E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

अभिगृहीत (iii) से निष्कर्ष निकलता है कि, $P(\phi) = 0$.

मान लीजिए कि S एक प्रतिदर्श समष्टि है, जिसमें प्रारंभिक परिणाम $w_1, w_2, ..., w_n$ अंतर्विष्ट (contain) हैं, अर्थात्,

$$S = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

प्रायिकता की अभिगृहीती परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि:

(i) प्रत्येक $w_i \in S$ के लिए, $0 \leq P(w_i) \leq 1$

(ii) $P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_n) = 1$

(iii) किसी घटना A के लिए, जिसमें प्रारम्भिक परिणाम w_i अंतर्विष्ट हैं, $P(A) = \sum P(w_i)$.

उदाहरण के लिए यदि अनभिनत सिक्का एक बार उछाला जाता है, तो

$P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$, जिससे उपर्युक्त प्रायिकता के तीनों अभिगृहीत संतुष्ट होते हैं।

अब, मान लीजिए कि सिक्का अभिनत (biased) है और पट प्रकट होने की तुलना में चित प्रकट होने की संभावना दुगुनी है, तो $P(H) = \frac{2}{3}$ तथा $P(T) = \frac{1}{3}$.

H तथा T की प्रायिकताओं का यह (उपर्युक्त) निर्धारण भी वैध (valid) है, क्योंकि ये अभिगृहीती परिभाषा को संतुष्ट करते हैं।

16.1.12 *सम संभाव्य परिणामों की प्रायिकता (Probabilities of equally likely outcomes)*

मान लीजिए कि किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ है और मान लीजिए कि सभी परिणामों के घटित होने की संभावना समान है, अर्थात्, प्रत्येक सरल घटना के घटित होने की संभावना अनिवार्यतः समान है, अर्थात् सभी $w_i \in S$ के लिए, $P(w_i) = p$, जहाँ $0 \leq p \leq 1$

क्योंकि $$\sum_{i=1}^{n} P(w_i) = 1$$

अर्थात् $$p + p + p + ... + p \text{ (} n \text{ बार)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad np = 1, \quad \text{अर्थात्} \quad p = \frac{1}{n}$$

मान लीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि की एक घटना E, इस प्रकार है कि, $n(S) = n$ तथा $n(E) = m$. यदि प्रत्येक परिणाम सम संभाव्य है, तो परिणामतः (fallows)

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}}$$

16.1.13 *प्रायिकता का योग नियम* (*Addition rule of probability*) यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B दो घटनाएँ हैं, तो घटनाओं A या B में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता निम्नलिखित प्रकार होती है:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

इसी प्रकार तीन घटनाओं A, B तथा C के लिए

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

16.1.14 परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग नियम (*Addition rule for mutually exclusive events*) यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, तो

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ [क्योंकि $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$, जहाँ A और B असंयुक्त हैं]

परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग नियम को दो से अधिक घटनाओं के लिए विस्तारित (extended) किया जा सकता है।

16.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघुउत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 एक सामान्य ताश की गड्डी में 52 पत्ते चार वर्गों में विभाजित होते हैं। ईंट तथा पान के पत्ते लाल रंग के होते हैं और चिडी तथा हुकुम के पत्ते काले रंग के होते हैं। J,Q और K ताश के सचित्र पत्ते कहलाते हैं। मान लीजिए कि, गड्डी में से हम एक पत्ता यादृच्छया निकालते हैं, तो

(a) परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

(b) चुने गए पत्ते के काले सचित्र होने के लिए घटना क्या है?

हल

(a) प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम गड्डी के 52 पत्ते हैं।

(b) मान लीजिए कि 'चुना गया पत्ता काला सचित्र पत्ता है' घटना E है। इस प्रकार हुकुम या चिड़ी का 'गुलाम', 'रानी', 'बादशाह', E के परिणाम हैं। प्रतीकात्मक रूप से

E = {हुकुम या चिड़ी के J, Q, K, } या $E = \{J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, J\spadesuit, Q\spadesuit, K\spadesuit\}$

उदाहरण 2 मान लीजिए कि पैदा होने वाले प्रत्येक बच्चे का लड़का या लड़की होना सम संभाव्य है। तथ्यत: (exactly) तीन बच्चों वाले एक परिवार पर विचार कीजिए।

(a) उस प्रतिदर्श समष्टि के आठ अवयवों की सूची बनाइए, जिसके परिणामों में तीनों बच्चों के लड़का या लड़की होने की सभी संभावनाएँ निहित हों।

(b) नीचे लिखी प्रत्येक घटना को समुच्चय रूप में लिखिए और उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) घटना कि तत्थ्यत: एक बच्चा लड़की है।

(ii) घटना कि कम से कम दो बच्चे लड़की है।

(iii) घटना की एक भी बच्चा लड़की नहीं है।

हल

(a) लड़का या लड़की होने की सभी संभावनाएँ नीचे व्यक्त हैं:

S = {BBB, BBG, BGB, BGG, GBB,GBG, GGB, GGG}

(b) (i) मान लीजिए कि A, घटना 'तथ्यत: एक बच्चा लड़की है' को निर्दिष्ट करता है, तो A = {BBG, BGB, GBB}

अतएव, $P(A) = \frac{3}{8}$

(ii) मान लीजिए कि B, घटना 'कम से कम दो बच्चे लड़की हैं' को निर्दिष्ट करता है, तो

B = {GGB, GBG, BGG, GGG}, अतएव, $P(B) = \frac{4}{8}$.

(iii) मान लीजिए कि C, घटना : 'एक भी बच्चा लड़की नहीं है' को निर्दिष्ट करता है, तो C = {BBB}

अतएव, $P(C) = \frac{1}{8}$

उदाहरण 3

(a) दो अंकों के कितने धन पूर्णांक संख्या 3 के गुणज हैं?

(b) यादृच्छया चुने गए एक दो अंकों वाले धन पूर्णांक का संख्या 3 के गुणज होने की प्रायिकता क्या है?

हल

(a) 12, 15, 18, ... , 99 दो अंकों के ऐसे धन पूर्णांक हैं, जो संख्या 3 के गुणज हैं। अत: इस प्रकार के 30 पूर्णांक हैं।

(b) 10, 11, 12, ... , 99 दो अंकों के धन पूर्णांक हैं। अत: इस प्रकार के 90 पूर्णांक हैं। क्योंकि इनमें से 30 पूर्णांक संख्या 3 के गुणज हैं, इसलिए इस बात की प्रायिकता कि, एक यादृच्छया चुना गया दो अंकों का धन पूर्णांक संख्या 3 का गुणज है, $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ है।

उदाहरण 4 एक विशिष्ट PIN (Personal identification number), अंग्रेजी वर्णमाला के 26 अक्षरों और प्रथम दस अंकों में से चुने गए किन्हीं भी चार प्रतीकों का, एक अनुक्रम है। यदि सभी PIN सम संभाव्य हैं, तो एक यादृच्छया चुने गए PIN में प्रतीकों की पुनरावृत्ति होने की क्या प्रायिकता है?

हल कोई PIN, 36 प्रतीकों (26 अक्षरों + 10 अंकों) में से चुने गए किन्हीं चार प्रतीकों का, एक अनुक्रम है। इस प्रकार गणना के आधारभूत सिद्धांत द्वारा, PINs की कुल संख्या $36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^4 = 1,679,616$ है जब पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो, तो गुणज नियम के प्रयोग द्वारा निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इसप्रकार के विभिन्न PINs की संख्या $36 \times 35 \times 34 \times 33 = 1,413,720$ है अतएव, कम से कम एक प्रतीक के पुनरावृत्ति वाले PINs की

संख्या = 1,679,616 – 1,413,720 = 2,65,896

अतः एक प्रतीक के पुनरावृत्ति वाले, यादृच्छया चुने गए PIN की, प्रायिकत

$$\frac{265,896}{1,679,616} = .1583 \text{ है।}$$

उदाहरण 5 किसी परीक्षण के A, B, C तथा D, चार संभव परिणाम हैं, जो परस्पर अपवर्जी हैं। स्पष्ट कीजिए कि प्रायिकता का निम्नलिखित निर्धारण, अनुज्ञेय (permissible) क्यों नहीं है:

(a) $P(A) = .12, \quad P(B) = .63, \quad P(C) = 0.45, \quad P(D) = -0.20$

(b) $P(A) = \frac{9}{120}, \quad P(B) = \frac{45}{120} \quad P(C) = \frac{27}{120} \quad P(D) = \frac{46}{120}$

हल

(a) हम जानते हैं कि, किसी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$

इसलिए $P(D) = -0.20$ संभव नहीं है,

(b) $$P(S) = P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} \neq 1.$$

यह प्रतिबंध $P(S) = 1$ का उल्लंघन करता है।

उदाहरण 6 एक ट्रक किसी मार्ग-बाधा पर रूका, तो इस बात की प्रायिकताएँ कि, ट्रक के ब्रेक दोषपूर्ण हैं या उसके टायर घिसे-पिटे हैं, क्रमशः 0.32 तथा 0.24 हैं। साथ ही, इस बात की प्रायिकता 0.38 है, कि यदि ट्रक उस मार्ग-बाधा पर रूकी, तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं / या उसके टायर घिसे-पिटे हैं। इस बात की प्रायिकता क्या है कि,यदि ट्रक उसी मार्ग बाधा पर रूका तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं साथ ही उसके टायर भी घिसे-पिटे हैं?

हल मान लीजिए कि घटना B 'ट्रक उस मार्ग-बाधा पर रूका, तो उसके ब्रेक दोषपूर्ण हैं' को प्रकट करता है और घटना T इस बात को प्रकट करता है कि उसके टायर घिसे-पिटे हैं। इस प्रकार $P(B) = 0.23$, $P(T) = 0.24$ तथा $P(B \cup T) = 0.38$

और $\quad P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T)$

अतः $\quad 0.38 = 0.23 + 0.24 - P(B \cap T)$

$\Rightarrow \quad P(B \cap T) = 0.23 + 0.24 - 0.38 = 0.09$

उदाहरण 7 कोई व्यक्ति अपने दंतचिकित्सक के पास जाता है। मान लीजिए कि इस बात की प्रायिकता, कि वह अपने दांतों की सफाई करवाएगा, 0.48 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक खोखले स्थान (Cavity) को भरवाएगा, 0.25 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक दांत उखड़्वाएगा (निकलवाएगा), 0.20 है, इस बात की प्राायिकता कि वह दांतों की सफाई करवाएगा और एक खोखले स्थान को भरवाएगा, 0.09 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह दांतों की सफाई करवाएगा और एक दांत उखड़वाएगा, 0.12 है, इस बात की प्रायिकता, कि वह एक खोखले स्थान को भरवाएगा और एक

दांत उखड़वाएगा, 0.07 तथा इस बात की प्रायिकता, कि वह दांतों की सफाई करवाएगा, एक खोखले स्थान को भरवाएगा और एक दांत उखड़वाएगा 0.03 है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि अपने दंतचिकित्सक के पास जाने वाला एक व्यक्ति इनमें से कम से कम एक (काम) करवाएगा?

हल मान लीजिए कि C व्यक्ति द्वारा दांतों की सफाई करवाने की घटना को प्रकट करता है और F तथा E क्रमशः खोखले स्थान को भरवाने तथा दांत को उखड़वाने की घटनाओं को प्रकट करते हैं। हमें दिया हुआ है कि,

$$P(C) = 0.48,\ P(F) = 0.25,\quad P(E) = .20,\quad P(C \cap F) = .09,$$

$$P(C \cap E) = 0.12,\ P(E \cap F) = 0.07 \text{ और } P(C \cap F \cap E) = 0.03$$

अब,
$$\begin{aligned} P(C \cup F \cup E) &= P(C) + P(F) + P(E) \\ &\quad - P(C \cap F) - P(C \cap E) - P(F \cap E) \\ &\quad + P(C \cap F \cap E) \\ &= 0.48 + 0.25 + 0.20 - 0.09 - 0.12 - 0.07 + 0.03 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

दीर्घउत्तरीय (L.A)

उदारहण 8 एक कलश में 1 से 20 तक क्रमांकित काग़ज़ की बीस सफ़ेद पर्चियाँ, 1 से 10 तक क्रमांकित काग़ज़ की दस लाल पर्चियाँ, 1 से 40 तक क्रमांकित काग़ज़ की चालीस पीली पर्चियाँ तथा 1 से 10 तक क्रमांकित काग़ज की दस नीली पर्चियाँ हैं। यदि काग़ज़ की ये 80 पर्चियाँ अच्छी तरह से मिला दी गई हों, जिससे प्रत्येक पर्ची के कलश से निकाले जाने की प्रायिकता समान हो, तो एक पर्ची के निकालने की निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(a) पर्ची नीली या सफ़ेद हो

(b) पर्ची 1, 2, 3, 4 या 5 क्रमांकित हो

(c) पर्ची लाल या पीली हो और 1, 2, 3 या 4 क्रमांकित हो

(d) पर्ची 5, 15, 25, या 35 क्रमांकित हो

(e) पर्ची सफ़ेद हो और उस पर 12 से अधिक संख्या अंकित हो या पर्ची पीली हो और उस पर 26 से अधिक संख्या अंकित हो।

हल

(a) P (नीली या सफ़ेद) = P (नीली) + P (सफ़ेद) (क्यों?)

$$= \frac{10}{80} + \frac{20}{80} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

(b) P (1, 2, 3, 4 या 5 क्रमांकित पर्ची)

= P (किसी भी रंग की अंक 1 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 2 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 3 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 4 वाली पर्ची) + P (किसी भी रंग की अंक 5 वाली पर्ची)।

$= \frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80}+\frac{4}{80} = \frac{20}{80}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

(c) P (लाल या पीली और 1, 2, 3 या 4 अंकित पर्ची)

= P (1, 2, 3 या 4 अंकित लाल पर्ची) + P (1, 2, 3 या 4 अंकित पीली पर्ची)

$= \frac{4}{80}+\frac{4}{80}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$

(d) P (5, 15, 25 या 35 अंकित पर्ची)

= P (5) + P (15) + P (25) + P (35)

= P (अंक 5 वाली सफ़ेद, लाल, पीली या नीली पर्ची) + P (अंक 15 वाली सफ़ेद या पीली पर्ची) + P (अंक 25 वाली पीली पर्ची) + P (अंक 35 वाली पीली पर्ची)

$= \frac{4}{80}+\frac{2}{80}+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}=\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$

(e) P (12 से अधिक अंकित सफ़ेद पर्ची या 26 से अधिक अंकित पीली पर्ची)

= P (12 से अधिक अंकित सफ़ेद पर्ची)

+ P (26 से अधिक अंकित पीली पची)

$= \frac{8}{80}+\frac{14}{80}=\frac{22}{80} = \frac{11}{40}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 1 से 15 तक प्रत्येक में दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q).

उदाहरण 9 किसी लीप वर्ष (Leap year) में 53 रविवार या 53 सोमवार होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि किसी लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं और इसलिए 52 सप्ताह और 2 दिन होते हैं ये 2 दिन SM, MT, TW, WTh, ThF, FSt, StS हो सकते हैं।

अतः P (53 रविवार या 53 सोमबार) = $\frac{3}{7}$.

उदारहण 10: अंक 0, 2, 4, 6, 8 का प्रयोग करके तीन अंकों की संख्याएँ बनाई जाती हैं। इन संख्याओं में से एक संख्या यादृच्छया चुनी जाती है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि चुनी गई इस संख्या के तीनों अंक एक ही (same) हों?

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{16}{25}$ (C) $\frac{1}{645}$ (D) $\frac{1}{25}$

हल (D) सही उत्तर है। क्योंकि एक तीन अंकों की संख्या 0 से प्रारंभ नहीं हो सकती, इसलिए सैकड़े के स्थान पर 0 के अतिरिक्त शेष कोई भी 4 अंक हो सकते हैं। अब दहाई तथा इकाई के स्थान पर सभी 5 अंक हो सकते हैं। अत: तीन अंकों की कुल संभव संख्याएँ $4 \times 5 \times 5$, अर्थात् 100 हैं। इस प्रकार की तीन अंकों की कुल संभव संख्या, जिनके तीनों अंक एक ही हों $= 4$

अत: P अंकों की संख्याएँ जिनके तीनों अंक एक ही हैं $= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

उदाहरण 11 किसी चेश बोर्ड (Chesas board) के तीन वर्ग यादृच्छया चुने जाते हैं। दो वर्गों के एक ही रंग के तथा तीसरे वर्ग के पृथक (भिन्न) रंग के होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{16}{21}$ (B) $\frac{8}{21}$ (C) $\frac{3}{32}$ (D) $\frac{3}{8}$

हल (A) सही उत्तर है। किसी चेश बोर्ड में 64 वर्ग होते हैं जिनमें से 32 सफ़ेद रंग के तथा 32 काले रंग के होते हैं। दो वर्ग एक रंग के तथा तीसरा पृथक् रंग का होने के लिए 2W, 1B या 1W या 2B हो सकता है। ऐसा होने के $({}^{32}C_2 \times {}^{32}C_1) \times 2$ तरीके हैं और साथ ही कोई भी तन वर्ग चुनने के ${}^{64}C_3$ तरीक़े हैं।

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^{32}C_2 \times {}^{32}C_1 \times 2}{{}^{64}C_3} = \frac{16}{21}$.

उदाहरण 12 यदि A तथा B कोई दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$ तो $\overline{A} \cap B$ की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$

हल (C) सही उत्तर है। हमें ज्ञात है कि $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup (B - A)) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P(A) + P(B - A) = \frac{1}{2}$$ (क्योंकि A तथा B – A परस्पर अपवर्जी हैं)

$$\Rightarrow \quad 1 - P(\overline{A}) + P(B - A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{2}{3} + P(B - A) = \frac{1}{2}$$

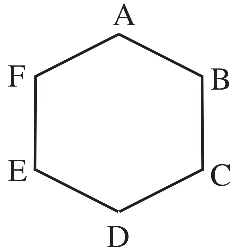
$$\Rightarrow \quad P(B - A) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6} \qquad (\text{क्योंकि } \bar{A} \cap B \equiv B - A)$$

उदाहरण 13 किसी सम षड्भुज (regular hexagon) के छः शीर्षों में से तीन शीर्षों को यादृच्छया चुना जाता है। इन शीर्षों से बने त्रिभुज के समभुज (equilateral) होने की प्रायिकता क्या है?

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) $\frac{1}{20}$ (D) $\frac{1}{10}$

हल (D) सही उत्तर है।



आकृति 16.1

ABCDEF एक सम षड्भुज है। त्रिभुजों की कुल संख्या ${}^6C_3 = 20$ हैं (क्योंकि कोई भी तीन शीर्ष संरेख नहीं हैं,) इन त्रिभुजों में से केवल Δ ACE; Δ BDF ही समबाहु हैं।

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

उदाहरण 14 यदि A, B, C किसी परीक्षण की तीन परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $3P(A) = 2P(B) = P(C)$, तो P(A) निम्नलिखित में से किसके तुल्य (समान) है:

(A) $\frac{1}{11}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{5}{11}$ (D) $\frac{6}{11}$

हल (B) सही उत्तर है। मान लीजिए कि $3P(A) = 2P(B) = P(C) = p$ परिणामतः $p(A) = \frac{p}{3}$,

$P(B) = \frac{p}{2}$ और $P(C) = p$

अब, क्योंकि A, B, C परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं, इसलिए

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{3} + \frac{p}{2} + p = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{6}{11}$$

अतः $\quad P(A) = \frac{p}{3} = \frac{2}{11}$

उदाहरण 15 समुच्चय $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ से स्वयं (A में) सभी फलनों में से एक फलन यादृच्छया चुना जाता है। चयनित (चुने गए) फलन के एकैकी (one to one) होने की प्रायिकता है।

(A) $\frac{1}{n^n}$ (B) $\frac{1}{\underline{|n}}$ (C) $\frac{\underline{|n-1}}{n^{n-1}}$

(D) इनमें से कोई भी नहीं है।

हल (C) सही उत्तर है। n अवयव वाले समुच्चय A से स्वयंम् में कुल फलनों की संख्या n^n है अब एकैकी फलन के लिए A के प्रथम अवयव के लिए स्वयंम् में कोई भी n प्रतिबिंब हो सकते हैं; A के द्वितीय अवयव के लिए शेष (बचे हुए) $(n-1)$ प्रतिबिंब हो सकते हैं, इसी प्रकार से गणना करने पर A के n-वें (n^{th}) अवयव का केवल 1 प्रतिबिंब होगा। इसलिए एकैकी फलनों की कुल संख्या $\underline{|n}$ होगी।

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{\underline{|n}}{n^n} = \frac{n\underline{|n-1}}{n\,n^{n-1}} = \frac{\underline{|n-1}}{n^{n-1}}$ है।

16.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. यदि शब्द ALGORITHM के अक्षरों को एक पंक्ति में यादृच्छया क्रमबद्ध किया जाए, तो GOR अक्षरों के एक इकाई के रूप में इकट्ठे एक साथ रहने की प्रायिकता क्या है?

2. छः नए कर्मचारियों में, जिनमें से दो एक दूसरे से विवाहित हैं, एक पंक्ति में लगे छः डेस्कों को बांट देना है। यदि डेस्कों का कर्मचारियों में यह आबंटन यादृच्छया किया गया हो, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि विवाहित जोड़े को संलग्न (अगल-बगल) डेस्क नहीं मिलेंगे?

[*संकेत: जोड़े को संलग्न डेस्कें मिलने की प्रायिकता पहले ज्ञात कीजिए और तब इसे 1 से घटा दीजिए*]

3. मान लीजिए कि 1 से 1000 तक के पूर्णांकों में से एक पूर्णांक यादृच्छया चुना जाता है, तो इस पूर्णांक के संख्या 2 का गुणज या संख्या 9 का गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. किसी परीक्षण में एक पासे को तब तक फेंकते रहते हैं, जब तक संख्या 2 प्राप्त नहीं हो जाती है।

(i) प्रतिदर्श समष्टि के कितने अवयव, पासे के k^{th} बार फेंकने पर संख्या 2 के प्राप्त होने की घटना के संगत हैं?

(ii) प्रतिदर्श समष्टि के कितने अवयव, पासे के k^{th} बार फेंकने के पश्चात् संख्या 2 के नहीं प्राप्त होने की घटना के, संगत हैं?

[**संकेत:** (a) *पहले* $(k - 1)$ *बार फेंकने पर प्रत्येक के* 5 *परिणाम होंगे और* k^{th} *बार फेंकने पर* 1 *परिणाम होगा।* (b) $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1}$.]

5. एक पासा इस प्रकार भारित (loaded) है कि उसे फेंकने पर प्रत्येक विषम संख्या के प्राप्त होने की संभावना प्रत्येक सम संख्या के प्राप्त होने की संभावना से दुगुनी है। P(G) ज्ञात कीजिए, जहाँ G पासे को एक बार फेंकने पर 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की घटना है।

6. एक विशाल महानगरीय क्षेत्र में किसी परिवार (सर्वे के लिए यादृच्छया चुने गए) के पास एक रंगीन टेलीविज़न सेट एक काला-सफ़ेद (Black and white) टेलीविज़न सेट या दोनों प्रकार के सेटों के होनें की प्रायिकता क्रमश: 0.87, .36 या .30 है। किसी परिवार के पास दोनों में से कोई एक या दोनों ही प्रकार के सेट होने की क्या प्रायिकता है?

7. यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.35$ तथा $P(B) = 0.45$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए;

(a) $P(A')$ (b) $P(B')$ (c) $P(A \cup B)$ (d) $P(A \cap B)$

(e) $P(A \cap B')$ (f) $P(A' \cap B')$

8. आयुर्विज्ञान के विद्यार्थियों की एक टीम (टोली, दल) को अंतरंग अध्ययन (internship) के दौरान नगर के किसी चिकित्सालय में सर्जरी (शल्य क्रिया) में सहयोग करना है। सर्जरी को अति जटिल, जटिल, सामान्य, सरल या अति सरल श्रेणियों में रेखने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.15, 0.20, 0.31, 0.26 या 0.08 हैं। किसी विशेष सर्जरी को निम्नलिखित श्रेणियों में रखने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(a) जटिल या अति जटिल

(b) न तो अति जटिल और न ही अति सरल

(c) सामान्य या जटिल

(d) सामान्य या सरल

9. किसी विद्यालय की क्रिकेट टीम को प्रशिक्षित करने के लिए चार प्रत्याशियों A, B, C तथा D ने आवेदन किया है। यदि A के चुनें जानें की संभावना B से दुगुनी है तथा B और C के चुने जाने की सम्भावनाएं लगभग समान हैं जबकि C के चुनें जाने की संभावना D से दोगुनी है, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि,

(a) C चुना जाएगा?

(b) A नहीं चुना जाएगा?

10. जॉन, रीता, असलम या गुरप्रीत चारों व्यक्तियों में से एक की पदोन्नति आगामी माह में कीजाएगी। फलस्वरूप, प्रतिदर्श समष्टि चार सरल परिणामों से बना है। इस प्रकार

S = {जॉन की उन्नति (promoted), रीता की उन्नति, असलम की उन्नति, गुरप्रीत की उन्नति}

आपको बताया जाता है कि जॉन की पदोन्नति की संभवना गुरप्रीत के समान है, रीता की पदोन्नति की संभावना जॉन से दुगुनी है। असलम की संभावन जॉन से चार गुनी (चौगुनी) है।

(a) ज्ञात कीजिए; P (जॉन उन्नति)

P (रीता उन्नति)

P (असलम उन्नति)

P (गुरप्रीत उन्नति)

(b) यदि A = {जॉन उन्नति या गुरप्रीत उन्नति}, तो P (A) ज्ञात कीजिए।

11. संलग्न वेन आरेख A, B, और C, तीन घटनाओं को प्रदर्शित करता है और साथ ही विविध सर्वनिष्ठों की प्रायिकताओं को भी प्रकट करता है (उदाहरण $P(A \cap B) = .07$)। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(a) P (A)

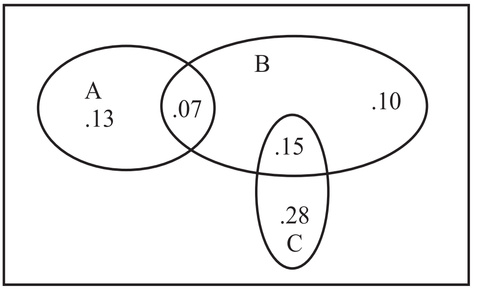
(b) $P(B \cap \bar{C})$

(c) $P(A \cup B)$

(d) $P(A \cap \bar{B})$

(e) $P(B \cap C)$

(f) तीनों में से तथ्यत: एक के घटित होने की प्रायिकता



आकृति 16.2

दीर्घउत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. किसी कलश में दो काले (चिह्नित B_1 तथा B_2) और एक सफ़ेद गेंद है। दूसरे कलश में एक काला गेंद और दो सफेद गेंद (चिह्नित W1 तथा W_2) हैं। मान लीजिए कि निम्नलिखित परीक्षण किया जाता है। दोनों कलशों में से एक को यादृच्छया चुना जाता हैं तदनन्तर (उसके बाद) इस कलश में से एक गेंद को यादृच्छया निकाला (चुना) जाता है। इसके उपरान्त पहले गेंद को वापस रखे बिना, इसी कलश से एक दूसरा गेंद यादृच्छया निकाला जाता है।

(a) सभी संभव परिणामों को प्रदर्शित करने वाला प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(b) दो काले गेंदों के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

(c) विपरीत रंगों के दो गेंदों के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

13. एक थैले में 8 लाल तथा 5 सफ़ेद की गेंदें हैं। तीन गेंदों को यादृच्छया निकाला जाता है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि,

(a) सभी तीनों गेंदें सफ़ेद रंग की हैं।

(b) सभी तीनों गेंदें लाल रंग की हैं।

(c) एक गेंद लाल रंग की है और दो गेंदें सफ़ेद रंग की हैं।

14. यदि शब्द ASSASSINATION के अक्षरों को यादृच्छया क्रमबद्ध (arranged) किया जाए, तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि,

(a) बनने वाले शब्द में चारो S लगातार हों।

(b) दो I' और दो N' एक साथ हों।

(c) सभी A एक साथ नहीं हों।

(d) कोई भी दो A एक साथ नहीं हों।

15. ताश के 52 पत्तों की किसी गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। निकाले गए पत्ते की एक बादशाह होने की या एक पान का पत्ता होने की या एक लाल रंग का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. एक प्रतिदर्श समष्टि में 9 सरल परिणाम $e_1, e_2, ..., e_9$ हैं, जिनकी प्रायिकताएँ नीचे दी हुई हैं:
$P(e_1) = P(e_2) = .08,\ P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = .1$
$P(e_6) = P(e_7) = .2,\ P(e_8) = P(e_9) = .07$
मान लीजिए कि, $A = \{e_1, e_5, e_8\}$, $B = \{e_2, e_5, e_8, e_9\}$

(a) P (A), P (B), और $P(A \cap B)$ की गणना कीजिए।

(b) प्रायिकता के योग नियम का प्रयोग करके, $P(A \cup B)$ की गणना कीजिए।

(c) घटना $A \cup B$ की रचना (composition) की सूची बनाइए और प्रारम्भिक परिणामों की प्रायिकताओं को जोड़कर, $P(A \cup B)$ की गणना कीजिए।

(d) P(B) के माने से $P(\overline{B})$ की गणना कीजिए साथ ही सीधे $\overline{B}$ के प्रारम्भिक परिणामों से $P(\overline{B})$ की गणना कीजिए।

17. निम्नलिखित घटनाओं में से प्रत्येक की प्रायिकता p ज्ञात कीजिए:

(a) किसी अनभिनत (unbiased, fair) पासे को एक बार फेंकने पर एक विषम संख्या का प्राप्त होना।

(b) किसी अनभिनत सिक्के को दो बार उछालने पर कम से कम एक चित प्रकट होना।

(c) ताश के 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी हुई किसी साधारण गड्डी से एक पत्ते के निकालने पर एक बादशाह, पान का 9 या हुकुम का 3 प्राप्त होना।

(d) अनभिनत पासों के किसी जोड़े को एक बार फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 6 होना।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 18 से 29 तक प्रत्येक में दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q):

18. लीप वर्ष के अतिरिक्त किसी अन्य वर्ष में 53 मंगलवार या 53 बुधवार होने की प्रायिकता।

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं है।

19. 1 से 20 तक की संख्याओं में से तीन संख्याएँ चुनी जाती हैं। इन संख्याओं के क्रमागत (Consecutive) नहीं होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{186}{190}$ (B) $\frac{187}{190}$ (C) $\frac{188}{190}$ (D) $\frac{18}{{}^{20}C_3}$

20. ताश के 52 पत्तों की किसी गड्डी को फेंटते समय 2 पत्ते संयोगवश गिर जाते हैं। गिरे हुए पत्तों के असमान (भिन्न)रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(A) $\frac{29}{52}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{26}{51}$ (D) $\frac{27}{51}$

21. सात व्यक्तियों को एक पंक्ति में बैठना है। दो विशेष व्यक्तियों के एक दूसरे के अगल-बगल बैठने की प्रायिकता निम्नलिखित में कौन सी है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{2}$

22. अंकों 0, 2, 3, 5 से, बिना पुनरावृत्ति किए, चार अंकों की संख्याएँ बनाई जाती हैं। इस प्रकार बनी संख्या के 5 से भाज्य होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{5}{9}$

23. यदि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं, तो

(A) $P(A) \leq P(\bar{B})$ (B) $P(A) \geq P(\bar{B})$

(C) $P(A) < P(\bar{B})$ (D) इनमें से कोई नहीं है

24. किन्हीं दो घटनाओं A तथा B के लिए, यदि $P(A \cup B) = P(A \cap B)$, तो

(A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) > P(B)$

(C) $P(A) < P(B)$ (D) इनमें से कोई नहीं है

25. 6 लड़के तथा 6 लड़कियाँ एक पंक्ति में यादृच्छया बैठते हैं। सभी लड़कियों के एक साथ (together) बैठने की प्रायिकता

(A) $\frac{1}{432}$ (B) $\frac{12}{431}$ (C) $\frac{1}{132}$ (D) इनमें से कोई नहीं।

26. 'PROBABILITY' शब्द से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। इस अक्षर के एक स्वर होने की प्रायिकता

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{11}$ (C) $\frac{2}{11}$ (D) $\frac{3}{11}$

27. यदि किसी परीक्षा में A के असफल होने की प्रायिकता 0.2 है, जबकि B के असफल होने की प्रायिकता 0.3 है, या तो A या B के असफल होने की प्रायिकता है:

(A) $> .5$ (B) $.5$ (C) $\leq .5$ (D) 0

28. घटनाओं A तथा B में से कम से कम किसी एक के घटने की प्रायिकता 0.6 है। यदि A और B के एक साथ घटित होनें की प्रायिकता 0.2 है, तो $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ है

(A) 0.4 (B) 0.8 (C) 1.2 (D) 1.6

29. यदि M तथा N कोई दो घटनाएँ हैं, तो इनमें से कम से कम किसी एक के घटित होने की प्रायिकता है:

(A) $P(M) + P(N) - 2P(M \cap N)$ (B) $P(M) + P(N) - P(M \cap N)$

(C) $P(M) + P(N) + P(M \cap N)$ (D) $P(M) + P(N) + 2P(M \cap N)$

बताइए कि प्रश्न 30 *से* 36 *तक दिए हुए कथनों में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है?*

30. किसी चिड़ियाघर घूमने वाले एक व्यक्ति द्वारा जिराफ को देखने की प्रायिकता 0.72 है, भालू को देखने की प्रायिकता 0.84 है तथा दोनों को ही देखने की प्रायिकता 0.52 है।

31. किसी विद्यार्थी द्वारा परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.73 है, विद्यार्थी के पूरक परीक्षा (Compartment) देने की प्रायिकता 0.13 है तथा विद्यार्थी के या तो उत्तीर्ण होने की या पूरक परीक्षा देनें की प्रायिकता 0.96 है।

32. एक टाईपिस्ट द्वारा किसी रिपोर्ट को टाइप करने में 0, 1, 2, 3, 4 तथा 5 या अधिक गलतियाँ (त्रुटियाँ) करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.12, 0.25, 0.36, 0.14, 0.08 तथा 0.11 है।

33. किसी इंजीनियरी कॉलेज में प्रवेश चाहने वाले A तथा B दो प्रवेशार्थी हैं। यदि A के चयन की प्रायिकता 0.5 है और A तथा B दोनों के ही चयन की अधिकतम प्रायिकता 0.3 है, तो क्या यह सम्भव है कि B के चयन की प्रायिकता 0.7 है।

34. A और B दो घटनाओं के सर्वनिष्ठ की प्रायिकता, घटना A के अनुकूल प्रायिकता से सदैव कम या उसके बराबर होती है।

35. किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता 0.7 है और एक अन्य घटना B के घटित होने की प्रायिकता 0.3 है तथा दोनों के घटित होने की प्रायकिता 0.4 है।

36. दो विद्यार्थियों की अपनी अन्तिम परीक्षाओं में श्रेष्ठता (distinction) प्राप्त करने की प्रायिकताओं का योगफल 1.2 है।

प्रश्न संख्याओं 37 *से* 41 *में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-*

37. आगामी फुटबाल के खेल में मेज़बान टीम के जीतनें की प्रायिकता 0.77 है, खेल के बराबरी पर छूटने (tie) की प्रायिकता 0.08 है तथा टीम के हारने की प्रायिकता ________ है।

38. यदि e_1, e_2, e_3, e_4 किसी प्रतिदर्श समष्टि के, चार प्रारम्भिक परिणाम है और $P(e_1) = .1$, $P(e_2) = .5$, $P(e_3) = .1$, तो e_4 की प्रायिकता ________ है।

39. मान लीजिए कि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{1, 3, 5\}$, तो $\overline{E}$ ________ है।

40. यदि A तथा B, किसी यादृच्छिक परीक्षण से सम्बद्ध (सम्बंधित), दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ तथा $P(A \cap B) = 0.1$, तो $P(A \cap \overline{B})$ का मान ________ है।

41. किसी घटना A के घटित होनें की प्रायिकता 0.5 है तथा घटना B के घटित होने की प्रायिकता 0.3 है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो न तो A और B की प्रायिकता ———————— है।

42. स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत (नीचे) प्रस्तावित प्रायिकता का स्तम्भ C_2 के अंतर्गत उपयुक्त/समुचित (appropriate) लिखित वर्णन से मिलान (match) कीजिए:

C_1 प्रायिकता	C_2 लिखित वर्णन
(a) 0.95	(i) एक ग़लत निर्धारण करना
(b) 0.02	(ii) घटित होने की कोई सम्भावना नहीं होना।
(c) – 0.3	(iii) घटित होने की सम्भावना नहीं होने के बराबर।
(d) 0.5	(iv) घटित होने की सम्भव बहुत होना।
(e) 0	(v) घटित होने की सम्भावना बहुत कम होना।

43. निम्नलिखित का सही मिलान कीजिए:

(a) यदि E_1 और E_2 दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं	(i) $E_1 \cap E_2 = E_1$
(b) यदि E_1 और E_2 परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेष घटनाएँ हैं	(ii) $(E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2) = E_1$
(c) यदि E_1 और E_2 के परिणाम उभयनिष्ठ हों, तो	(iii) $E_1 \cap E_2 = \phi$, $E_1 \cup E_2 = S$
(d) यदि E_1 और E_2 दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $E_1 \subset E_2$	(iv) $E_1 \cap E_2 = \phi$

उत्तरमाला

1.3 प्रश्नावली

1. (i) $\{2\}$ (ii) $\{0, 1\}$ (iii) $\{1, p\}$

2. (i) $\{0, -1, 1\}$ (ii) $\left\{\frac{-11}{3}\right\}$ (iii) $\left\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$

3. $\{1, 2, 2^2, 2^3, ...2^{P-1}, (2^p - 1\}$

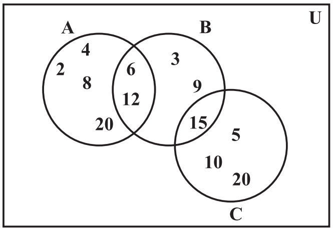
4. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य

7. (i) $\{2, 4, 6, 8, ... , 98\}$ (ii) $(1,4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,\}$

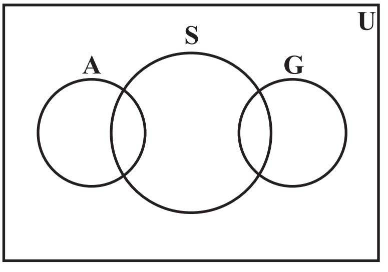
8. (i) $\{4, 8, 12\}$ (ii) $\{7, 8, 9\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$ (iv) $\{0, 1, 2\}$

9. (i) $\{4, 5, 6, ...10\}$ (ii) $\{5\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

10.



11.



13. सत्य **14.** असत्य **15.** सत्य **16.** सत्य **17.** सत्य **22.** T = $\{10\}$

24. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3 (iv) 9 **25.** 25 **26.** 20 **27.** (a) 3300 (b) 4000

28. (i) 6, (ii) 3, (iii) 9, (iv) 1, (v) 2, (vi) 6, (vii) 30, (viii) 20 **29.** C

30. B **31.** B **32.** D **33.** C **34.** D **35.** B **36.** B **37.** C

38. C **39.** C **40.** A **41.** B **42.** B **43.** C **44.** [1,2] **45.** 1

46. n (B) **47.** $A \cap B'$ **48.** $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ **49.** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

50. (i) $\{1,5, 9, 10\}$ (ii) $\{1, 2,3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ **51.** $A \cup B'$ **52.** (i) $\leftrightarrow$(b) (ii) $\leftrightarrow$(c) (iii) $\leftrightarrow$ (a) (iv) $\leftrightarrow$(f) (v) $\leftrightarrow$(d) (vi) $\leftrightarrow$ (e) **53.** सत्य **54.** असत्य

55. सत्य **56.** सत्य **57.** सत्य **58.** असत्य

2.3 प्रश्नावली

1. (i) $\{(-1, 1), (-1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

(ii) $\{(1, -1), (1, 2), (1, 3), (3, -1), (3, 2), (3, 3)\}$

(iii) $\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

(iv) $\{(-1, -1), (-1, 2), (-1, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3), (3, -1), (3, 2), (3, 3)\}$

2. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

3. (i) $\{(0, 3), (1, 3)\}$

(ii) $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1,5)\}$

4. (i) $a = \frac{11}{3}$ और $b = \frac{2}{3}$ (ii) $a = 0$ और $b = -2$

5. (i) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

(ii) $\{(1, 1), (1, 2), (1,3),(2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

(iii) $\{(4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

6. R का प्रांत $= \{0, 3, 4, 5\} =$ R का परिसर

7. R_1 का प्रांत $= [-5, 5]$ और R_1 का परिसर $= [-3, 17]$

8. $R_2 = \{(0, 8), (8, 0) (0,-8), (-8, 0)\}$

9. R_3 का प्रांत $= \mathbf{R}$ और R_3 का परिसर $= \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

10. (i) h एक फलन नहीं है। (ii) f एक फलन है। (iii) g एक फलन है। (iv) s एक फलन है। (v) t एक अचर फलन है।

11. (a) 6 (b) $\frac{1364}{4}$ (c) 13 (d) $t^2 - 4$ (e) $t + 5$ **12.** (a) $x = 4$ (b) $x > 4$

13. (i) $(f + g)\, x = x^2 + 2x + 2$ (ii) $(f - g)\, x = 2x - x^2$

(iii) $(f g)\, x = 2x^3 + x^3 + 2x + 1$ (iv) $\left(\frac{f}{g}\right) x = \frac{2x+1}{x^2+1}$

14. (i) $f = \{(-1, 0), (0, 1), (3, 28), (7, 344), (9, 730)\}$ **15.** $x = -1, \frac{4}{3}$

16. हाँ, $\alpha = 2$, $\beta = -1$ **17.** (i)$R - \{2n\pi : n \in Z\}$ (ii) R^+ (iii) R
(iv) $R - \{-1, 1\}$ (v) $R - \{4\}$

18. (i) $[\frac{3}{2}, \infty)$ (ii) $(-\infty, 1]$ (iii) $[0, \infty)$ (iv) $[-2, 4]$

19. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -3 \le x < -2 \\ 4, & -2 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ **21.** (i)$(f+g)\,x = \sqrt{x} + x$ (ii)$(f-g)\,x = \sqrt{x} - x$

(iii) $(fg)\,x = x^{\frac{3}{2}}$ (iv) $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **22.** f का प्रांत $= (5, \infty)$ और f का परिसर $= R^+$

24. D **25.** D **26.** B **27.** C **28.** B **29.** B **30.** A **31.** C
32. C **33.** A **34.** B **35.** A **36.** $\{2, 3, 4, 5\}$ **37.** (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (iv)
(c) $\leftrightarrow$ (ii) (d) $\leftrightarrow$ (i) **38.** असत्य **39.** सत्य **40.** सत्य **41.** असत्य **42.** सत्य

3.3 प्रश्नावली

4. $\frac{56}{33}$ **5.** $\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$ **8.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **15.** $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ **16.** $\theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{4}$

17. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **18.** $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **19.** $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ **22.** 1 **25.** $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

26. $\frac{3}{2}$ **27.** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ **28.** $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$ **29.** $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$

30. C **31.** D **32.** D **33.** C **34.** B **35.** C **36.** B **37.** C **38.** A
39. B **40.** D **41.** D **42.** A **43.** D **44.** C **45.** B **46.** C **47.** C
48. C **49.** B **50.** C **51.** B **52.** C **53.** C **54.** A **55.** B **56.** A

57. B **58.** B **59.** D **60.** 1 **61.** $\frac{1}{8}$ **62.** $\tan\beta$ **63.** $\frac{1}{4}[4 - 3(a^2-1)^2]$, $\sqrt{2-a^2}$

64. $x^2 - \frac{2}{\sin 2A}x + 1$ **65.** 13 **66.** $[-3, 3]$ **67.** 2 **68.** सत्य **69.** असत्य
70. असत्य **71.** सत्य **72.** असत्य **73.** सत्य **74.** सत्य **75.** सत्य
76. (a) $\leftrightarrow$ (iv) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (ii) (d) $\leftrightarrow$ (iii)

4.3 प्रश्नावली

1. $P(n): 2n < \angle n$ **2.** $P(n): 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ **26.** A **27.** B

28. A **29.** 4 **30.** असत्य

5.3 प्रश्नावली

1. 2^n **2.** $-1 + i$ **3.** $(0, -2)$ **4.** $\frac{2}{5}$ **5.** $(1, 0)$ **6.** $i\cot\frac{\theta}{2}$ **11.** $\frac{3}{2}-2i$

12. $\frac{1}{2}-2i$ **13.** 1:3 **14.** $\left(\frac{10}{3},0\right),\frac{2}{3}$ **15.** 1 **18.** 0 **21.** $\sqrt{2}\pm i\sqrt{2},-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$

22. $-2-i$ **23.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ **25.**(i) $\left(a^2+b^2\right)\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ (ii) -15

(iii) -2 (iv) 0 (v) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ (vi) $\bar{z}_1$ (vii) 0 (viii) 6 और 0 (ix) एक वृत्त

(x) $-2\sqrt{3}+2i$ **26.** (i) F (ii) F (iii) T (iv) T (v) T (vi) T (vii) F (viii) F **27.** (a)$\leftrightarrow$ (v), (b) $\leftrightarrow$ (iii), (c) $\leftrightarrow$ (i), (d) $\leftrightarrow$ (iv), (e) $\leftrightarrow$ (ii), (f)$\leftrightarrow$ (vi), (g) $\leftrightarrow$ (viii) और (h)$\leftrightarrow$ (vii)

28. $\frac{-2}{25}-i\frac{11}{25}$ **29.** नहीं **30.** $\frac{(a^2+1)^4}{4a^2+1}$ **31.** $-2\sqrt{3}+2i$ **32.** 1 **33.** $\frac{2\pi}{3}$

34. वास्तविक अक्ष **35.** D **36.** C **37.** B **38.** A **39.** B **40.** A
41. A **42.** B **43.** D **44.** D **45.** B **46.** B **47.** C **48.** C
49. C **50.** A

6.3 प्रश्नावली

1. $\frac{1}{3}\le x\le 1$ **2.** $[0,1] \cup [3,4]$ **3.** $(-\infty,-5)\cup(-3, 3)\cup[5, \infty)$ **4.** $[-4,-2]\cup[2,6]$

5. $\left[\frac{-34}{3},\frac{22}{3}\right]$ **6.** कोई हल नहीं **7.** 2000 से अधिक **8.** 7.77 और 8.77 के बीच

9. 230 लिटर से अधिक परन्तु 920 लिटर से कम **10.** 104 °F और 113 °F के बीच

11. 41 cm. **12.** 8 km और 10 km के बीच **13.** कोई हल नहीं

14. $x + y \le 20,\ \ 3x + 2y \le 48,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0$

15. $x + y \le 8,\ \ x + y \ge 4,\ \ x \le 5,\ \ y \le 5,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0$ **17.** कोई हल नहीं

19. C **20.** C **21.** A **22.** B **23.** D **24.** C **25.** B **26.** A

27. D **28.** B **29.** A **30.** B **31.** (i) F (ii) F (iii) T (iv) F (v) T (vi) F (vii) T (viii) F (ix) T (x) F (xi) T (xii) F (xiii) F (xiv) T (xv) T. **32.** (i) $\le$ (ii) $\ge$ (iii) $>$ (iv) $>$ (v) $>$ (vi) $>$ (vii) $<$, $>$ (viii) $\le$.

7.3 प्रश्नावली

1. 1440 **2.** 481 **3.** 780 **4.** 144 **5.** 22 **6.** 3960 **7.** 4,68000

8. 200 **9.** ${}^{n-3}C_{r-3}(r-2)!3!$ **10.** 14400 **11.** 112 **15.** $r = 3$ **16.** 192

17. 190 **18.** 8400 **19.** 3 **20.** 11 **21.** $\dfrac{18!}{(6!)^3}$ **22.** (a) $11C_4$ (b) $6C_2 \times 5C_2$ (c) $6C_4 + 5C_4$ **23.** (i) $14C_9$ (ii) $14C_{11}$ **24.** $2(20C_5 \times 20C_6)$

25. (i) 21, (ii) 441 (iii) 91 **26.** A **27.** B **28.** C **29.** B **30.** C

31. A **32.** B **33.** D **34.** B **35.** C **36.** D **37.** A **38.** C

39. B **40.** B **41.** $n = 7$ **42.** 0 **43.** n^r **44.** 1,51,200 **45.** 80

46. 5^6 **47.** 18 **48.** 35 **49.** 7800 **50.** 64 **51.** False **52.** असत्य

53. असत्य **54.** सत्य **55.** सत्य **56.** सत्य **57.** सत्य **58.** असत्य **59.** असत्य

60. (a) $\leftrightarrow$ (ii) (b) $\leftrightarrow$ (iii) और (c) $\leftrightarrow$ (i)

61. (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (iv), (d) $\leftrightarrow$ (ii)

62. (a) $\leftrightarrow$ (iv) (b) $\leftrightarrow$ (iii) (c) $\leftrightarrow$ (ii), (d) $\leftrightarrow$ (i)

63. (a) $\leftrightarrow$ (i) (b) $\leftrightarrow$ (iii) (c) $\leftrightarrow$ (iv), (d) $\leftrightarrow$ (ii)

64. (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (ii)

8.3 प्रश्नावली

1. ${}^{15}C_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^5$ **2.** $k = \pm 3$ **3.** -19 **4.** $-3003\,(3^{10})\,(2^5)$

5. (i) -252 (ii) $\frac{189}{8}x^{17}$; $\frac{-21}{16}x^{19}$ 6. -252 7. -1365 8. $252\,y^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{3}}$

9. $r = 6$ 11. 990 12. $p = \pm 2$ 14. $n = 9$

17. $\frac{17}{54}$ 18. (C) 19. (A) 20. (C)

21. (D) 22. (B) 23. (B) 24. (C)

25. $^{30}C_{15}$ 26. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 27. $^{16}C_8$ 28. $n = 12$

29. $\frac{1120}{27}a^{-6}a^{4}$ 30. $^{28}C_{14}\ a^{56}\ b^{14}$ 31. 1 32. तीसरा पद

33. 12 34. F 35. T 36. F

37. F 38. T 39. F 40. F

9.3 प्रश्नावली

2. 1400 रु. 3. 8080 रु., 83520 रु 5. 12 दिन 6. 3420° 7. $\frac{15}{8}cm$ 8. 2480 m

9. Rs 725 11. (i) $4n^3 + 9n^2 + 6n$ (ii) 4960 12. $T_r = 6r - 1$ 17. D 18. C

19. A 20. B 21. C 22. B 23. B 24. A 25. D 26. A

27. $\frac{a}{b}$ or $\frac{b}{c}$ 28. प्रथम पद + अंतिम पद 29. 4^5 30. F 31. T

32. T 33. F 34. F 35. (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (ii)

36. (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (ii) (d) $\leftrightarrow$ (iv)

10.3 प्रश्नावली

1. $x + y + 1 = 0$ 2. $x - 4y + 3 = 0$ 3. 60° or 120°

4. $x + y = 7$ or $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ 5. (3, 1), (– 7, 11) 7. $y - \sqrt{3}x - 2 + \sqrt{3} = 0$

8. $3x + 4y + 3 = 0$ 9. $a = \frac{-8}{3}, b = 4$ 10. $8x - 5y + 60 = 0$ 11. $\sqrt{3}x + y = 8$

12. $x - 7y - 12 = 0$ **13.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **14.** (1, 1) **15.** 15° or 75° **17.** $9x - 20y + 96 = 0$

18. $3x - 4y + 6 = 0$ और $4x - 3y + 1 = 0$ **20.** $(0, 2 + \frac{5\sqrt{3}}{2})$ **22.** A

23. A **24.** B **25.** B **26.** C **27.** D **28.** A **29.** A
30. A **31.** B **32.** B **33.** A **34.** C **35.** A **36.** B
37. B **38.** C **39.** D **40.** B **41.** B **42.** (1, – 2)

43. $x + y + 1 = 0$ **44.** $3x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$ **45.** विपरीत दिशाएं

46. $13(x^2 + y^2) - 83x + 64y + 182 = 0$ **47.** $4x^2y^2 = p^2(x^2 + y^2)$ **48.** सत्य

49. असत्य **50.** असत्य **51.** सत्य **52.** सत्य **53.** सत्य **54.** सत्य

55. असत्य **56.** असत्य **57.** (a) ↔ (iii) (b) ↔ (i) सत्य (c) ↔ (ii)

58. (a) ↔ (iv) (b) ↔ (iii) (c) ↔ (i), (d) ↔ (ii)

59. (a) ↔ (iii) (b) ↔ (i) (c) ↔ (iv), (d) ↔ (ii)

11.3 प्रश्नावली

1. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ **3.** $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

5. $\frac{3}{4}$ **6.** $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$ **7.** (1, 2)

8. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ **9.** $k \pm 8$ **10.** $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 15 = 0$

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **12.** उत्केन्द्रता $= \frac{4}{5}$ और नाभियाँ (4, 0) तथा (–4, 0) हैं **13.** $\frac{39}{4}$

14. $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$ **15.** 18 **16.** (2, 4) , (2, – 4) **17.** $\frac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}$ **18.** $x^2 + 8y = 32$

19. $m = 1$ **20.** $x^2 - y^2 = 32$ **21.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$ **22.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = \frac{4}{9}$.

23. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$ **24.** $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$

25. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$ **26.** $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

27. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ **28.** (a) $y^2 = 12x - 36$, (b) $x^2 = 32 - 8y$, (c) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$ **29.** $3x^2 + 4y^2 - 36x = 0$

30. $9x^2 + 5y^2 = 180$ **32.** (a) $15x^2 - y^2 = 15$ (b) $9x^2 - 7y^2 + 343 = 0$, (c) $y^2 - x^2 = 5$

33. असत्य **34.** असत्य **35.** असत्य **36.** असत्य **37.** सत्य **38.** असत्य

39. सत्य **40.** सत्य **41.** $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = \left(\frac{45}{13}\right)^2$ **42.** $x^2 + y^2 - 46x + 22y = 0$

43. $6 + 2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ **44.** $\frac{4x^2}{1} + \frac{4y^2}{5} = 1$ **45.** $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$

46. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ और $(0, \pm 10)$ **47.** (C) **48.** (C) **49.** (C) **50.** (C)

51. A **52.** B **53.** A **54.** A **55.** D **56.** B **57.** C **58.** A **59.** A

12.3 प्रश्नावली

2. (i) पहला अष्टांशक (ii) चौथा अष्टांशक (iii) आठवाँ अष्टांशक (iv) पाँचवाँ अष्टांशक (v) दूसरा अष्टांशक (vi) तीसरा अष्टांशक (vii) आठवाँ अष्टांशक (viii) छठवाँ अष्टांशक

3. (i) (3,0,0), (0,4,0), (0,0,2) (ii) (–5, 0, 0), (0,3,0), (0,0,7) (iii) (4,0,0), (0, –3, 0), (0,0,5)

4. (i) (3,4,0), (0,4,5), (3,0,5) (ii) (–5, 3, 0),(0,3,7), (–5, 0, 7) (iii) (4,–3, 0), (0,–3, –5), (4, 0, –5)

5. 5 **6.** 11 **9.** (2,–4, 16) **11.** (–2, –2, –1) **12.** (1, 1, –2)

13. (–3, 4, –7), (7, 2, 5) और (–3, 12, 17) **14.** (4, 7, 6)

15. (4, –5, 1), (3, –2, –1) **16.** $a = -2$, $b = -8$, $c = 2$ **17.** $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, 9\right)$ **18.** 2:1 बाह्यत:

19. बिन्दु (3,4,5), (–1,6,–7), तथा (1,2,3) शीर्ष हैं और बिन्दु $(1, 4, \frac{1}{3})$ केन्द्रक हैं।

20. 1:3 बाह्यत: **21.** (2,0,0), (2,2,0), (0,2,0), (0,2,2) (0,0,2) (2,0,2), (0,0,0), (2,2,2)

22. A **23.** B **24.** A **25.** B **26.** A **27.** B **28.** B **29.** A

30. A **31.** B **32.** A **33.** D **34.** A **35.** तीनों निर्देशांक तल **36.** तीन जोड़े

37. प्रदत्त बिन्दु **38.** आठ **39.** $(0, y, z)$ **40.** $x = 0$ **41.** $(0, 0, z)$

42. $x = 0$, $y = 0$ **43.** z- निर्देशांक **44.** (y और z निर्देशांक) **45.** yz-तल

46. x-अक्ष **47.** $\sqrt{333}$ **48.** $a = 5$ अथवा -3 **49.** $(1, 1, -2)$

50. (a) $\leftrightarrow$ (iii) (b) $\leftrightarrow$ (i) (c) $\leftrightarrow$ (ii) (d) $\leftrightarrow$ (vi) (e) $\leftrightarrow$ (iv) (f) $\leftrightarrow$ (v) (g) $\leftrightarrow$ (viii) (h) $\leftrightarrow$ (vii) (i) $\leftrightarrow$ (x) (j) $\leftrightarrow$ (ix)

13.3 प्रश्नावली

1. 6 **2.** 2 **3.** $\dfrac{1}{\sqrt[2]{x}}$ **4.** $\dfrac{1}{3}2^{\frac{-2}{3}}$ **5.** 3 **6.** $\dfrac{5}{2}(a+2)^{\frac{3}{2}}$ **7.** 7

8. 8 **9.** $\dfrac{8}{5}$ **10.** 1 **11.** 0 **12.** $\dfrac{1}{15}$ **13.** $\dfrac{7}{2}$ **14.** $n = 5$

15. $\dfrac{3}{7}$ **16.** $\dfrac{1}{4}$ **17.** 2 **18.** 1 **19.** $\dfrac{m^2}{n^2}$ **20.** 3 **21.** $\sqrt{2}$

22. 2 **23.** 1 **24.** $2\sqrt{a}\cos a$ **25.** 4 **26.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ **27.** 0

28. $k = \dfrac{3}{8}$ **29.** $3x^2 + 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **30.** $3x^2 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} + 3$

31. $3x\sec^2 x + 5\sec^2 x + 3\tan x + 3$ **32.** $2\tan x\sec^2 x$ **33.** $\dfrac{55 - 40x - 15x^2}{(5x^2 - 7x + 9)^2}$

34. $\dfrac{-x^5\cos x + 5\sec^4 \sin x + 1}{\sin^2 x}$ **35.** $\dfrac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec} x(2 - x\cot x)$

36. $(ax^2 + \cot x)(-q\sin x) + (p + q\cos x)(2ax - \operatorname{cosec}^2 x)$

37. $\dfrac{bc\cos x + ad\sin x + db}{(c + d\cos x)^2}$ **38.** $2\cos 2x$ **39.** $(2x-7)(30x-43)(3x+5)^2$

40. $x^2\cos x + 2x\sin x - 2\sin 2x$ **41.** $\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\cos 2x$ **42.** $\dfrac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

43. $-2x\sin(x^2+1)$ **44.** $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **45.** $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ **46.** $\cos x - x\sin x$

47. $\sec x(x\tan x+1)$ **48.** $\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$ **49.** –4 **50.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **52.** $k = 6$

53. $c = 1$ **54.** C **55.** A **56.** A **57.** B **58.** A

59. C **60.** C **61.** D **62.** B **63.** D **64.** C

65. D **66.** B **67.** B **68.** D **69.** A **70.** A

71. A **72.** A **73.** B **74.** C **75.** A **76.** D

77. 1 **78.** $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **79.** y **80.** 1

14.3 प्रश्नावली

1. (i) से (v) और (viii) से (x) कथन हैं

2. (i) p : संख्या 7, एक अभाज्य संख्या है
q : संख्या 7, एक विषम संख्या है

(ii) p : चेन्नई भारत में है
q : चेन्नई तमिलनाडू की राजधनी

(iii) p : संख्या 100, संख्या 3 से भाज्य है
q : संख्या 100, संख्या 11 से भाज्य है
r : संख्या 100, संख्या 5 से भाज्य है।

(iv) p : चण्डीगढ़ हरियाणा की राजधानी है
q : चण्डीगढ़ यू.पी. की राजधानी है

(v) p : $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है
q : $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है

(vi) p : 0 प्रत्येक धन पूर्णांक से कम है
q : 0 प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम है

(vii) p : पौधे प्रकाश संश्लेषण के लिए सूर्य के प्रकाश का प्रयोग करते हैं
q : पौधे प्रकाश संश्लेषण के लिए पानी का प्रयोग करते हैं
r : पौधे प्रकाश संश्लेषण के लिए कार्बन डाई आक्साइड का प्रयोग करते हैं।

(viii) p : किसी समतल में स्थित दो रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है
q : किसी समतल में स्थित दो रेखाएँ समांतर होती हैं

(ix) p : एक आयत, एक चतुर्भुज होता है
q : एक आयत, एक 5-भुजाओं का बहुभुज होता है

3. (i) संयुक्त कथन सत्य है तथा इसके घटक कथन निम्नलिखित हैं:
p : 57, संख्या 2 से भाज्य है और q : 57, संख्या 3 से भाज्य है

(ii) संयुक्त कथन सत्य है तथा इसके घटक कथन निम्नलिखित हैं:
p : 24, 4 का गुणज है। और q : 24, 6 का गुणज है।

(iii) संयुक्त कथन सत्य है तथा इसके घटक कथन नीचे दिए हैं:

p : सभी जीवित वस्तुओं की दो आँखें होती हैं

q : सभी जीवित वस्तुओं के दो पैर होते हैं

(iv) संयुक्त कथन सत्य है तथा इसके घटक कथन निम्नलिखित हैं:

p : 2 एक संख्या है ; q : 2 एक अभाज्य संख्या है

4. (i) संख्या 17, एक अभाज्य संख्या नहीं है। (ii) $2 + 7 \neq 6$

(iii) बैगनी रंग नीला नहीं होता है।

(iv) $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। (v) 2, एक अभाज्य संख्या है।

(vi) एक ऐसी वास्तविक संख्या का अस्तित्व है, जो एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

(vii) यह वस्तुस्थित नहीं है कि गाय के चार पैर होते हैं।

(viii) एक लीप वर्ष में 366 दिन नहीं होते हैं।

(ix) एक ऐसे समरूप त्रिभुज का अस्तित्व है, जो सर्वांगसम नहीं है।

(x) किसी वृत्त का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि के समान नहीं होता है।

5. (i) $p \wedge q$ जहाँ p : राहुल ने हिन्दी विषय में परीक्षा पास की;

q : राहुल ने अंग्रेजी विषय में परीक्षा पास की।

(ii) $p \wedge q$ जहाँ p : x एक सम पूर्णांक है; q : y एक सम पूर्णांक है।

(iii) $p \wedge q \wedge r$ जहाँ p : 2, संख्या 12 का एक गुणनखण्ड है;

q : 3, संख्या 12 का एक गुणनखण्ड है;

r : 6, 12 का एक गुणनखण्ड है।

(iv) $p \vee q$, जहाँ p : x एक विषम पूर्णांक है ; q : $x + 1$, एक विषम पूर्णांक है।

(v) $p \vee q$ जहाँ p : एक संख्या 2 से भाज्य है; q : वह संख्या 3 से भाज्य है।

(vi) $p \vee q$ जहाँ p : $x = 2$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

q : $x = 3$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का एक मूल है।

(vii) $p \vee q$, जहाँ p : विद्यार्थीगण हिन्दी को वैकल्पित प्रश्नपत्र के रूप में चुन सकते हैं;

q : विद्यार्थीगण अंगरेजी को वैकल्पिक प्रश्नपत्र के रूप में चुन सकते हैं।

6. (i) यह असत्य है कि सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक और सम्मिश्र होती है;

(ii) यह असत्य है कि सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय या अपरिमेय होती है;

(iii) $x = 2$, वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ का मूल नहीं है या $x = 3$ वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ का मूल नहीं है।

(iv) किसी त्रिभुज की न तो 3-भुजाएँ होती है और न 4-भुजाएँ होती हैं।

(v) 35 एक अभाज्य संख्या नहीं है और यह एक मिश्र संख्या नहीं है।

(vi) यह असत्य है कि सभी अभाज्य पूर्णांक या तो सम होते हैं या विषम होते हैं।

(vii) $|x|$, x के बराबर नहीं होता है और यह $-x$ के बराबर नहीं होता है।

(viii) संख्या 6, 2 से भाज्य नहीं है या यह 3 से भाज्य नहीं है।

7. (i) यदि एक संख्या विषम है, तो इसका वर्ग विषम है।

(ii) यदि आप रात्रि-भोज करते हैं, तो आपको स्वीट डिश मिलेगी।

(iii) यदि आप अध्ययन नहीं करेंगे, तो आप फेल (अनुत्तीर्ण) हो जाएंगे।

(iv) यदि एक पूर्णांक, 5 से भाज्य है, तो उसका इकाई का अंक 0 या 5 है।

(v) यदि कोई संख्या अभाज्य है, तो इसका वर्ग अभाज्य नहीं है।

(vi) यदि a, b और c, A.P में हैं, तो $2b = a + c$.

8. (i) किसी पूर्णांक का इकाई का अंक शून्य है यदि और केवल यदि वह, 5 से भाज्य है।

(ii) एक प्राकृत संख्या n विषम है यदि और केवल यदि प्राकृत संख्या 2 से भाज्य नहीं है।

(iii) एक त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है यदि और केवल यदि उस त्रिभुज की तीनों भुजाएं समान हैं।

9. (i) यदि $x \neq 3$, तो $x \neq y$ या $y \neq 3$

(ii) यदि n एक पूर्णांक नहीं है, तो n एक प्राकृत संख्या नहीं है।

(iii) यदि कोई त्रिभुज समबाहु नहीं है, तो त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान नहीं है।

(iv) यदि xy एक धन पूर्णांक नहीं है, तो x या y ऋण पूर्णांक नहीं हैं।

(v) यदि प्राकृत संख्या n, 2 या 3 से भाज्य नहीं है, तो n, 6 से भाज्य नहीं है।

(vi) यदि मौसम ठण्डा नहीं होगा, तो बर्फ नहीं गिर रही है।

10. (i) यदि R एक समचतुर्भुज है, तो यह एक वर्ग है।

(ii) यदि कल मंगलवार है, तो आज सोमबार है।

(iii) यदि आप ताजमहल निश्चित ही जाएँ तो आप आगरा जाएँ।

(iv) यदि एक त्रिभुज सककोण त्रिभुज है, तो त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योगफल उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है।

(v) यदि एक त्रिभुज समबाहु है, तो उस त्रिभुज के तीनों कोण समान हैं।

(vi) यदि $2x = 3y$, तो $x{:}y = 3{:}2$

(vii) यदि किसी चतुर्भुज S के सम्मुख कोण सम्पूरक हैं, तो S एक चक्रीय चतुर्भुज है।

(viii) यदि x न तो धन और ऋण है, तो $x = 0$

(ix) यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान है, तो त्रिभुज समरूप हैं।

11. (i) एक ऐसे का अस्तित्व हैं (ii) सभी के लिए (iii) एक ऐसी का अस्तित्व है (iv) प्रत्येक के लिए (v) सभी के लिए (vi) एक ऐसे का अस्तित्व है (vii) सभी के लिए (viii) एक ऐसे का अस्तित्व है (ix) एक का अस्तित्व है (x) एक ऐसी का अस्तित्व है

17. C **18.** D **19.** B **20.** D **21.** C **22.** B
23. A **24.** B **25.** C **26.** A **27.** C **28.** B
29. A **30.** C **31.** B **32.** A **33.** C **34.** A
35. C **36.** D **37.** (i), (ii) और (iv) कथन है; (iii) और (v) कथन नहीं हैं।

15.3 प्रश्नावली

1. 0.32 **2.** 1.25 **3.** $\dfrac{n^2-1}{4n}$ **4.** $\dfrac{n}{4}$ **5.** $\sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$ **6.** 3.87

7. $\sqrt{\dfrac{n_1(s_1)^2+n_2(s_2)^2}{n_1+n_2}+\dfrac{n_1n_2(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2)^2}}$ **8.** 5.59 **9.** 7 **10.** 1.38

11. माध्य = 2.8, SD = 1.12 **12.** 8.9 **13.** 5000, 251600 **14.** माध्य = 5.17, SD = 1.53

15. माध्य = 5.5, Var. = 4.26 **16.** 0.99 **17.** 7.08 **18.** माध्य = $\dfrac{239}{40}$, SD = 2.85

19. Var. = 1.16gm, S.D = 1.08 gm **20.** माध्य = $a+\dfrac{d(n-1)}{2}$, S.D = $d\sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

21. हसीना और तीव्र एवम् संगत है। **22.** 10.24 **23.** माध्य = 42.3, Var. 43.81

24. B **25.** B **26.** B **27.** C **28.** A **29.** C **30.** C **31.** A
32. C **33.** A **34.** D **35.** D **36.** A **37.** D **38.** A **39.** A
40. SD **41.** 0, कम **42.** 11 **43.** स्वतंत्र **44.** न्यूनतम
45. कम से कम **46.** बड़ा या बराबर

16.3 प्रश्नावली

1. $\dfrac{1}{72}$ **2.** $\dfrac{2}{3}$ **3.** 0.556 **4.** (a) 5^{k-1} elements (b) $\dfrac{5^k-1}{4}$ **5.** $\dfrac{4}{9}$

6. 0.93 **7.** (a) 0.65 (b) 0.55 (c) 0.8 (d) 0 (e) 0.35 (f) 0.2

8. (a) 0.35 (b) 0.77 (c) 0.51 (d) 0.57 **9.** (a) $\dfrac{2}{9}$ (b) $\dfrac{5}{9}$

10. (a) p(जान की उन्नति) = $\frac{1}{8}$, p(रीता की उन्नति) = $\frac{1}{4}$, p(असलम की उन्नति) = $\frac{1}{2}$,

p (गुरुप्रीत की उन्नति) = $\frac{1}{8}$ (b) P(A) = $\frac{1}{4}$

11. (a) 0.20 (b) 0.17 (c) 0.45 (d) 0.13 (e) 0.15 (f) 0.51

12. (a) $S = \{B_1B_2, B_1W, B_2B_1, B_2W, WB_1, WB_2BW_1, BW_2, W_1B, W_1W_2, W_2B, W_2W_1\}$

(b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ **13.**(a) $\frac{5}{143}$ (b) $\frac{28}{143}$ (c) $\frac{40}{143}$

14. (a) $\frac{2}{143}$ (b) $\frac{2}{143}$ (c) $\frac{25}{26}$ (d) $\frac{15}{26}$ **15.** $\frac{7}{13}$

16. (a) p(A) = .25, p(B) = .32 , p(A∩B) = .17 (b) p(A∪B) = .40 (c) .40 (d) .68

17. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{26}$ (d) $\frac{5}{36}$ **18.** A **19.** B **20.** C **21.** C

22. D **23.** A **24.** A **25.** C **26.** B **27.** C **28.** C **29.** B

30. असत्य **31.** असत्य **32.** असत्य **33.** सत्य **34.** सत्य **35.** असत्य

36. सत्य **37.** 0.15 **38.** 0.3 **39.** $\overline{E} = \{2, 4, 6\}$ **40.** 0.20

41. 0.2 **42.** (a) ↔ (iv) (b) ↔ (v) (c) ↔ (i) (d) ↔ (iii) (e) ↔ (ii)

43. (a) ↔ (iv) (b) ↔ (iii) (c) ↔ (ii) (d) ↔ (i)